This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Acerca de este libro

Esta es una copia digital de un libro que, durante generaciones, se ha conservado en las estanterías de una biblioteca, hasta que Google ha decidido escanearlo como parte de un proyecto que pretende que sea posible descubrir en línea libros de todo el mundo.

Ha sobrevivido tantos años como para que los derechos de autor hayan expirado y el libro pase a ser de dominio público. El que un libro sea de dominio público significa que nunca ha estado protegido por derechos de autor, o bien que el período legal de estos derechos ya ha expirado. Es posible que una misma obra sea de dominio público en unos países y, sin embargo, no lo sea en otros. Los libros de dominio público son nuestras puertas hacia el pasado, suponen un patrimonio histórico, cultural y de conocimientos que, a menudo, resulta difícil de descubrir.

Todas las anotaciones, marcas y otras señales en los márgenes que estén presentes en el volumen original aparecerán también en este archivo como testimonio del largo viaje que el libro ha recorrido desde el editor hasta la biblioteca y, finalmente, hasta usted.

Normas de uso

Google se enorgullece de poder colaborar con distintas bibliotecas para digitalizar los materiales de dominio público a fin de hacerlos accesibles a todo el mundo. Los libros de dominio público son patrimonio de todos, nosotros somos sus humildes guardianes. No obstante, se trata de un trabajo caro. Por este motivo, y para poder ofrecer este recurso, hemos tomado medidas para evitar que se produzca un abuso por parte de terceros con fines comerciales, y hemos incluido restricciones técnicas sobre las solicitudes automatizadas.

Asimismo, le pedimos que:

+ *Haga un uso exclusivamente no comercial de estos archivos* Hemos diseñado la Búsqueda de libros de Google para el uso de particulares; como tal, le pedimos que utilice estos archivos con fines personales, y no comerciales.

+ *No envíe solicitudes automatizadas* Por favor, no envíe solicitudes automatizadas de ningún tipo al sistema de Google. Si está llevando a cabo una investigación sobre traducción automática, reconocimiento óptico de caracteres u otros campos para los que resulte útil disfrutar de acceso a una gran cantidad de texto, por favor, envíenos un mensaje. Fomentamos el uso de materiales de dominio público con estos propósitos y seguro que podremos ayudarle.

+ *Conserve la atribución* La filigrana de Google que verá en todos los archivos es fundamental para informar a los usuarios sobre este proyecto y ayudarles a encontrar materiales adicionales en la Búsqueda de libros de Google. Por favor, no la elimine.

+ *Manténgase siempre dentro de la legalidad* Sea cual sea el uso que haga de estos materiales, recuerde que es responsable de asegurarse de que todo lo que hace es legal. No dé por sentado que, por el hecho de que una obra se considere de dominio público para los usuarios de los Estados Unidos, lo será también para los usuarios de otros países. La legislación sobre derechos de autor varía de un país a otro, y no podemos facilitar información sobre si está permitido un uso específico de algún libro. Por favor, no suponga que la aparición de un libro en nuestro programa significa que se puede utilizar de igual manera en todo el mundo. La responsabilidad ante la infracción de los derechos de autor puede ser muy grave.

Acerca de la Búsqueda de libros de Google

El objetivo de Google consiste en organizar información procedente de todo el mundo y hacerla accesible y útil de forma universal. El programa de Búsqueda de libros de Google ayuda a los lectores a descubrir los libros de todo el mundo a la vez que ayuda a autores y editores a llegar a nuevas audiencias. Podrá realizar búsquedas en el texto completo de este libro en la web, en la página `http://books.google.com`

B 1,064,308

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID

ART. 117 DE LOS ESTATUTOS DE LA ACADEMIA

«La Academia no adopta ni rehusa las opiniones de sus individuos; cada autor es responsable de lo que contengan sus escritos.»

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO VII

MADRID
IMPRENTA DE LA GACETA DE MADRID
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.
1908

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID

ACADÉMICOS DE NÚMERO

Excmo. Sr. D. José Echegaray, *Presidente.*
Zurbano, 44.

Excmo. Sr. D. Eduardo Saavedra, *Vicepresidente.*
Fuencarral, 74.

Sr. D. Joaquín González Hidalgo.
Fuentes, 9.

Excmo. Sr. D. Daniel de Cortázar.
Velázquez, 10.

Ilmo. Sr. D. José Rodríguez Carracido, *Bibliotecario.*
Orellana, 10.

Excmo. Sr. D. Francisco de P. Arrillaga, *Secretario.*
Valverde, 20.

Excmo. Sr. D. Julián Calleja y Sánchez, *Tesorero.*
Argensola, 6.

Sr. D. Eduardo Torroja y Caballé, *Contador.*
Requena, 9.

Excmo. Sr. D. Amós Salvador y Rodrigáñez.
Carrera de San Jerónimo, 53.

Sr. D. Francisco de Paula Rojas.
Lealtad, 13.

Excmo. Sr. D. Juan Navarro-Reverter.
Barquillo, 15.

Excmo. Sr. D. Lucas Mallada.
Santa Teresa, 7.

Excmo. Sr. D. Santiago Ramón y Cajal.
Atocha, 125.

Sr. D. Pedro Palacios.
Monte Esquinza, 9.

Sr. D. Blas Lázaro é Ibiza.
Palafox, 19.

Ilmo. Sr. D. José Muñoz del Castillo.
Quintana, 38.

202727

Excmo. Sr. D. Leonardo de Torres y Quevedo.
Válgame Dios, 3.

Sr. D. José María de Madariaga, *Vicesecretario*.
Zurbano, 18.

Ilmo. Sr. D. José Rodríguez Mourelo.
Piamonte, 14.

Excmo. Sr. D. José Marvá y Mayer.
Campomanes, 8.

Sr. D. Rafael Sánchez Lozano.
Génova, 17.

Sr. D. José Gómez Ocaña.
Atocha, 127 dupdo.

Sr. D. Vicente Ventosa y Martínez de Velasco.
Amnistía, 10.

Sr. D. Nicolás de Ugarte y Gutiérrez.
Hernán Cortés, 3.

Excmo. Sr. D. Gustavo Fernández y Rodríguez
San Bernardo, 2.

Sr. D. Vicente de Garcini.
Escuela de Ingenieros de Caminos.—Calle de Alfonso XII.

ACADÉMICOS ELECTOS

Sr. D. Eduardo Mier y Miura.
Infantas, 32.

Ilmo. Sr. D. Ignacio Bolívar.
Paseo de Martínez Campos, 17.

Ilmo. Sr. D. Bernardo Mateo Sagasta.
San Mateo, 22.

Ilmo. Sr. D. Pedro de Avila y Zumarán.
Travesía de la Ballesta, 8.

Sr. D. Ignacio González Martí.
Hernán Cortés, 7.

Excmo. Sr. D. Manuel Benítez y Parodi.
Plaza de la Lealtad, 4.

Sr. D. Miguel Vegas y Puebla-Collado.
Pez, 1 y 3.

Sr. D. Juan Fagés y Virgili.
San Bernardo, 18.

Sr. D. Eduardo León y Ortiz.
Fuencarral, 19 y 21.

Sr. D.

La Academia está constituída en tres Secciones:

1.ª CIENCIAS EXACTAS.—Sres. Saavedra, *Presidente;* Torres, *Secretario;* Arrillaga, Torroja, Navarro-Reverter, Ventosa, Ugarte, Fernández y Rodríguez y Garcini.

2.ª CIENCIAS FÍSICAS.— Sres. Carracido, *Presidente;* Mourelo, *Secretario;* Echegaray, Salvador, Rojas, Muñoz del Castillo, Madariaga y Marvá.

3.ª CIENCIAS NATURALES.—Sres. Hidalgo, *Presidente;* Gómez Ocaña, *Secretario;* Cortázar, Calleja, Mallada, Cajal, Palacios, Lázaro y Sánchez Lozano.

ACADÉMICOS CORRESPONSALES NACIONALES

Sr. D. Andrés Poey. *París.*
Excmo. Sr. D. Silvino Thos y Codina. *Madrid.*
Sr. D. Eduardo Boscá y Casanoves. *Valencia.*
Sr. D. Luis Mariano Vidal. *Gerona.*
Excmo. Sr. D. Leopoldo Martínez Reguera. *Madrid.*
Excmo. Sr. D. Rogelio de Inchaurrandieta. *Madrid.*
Sr. D. Ramón de Manjarrés y de Bofarull. *Sevilla.*
Sr. D. Modesto Domínguez Hervella. *Madrid.*
Sr. D. Salvador Calderón y Arana. *Madrid.*
Ilmo. Sr. D. Ricardo Vázquez-Illá y Martínez. *Valladolid.*
Sr. D. Zoel García de Galdeano. *Zaragoza.*
Sr. D. Eduardo J. Navarro. *Málaga.*
Sr. D. José María Escribano y Pérez. *Murcia.*
Sr. D. Lauro Clariana y Ricart. *Barcelona.*
Excmo. Sr. D. Rafael Breñosa y Tejada. *Segovia.*
Excmo. Sr. D. José María de Castellarnáu y Lleopart. *Segovia.*

Excmo. Sr. D. Juan Bautista Viniegra y Mendoza, Conde de Villamar. *San Fernando.*
Sr. D. Rafael Pardo de Figueroa. *Puerto Real.*
Sr. D. Juan Vilaró Díaz. *Habana.*
Excmo. Sr. D. Pablo Alzola y Minondo. *Bilbao.*
Excmo. Sr. D. Joaquín de Vargas y Aguirre. *Salamanca.*
Excmo. Sr. D. José J. Landerer. *Valencia.*
Sr. D. José Eugenio Ribera. *Madrid.*
Sr. D. Tomás Escriche y Mieg. *Barcelona.*
Sr. D. Eugenio Mascareñas. *Barcelona.*
Sr. D. Juan J. Durán Lóriga. *Coruña.*

ACADÉMICOS CORRESPONSALES EXTRANJEROS

Anguiano (A.). *Méjico.*
Gaudry (A.). *París.*
Lemoine (V.). *Reims* (?).
Collignon (E.). *París.*
Barrois (Ch.). *Lille.*
Hoonholtz, Barón de Teffé (A. L. de). *Río de Janeiro* (?).
Gomes Teixeira (F.). *Porto.*
Príncipe de Mónaco (S. A. el). *Mónaco.*
Choffat (P.). *Lisboa.*
Arata (P. N.). *Buenos Aires.*
Carvallo (M.). *París.*
Laisant (C. A.). *París.*
Eneström (G.). *Estocolmo.*
Ferreira da Silva (A. J.). *Porto.*
Nery Delgado (P. F.). *Lisboa.*
Pina Vidal (A. A. de). *Lisboa.*
Brocard (H.). *Bar-le-Duc.*
Ocagne (M. d'). *París.*
Romiti (G.). *Pisa.*
Wettstein Ritter von Westersheim (R.). *Viena.*
Engler (A.). *Berlín.*
Guedes de Queiróz, Conde de Foz (G.). *Lisboa.*

Rayleigh (Lord). *Salisbury*.
Arrhenius. (S.). *Estocolmo*.
Ramsay (G.). *Londres*.
Castanheira das Neves (J.). *Lisboa*.
Pilsbry (E.). *Filadelfia*.
Porter (C. E.). *Santiago de Chile*.
Academia Mejicana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. *Méjico*.

I.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décima.

SEÑORES:

Hemos estudiado la distribución de las tensiones alrededor de un punto, haciendo depender todas ellas de seis componentes N, T para dicho punto, y de los cosenos directores del plano elástico correspondiente á cada tensión.

Estudiamos, asimismo, las deformaciones alrededor de un punto M, haciéndolas depender á su vez de seis deformaciones fundamentales a, b.

Expresamos las tensiones en función de las deformaciones; es decir, N, T en función de a, b. Y para simplificar el problema, admitimos que el cuerpo era isótropo, con lo cual las 36 constantes del caso general se reducían á dos: λ, μ.

Claro es que en todas estas relaciones, ni conocíamos N, T, ni tampoco a, b, porque no hemos resuelto todavía el problema de la Elasticidad; pero sean cuales fueren estas cantidades, y en todos los casos, existen las relaciones que hemos establecido, ya generales, ya simplificadas.

Del mismo modo que en un problema de Algebra elemental, no se conocen las incógnitas, pero se representan por letras, y entre ellas se obtienen relaciones por virtud de la misma definición del problema, para deducir de estas relaciones analíticas los valores de las incógnitas.

Por último, hemos hallado las condiciones de equilibrio ó de movimiento para un elemento cualquiera del sólido elástico, así como para un punto cualquiera de la superficie lí-

mite, si el sistema no es indefinido. Si lo fuera, no había para qué tener en cuenta estas últimas.

Dichas ecuaciones de equilibrio, estático ó dinámico, son fundamentales, y son ecuaciones diferenciales en T_1, T_2, T_3, N_1, N_2, N_3; y entran además en dichas ecuaciones las componentes de las fuerzas que vienen de lo exterior y actúan sobre cada elemento del sistema elástico.

Si éste es limitado, en las ecuaciones que expresan el equilibrio de la superficie, entrarán también las fuerzas exteriores que sobre dicha superficie actúan.

Claro es que este último problema puede ser más general, porque pueden no conocerse estas fuerzas exteriores y estar substituídas por ciertas condiciones de empotramiento del sólido; pero son casos más complicados y en que no podemos fijarnos, al menos, por ahora.

Tenemos, pues, con lo dicho, todo lo necesario para obtener las fórmulas finales.

Fijemos las ideas.

Hemos obtenido las N y T, acabamos de recordarlo, en función de las a, b, lo cual expresaremos simbólicamente de este modo:

$$(N, T) = F(a, b); \qquad (1)$$

ecuación simbólica, repetimos, que en rigor, como ya hemos visto detenidamente, se resuelve en seis ecuaciones lineales en a, b.

Hemos obtenido asimismo las ecuaciones diferenciales de equilibrio, que podemos expresar también simbólicamente por

$$F_1(N, T) = 0, \qquad (2)$$

que se resuelven en tres ecuaciones para el interior del cuerpo y otras tres para la superficie si el cuerpo está limitado.

Pues ya no nos queda más que hacer, que del grupo (1)

deducir las N, T y substituir sus valores en el grupo (2), con lo cual obtendremos una relación

$$\varphi(a, b) = 0, \qquad (3)$$

que será equivalente á otras tres si el sistema es indefinido, ó á otras seis si es un cuerpo elástico limitado.

Las ecuaciones del grupo (3), que contienen a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, serán las ecuaciones fundamentales del problema; porque recordarán mis oyentes, que las cantidades a, b eran funciones de las derivadas

$$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz},$$

$$\frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dv}{dz},$$

$$\frac{dw}{dx}, \frac{dw}{dy}, \frac{dw}{dz};$$

de suerte que, en rigor, el grupo (3) representará ecuaciones diferenciales de las componentes de un desplazamiento cualquiera u, v, w, con relación á las variables independientes x, y, z.

Podemos, pues, decir, que el grupo (3) es un grupo

$$\psi(u, v, w) = 0, \qquad (4)$$

que expresa relaciones entre las verdaderas incógnitas u, v, w, y que puede servir para determinarlas en función de x, y, z; es decir, para cualquier punto del sistema y en función de los datos, ó sea de todas las fuerzas exteriores, así como de aquellas cantidades que definen la estructura ó naturaleza del sistema elástico, que en el caso de un sólido isótropo, son precisamente las constantes λ, μ.

Claro es que las ecuaciones del grupo (4) no son ecuacio-

nes en términos finitos, sino ecuaciones diferenciales; más concretamente, en diferenciales parciales de u, v, w, con relación á las variables independientes x, y, z, y además del tiempo t si el problema es de dinámica.

Más aún; este grupo (4) representará ecuaciones diferenciales de segundo orden para el sólido indefinido, como veremos bien pronto, y como puede preverse desde luego.

Porque, en efecto, las N, T se expresan en función lineal de a, b, según el grupo (1); pero a, b son coeficientes diferenciales de primer orden.

Las primeras del grupo (2), que son las que expresan las condiciones del equilibrio del paralelepípedo elemental, contienen linealmente coeficientes diferenciales de primer orden de N, T con relación á x, y, z; luego, al substituir en éstas, como hemos dicho, los valores de N, T, entrarán coeficientes diferenciales de segundo orden de u, v, w.

En suma; las ecuaciones fundamentales del problema de la Elasticidad, que son las contenidas en el grupo (4), en cuanto al sólido indefinido, son ecuaciones en diferenciales parciales de segundo orden de u, v, w, con relación á x, y, z; y si el problema es de dinámica, también con relación á t.

El problema está, pues, planteado analíticamente; puede decirse que, hasta cierto punto, aquí concluye el problema de Física matemática, y empieza un problema de análisis puro, ó sea de cálculo integral que, exceptuando casos particulares, es de una dificultad inmensa aún para los cuerpos isótropos; porque para éstos, es cierto que λ y μ son constantes, pero las fuerzas exteriores pueden ser funciones de x, y, z, y hasta en un caso más general, pueden ser funciones de t.

La integración será, por lo tanto, muy difícil; pero no es esto sólo. La dificultad principal procede, como ya explicábamos en el curso anterior, de que no basta integrar las tres ecuaciones del grupo (4) indicadas, ó por lo menos, obtener un número indefinido de integrales particulares.

La verdadera dificultad consiste en que dichas tres ecuaciones del grupo (4) no expresan, por decirlo así, más que una parte de las condiciones del problema.

Las soluciones que encontremos para ellas, han de satisfacer á otra clase de condiciones, que pueden dividirse en dos clases:

1.° Condiciones iniciales, si se trata de un problema de Dinámica, es decir, para el tiempo $t = 0$.

2.° Condiciones relativas á los límites, si el sólido no es indefinido. Y aquí está la dificultad enorme del problema.

Porque si el sólido es indefinido, el grupo (4) se reducirá á tres ecuaciones; pero si el sólido está limitado, habrá que satisfacer á seis ecuaciones diferenciales, de suerte que las integrales de las tres primeras han de tener suficiente generalidad, como explicábamos en el curso precedente, para satisfacer á las tres últimas.

Todo esto, que hemos expuesto en términos generales, debemos precisarlo aún más.

***

Hemos expresado N, T en función de a, b y para el caso en que el cuerpo sea isótropo por las siguiente fórmulas:

$$\begin{aligned} N_1 &= \lambda\theta + 2\mu a_1 \\ N_2 &= \lambda\theta + 2\mu a_2 \\ N_3 &= \lambda\theta + 2\mu a_3 \\ T_1 &= 2\mu b_1 \\ T_2 &= 2\mu b_2 \\ T_3 &= 2\mu b_3 \end{aligned} \qquad (1')$$

en las que θ representa la dilatación cúbica, de manera que

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz};$$

y además sabemos que a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, se expresan en función de las derivadas de u, v, w, con relación á x, y, z, del siguiente modo:

$$a_1 = \frac{du}{dx}, \quad a_2 = \frac{dv}{dy}, \quad a_3 = \frac{dw}{dz},$$

$$2\,b_1 = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \quad 2\,b_2 = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}, \quad 2\,b_3 = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}.$$

Resulta de aquí que las fórmulas (1′) en rigor, tienen esta forma:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \lambda\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) + 2\mu\frac{du}{dx} \\
N_2 &= \lambda\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) + 2\mu\frac{dv}{dy} \qquad (1'') \\
N_3 &= \lambda\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) + 2\mu\frac{dv}{dz} \\
T_1 &= \mu\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) \\
T_2 &= \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right) \\
T_3 &= \mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right).
\end{aligned}$$

Así tenemos expresadas las N y T en función de las deformaciones, sea de las derivadas primeras de u, v, w, con relación á x, y, z.

***

Hemos obtenido asimismo las tres ecuaciones de equilibrio de un paralelepípedo elemental, situado en lo interior del cuerpo en un punto cualquiera.

Estas ecuaciones, que son las del grupo (2), eran para el caso del equilibrio

$$\begin{aligned}
&\frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}+\rho X=0,\\
&\frac{dT_3}{dx}+\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}+\rho Y=0, \qquad (2')\\
&\frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_3}{dz}+\rho Z=0.
\end{aligned}$$

Análogamente el equilibrio de un punto de la superficie está definido por las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
X_0&=N_1\alpha+T_3\beta+T_2\gamma,\\
Y_0&=T_3\alpha+N_2\beta+T_1\gamma,\\
Z_0&=T_2\alpha+T_1\beta+N_3\gamma,
\end{aligned}$$

en las que si P es la presión exterior por unidad de superficie y l, m, n, son sus cosenos directores, se tiene:

$$X_0=Pl, \quad Y_0=Pm, \quad Z_0=Pn.$$

De modo que las ecuaciones anteriores, serán:

$$\begin{aligned}
Pl&=N_1\alpha+T_3\beta+T_2\gamma,\\
Pm&=T_3\alpha+N_2\beta+T_1\gamma, \qquad (2_1)\\
Pn&=T_2\alpha+T_1\beta+N_3\gamma,
\end{aligned}$$

representando α, β, γ los cosenos directores de la normal á la superficie límite en el punto, para el cual el grupo (2_1) exprese el equilibrio.

Si se tratase de un problema de movimiento elástico, no habria más que introducir las fuerzas de inercia, que depen-

derían de las segundas derivadas de u, v, w, con relación á t, según hemos explicado tantas veces.

***

Por último, para obtener las ecuaciones definitivas, basta substituir en los grupos (2′) y (2_1) en vez de las N y T los valores de estas cantidades, según determina el grupo (1″), ó bajo la forma desarrollada, ó bajo la forma abreviada, y tendremos para las ecuaciones de la Elasticidad en un punto cualquiera del sistema elástico

$$\frac{d\left[\lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx}\right]}{dx} + \mu\frac{d\left[\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right]}{dy} + \\ + \mu\frac{d\left[\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right]}{dz} + \rho X = 0.$$

Esta es la primera de las tres ecuaciones: las otras dos se obtendrán del mismo modo.

Desarrollando, tendremos:

$$\lambda\frac{d\theta}{dx} + 2\mu\frac{d^2u}{dx^2} + \mu\frac{d^2v}{dx\,dy} + \mu\frac{d^2u}{dy^2} + \\ + \mu\frac{d^2u}{dz^2} + \mu\frac{d^2w}{dx\,dz} + \rho X = 0,$$

y también

$$\lambda\frac{d\theta}{dx} + \mu\frac{d^2u}{dx^2} + \mu\frac{d^2v}{dx\,dy} + \mu\frac{d^2w}{dx\,dz} + \\ + \mu\left[\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right] + \rho X = 0,$$

que puede ponerse bajo esta forma:

$$\lambda \frac{d\theta}{dx} + \mu \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) +$$
$$+ \mu\left[\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right] + \rho X = 0,$$

y como

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} + \theta,$$

resultará por fin:

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dx} + \mu\left[\frac{d^2u}{d^2x} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{d^2z}\right] + \rho X = 0.$$

Por consideraciones análogas, substituyendo en las dos últimas ecuaciones del equilibrio del paralelepípedo los valores de N y T, se pueden obtener dos ecuaciones análogas á la precedente.

Claro es que también se llega á ellas con más brevedad, aplicando á esta última las substituciones circulares

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ v & w & u \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & X \end{vmatrix};$$

y tendremos de esta manera las otras dos ecuaciones de la Elasticidad para un medio cualquiera elástico:

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dy} + \mu\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dx^2}\right) + \rho Y = 0,$$
$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dz} + \mu\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right) + \rho Z = 0.$$

Todavía es posible simplificar la forma de las ecuaciones precedentes, adaptando un símbolo de aplicación general en toda la Física matemática.

La operación por la cual se toma la *derivada segunda* con relación á x de una función de x, y, z; y asimismo la *derivada segunda con relación á* y, y por último, *la derivada segunda con relación á* z, y se suman estos tres resultados; esta operación, decimos, se representa por el símbolo

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2},$$

y abreviadamente por la letra griega Δ, de modo que

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}.$$

Dicha expresión es, como acabamos de explicar, *un símbolo*, como en Algebra elemental el símbolo de la multiplicación ó el de la división ú otro cualquiera más ó menos complicado.

Para que dé resultados matemáticos, que puedan convertirse en expresiones numéricas, ó por lo menos en magnitudes, aunque no se precise la unidad, es necesario que dicho símbolo se aplique á una función de x, y, z.

Por ejemplo, siendo $F(x, y, z)$ una función cualquiera de tres variables independientes, si á esta función se aplica el símbolo Δ ya obtendremos un resultado concreto y determinado, porque resultará,

$$\Delta F = \frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2},$$

que indica una operación ó una serie de operaciones sobre la función conocida F.

De aquí se deduce, aplicando el símbolo Δ, á u, v, w, que las tres ecuaciones anteriores pueden escribirse bajo esta forma abreviada, que es la que generalmente se usa:

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dx} + \mu\Delta u + \rho X = 0$$

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dy} + \mu\Delta v + \rho Y = 0 \qquad (1)$$

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dz} + \mu\Delta w + \rho Z = 0.$$

En estas ecuaciones ya sabemos que θ representa la dilatación cúbica y que Δ es el símbolo de una operación determinada, símbolo á que también se da el nombre de *operador.*

Cuando queramos desarrollar cualquiera de estas ecuaciones, no habrá más que substituir por θ y Δ, lo que acabamos de decir que significan.

Por ejemplo, la primera ecuación de las tres desarrolladas se convertirá en

$$(\lambda + \mu)\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) + \\ + \mu\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) + \rho X = 0,$$

ó bien

$$(\lambda + \mu)\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dx\,dy} + \frac{d^2w}{dx\,dz}\right) + \\ + \mu\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) + \rho X = 0;$$

lo mismo pudiéramos decir respecto á las otras dos ecuaciones.

Y vemos que las tres ecuaciones fundamentales para todo el medio elástico, considerado como indefinido, son *ecuaciones en diferenciales parciales de segundo orden de los desplazamientos* u, v, w *respecto á las variables independientes* x, y, z;

las coeficientes de las diversas derivadas son, pues, constantes en el caso de un cuerpo isótropo; pero las componentes X, Y, Z de las fuerzas exteriores pueden ser funciones variables de x, y, z, y esto es lo que complica el problema de la integración.

Dadas, en cada caso particular, X, Y, Z, sean cuales fueren las condiciones de las superficies límites, los valores de u, v, w, es decir,

$$u(x, y, z),\ v(x, y, z)\ w(x, y, z),$$

deben satisfacer á las tres ecuaciones (I), que por eso se dice que son las ecuaciones de equilibrio de un medio elástico indefinido.

Pero aunque encontremos valores de u, v, w que satisfagan á las tres ecuaciones (I), no por eso habremos resuelto el problema.

El que u, v, w satisfagan á (I) *es condición necesaria*, pero *no es condición suficiente* si el sistema está limitado.

Porque será preciso, además, que satisfagan á las condiciones de equilibrio de la superficie.

Veamos cuáles son éstas:

El método para hallarlas es exactamente el mismo que el que acabamos de emplear para los medios elásticos indefinidos.

Hemos visto que el equilibrio de un punto cualquiera, en una de las superficies límites de un sólido elástico, está determinado, suponiendo que P representa la fuerza exterior, que actúa sobre dicho punto, que l, m, n son sus cosenos directores y que α, β, γ son asimismo los cosenos directores de la normal al elemento de superficie que contiene el punto en cuestión; está determinado, decíamos, por las ecuaciones

$$\begin{aligned} Pl &= N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma, \\ Pm &= T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma, \\ Pn &= T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma. \end{aligned}$$

Los valores de las N, T en función de las deformaciones son, como siempre,

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx},$$

$$N_2 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dv}{dy},$$

$$N_3 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dw}{dz},$$

$$T_1 = \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right),$$

$$T_2 = \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right),$$

$$T_3 = \mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right).$$

Pues del mismo modo que susbtituíamos estos valores de las N, T en las ecuaciones que representaban el equilibrio del paralelepipedo elemental, tendremos que substituir dichos valores en las tres ecuaciones que hace un momento hemos recordado, y que expresan el equilibrio del tetraedo de la superficie.

Haciendo dicha substitución tendremos

$$\begin{aligned}
Pl &= \left(\lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx}\right)\alpha + \mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right)\beta + \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right)\gamma, \\
Pm &= \mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right)\alpha + \left(\lambda\theta + 2\mu\frac{dv}{dy}\right)\beta + \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right)\gamma, \qquad \text{(II)} \\
Pn &= \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right)\alpha + \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right)\beta + \left(\lambda\theta + 2\mu\frac{dw}{dz}\right)\gamma.
\end{aligned}$$

***

Las ecuaciones (I) y (II) resuelven por completo el problema del equilibrio.

Pero hay que advertir que á estas últimas debe agregarse la ecuación de la superficie límite; porque en las ecuaciones (II) las tres variables x, y, z no son independientes, puesto que se trata de puntos situados en dicha superficie, cuya ecuación representaremos por

$$F(x, y, z) = 0. \qquad \text{(F)}$$

De manera que las ecuaciones del problema del equilibrio de los cuerpos elásticos en realidad son siete, que las presentaremos unidas para fijar mejor las ideas.

Ecuaciones de un medio indefinido:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dx} + \mu\Delta v + \rho X = 0, \\ (\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dy} + \mu\Delta u + \rho Y = 0, \\ (\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dz} + \mu\Delta w + \rho Z = 0; \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

ecuaciones del equilibrio de la superficie:

$$\begin{aligned} Pl &= \left(\lambda\theta + l\mu\frac{du}{dx}\right)\alpha + \mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right)\beta + \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right)\gamma, \\ Pm &= \mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right)\alpha + \left(\lambda\theta + 2\mu\frac{dv}{dy}\right)\beta + \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right)\gamma, \\ Pn &= \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right)\alpha + \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right)\beta + \left(\lambda\theta + 2\mu\frac{dw}{dz}\right)\gamma, \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

y la ecuación de la superficie que hemos representado por

$$F(x, y, z) = 0 \qquad \text{(F)}$$

Estas siete ecuaciones (I), (II), (F), son las que resuelven el caso general del problema de equilibrio de los sólidos elásticos. Repetiremos, como resumen, lo que ya hemos dicho varias veces respecto á cada uno de estos grupos de ecuaciones.

Dada la significación de los símbolos θ, Δ, el grupo (I) está formado por tres ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden de las funciones u, v, w con relación á x, y, z. Son lineales, puesto que se componen de suma de términos, en cada uno de los que sólo entra la primera potencia de una derivada.

Además contienen las componentes X, Y, Z y las fuerzas de inercia si en vez del problema del equilibrio se trata del movimiento. En este último caso entra un nuevo coeficiente diferencial en cada ecuación: $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^2v}{dt^2}$, $\frac{d^2w}{dt^2}$; pero aun así continúan siendo lineales, sólo que en vez de ser tres las variables independientes son cuatro, x, y, z, t.

El grupo (II) está formado también por tres ecuaciones diferenciales parciales, pero de primer orden, en razón á que sólo entran los coeficientes diferenciales de primer orden de u, v, w con relación á x, y, z.

Sin embargo, debemos hacer alguna observación aclaratoria. En rigor, si son tres las funciones, á saber: u, v, w, las variables independientes no son más que dos, porque la ecuación (F) determina una de ellas; por ejemplo, z en función de x, y.

En cada caso particular las ecuaciones (II) tomarán otra forma, que explicaremos en breve.

***

Continuemos estudiando el caso del equilibrio elástico.

Las explicaciones que siguen, excuso decir que están dedicadas á los principiantes, para los que toda aclaración es

conveniente; porque si confirma sus propias ideas les da más seguridad en lo que estudian, y si aclara dudas ó corrige errores les aprovecha todavía más.

Si las ecuaciones (I), (II) y (F) fueran ecuaciones ordinarias de las que se estudian en Algebra, podría suponerse que el problema era imposible, exceptuando en casos particulares; porque nos encontraríamos con siete ecuaciones y tres incógnitas nada más: u, v, w.

Lo cual echaría por tierra todo nuestro método, pues el sentido común y la experiencia demuestran, que el problema de la Elasticidad es un problema posible, y la única duda que pudiéramos abrigar es la de si tendrá más de una solución.

Pero esta dificultad no existe en el caso que tratamos, porque las ecuaciones del problema no son ecuaciones en términos finitos, como las del Algebra elemental, sino ecuaciones en diferenciales parciales, que tienen, hablando en términos generales, multitud de soluciones y que contienen por lo mismo funciones arbitrarias.

De suerte que los términos de la cuestión varían por completo.

Resolver estos problemas, quiero decir buscar soluciones para el sistema de dichas siete ecuaciones, será muy difícil, pero en teoría la marcha general se comprende fácilmente.

Ya la explicábamos en el curso anterior.

Hoy la recordaremos, aunque con mayor brevedad.

En primer lugar, buscaremos las soluciones más generales del grupo (I); si pudiéramos encontrarlas y contuviesen tres funciones arbitrarias φ_1, φ_2, φ_3 de x, y, z ó eliminando z por medio de (F), funciones tan sólo de x, y, no habría más que substituir en el grupo (II) dichos valores de u, v, w, así como el valor de z, y este grupo se reduciría á tres ecuaciones en diferenciales parciales de las expresadas funciones φ_1, φ_2, φ_3 tomadas con relación á las dos únicas variables independientes x, y.

No habría más, por consiguiente, que integrar el grupo (II)

transformado, y con esto quedaría resuelto el problema, determinando las constantes por las condiciones particulares de cada caso.

Así dicho, la solución *en teoría* no puede ser más sencilla, y al final del curso precedente dimos varios ejemplos.

A lo que entonces expusimos nada tenemos que agregar por ahora.

Hasta aquí nos hemos referido casi constantemente al problema del equilibrio de los cuerpos elásticos.

En cuanto al problema del movimiento elástico de los sistemas, todo se reduce, como hemos explicado varias veces, y según los principios de la mecánica racional, á incluir entre las fuerzas X, Y, Z las fuerzas de inercia del sistema.

Así el grupo (I) se transformará en el siguiente, pasando las fuerzas de inercia al segundo miembro:

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dx} + \mu\Delta u + \rho X = \rho\frac{d^2u}{dt^2},$$

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dy} + \mu\Delta v + \rho Y = \rho\frac{d^2v}{dt^2},$$

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dz} + \mu\Delta w + \rho Z = \rho\frac{d^2w}{dt^2}.$$

Y aquí pudiéramos dar por terminada la materia del presente curso, pero hay dos cuestiones importantes que no tratamos en el curso anterior, y sobre las cuales algo diremos todavía.

Estas dos cuestiones son las siguientes:

1.° Expresión del trabajo interno de un sólido elástico.

2.° Teoría de las coordenadas curvilíneas, principalmente cilíndricas y esféricas aplicadas al problema de la Elasticidad.

***

Expresión del trabajo de un sólido elástico.—Ya lo hemos explicado algunas veces, sobre todo en el primer curso de esta asignatura. La Mecánica clásica, entre otros conceptos fundamentales, parte del concepto de *fuerza.*

A él se refieren, ó con él se enlazan, todos los demás conceptos de esta ciencia.

La definición del *trabajo mecánico,* en el concepto de fuerza, se funda, puesto que el trabajo desarrollado sobre un punto en movimiento es la *suma de los productos,* para todos los instantes y para todos los elementos de la trayectoria, *de la fuerza por el camino infinitamente pequeño que recorre el punto y por el coseno del ángulo que forman las dos líneas á que nos referimos: fuerza* y *camino.*

El trabajo, por lo tanto, no es un concepto primitivo, sino derivado, y aunque importantísimo, pueden estudiarse todos los problemas de la Mecánica clásica, sin necesidad de hablar del trabajo.

Todas estas ideas se han modificado notablemente de algunos años á esta parte.

El concepto de trabajo se ha incluido en el de *energía;* y en las teorías modernas *la energía* tiende á ser preponderante, hasta tal punto, que algunos autores quisieran empezar el estudio de la mecánica por el de la energía, suponiendo que el concepto de fuerza es abstracto y artificial.

Sobre esto mucho habría que discutir, pero sea como fuere, y mientras llega el día en que podamos dedicar estas conferencias al estudio de *la Física matemática moderna,* no será inoportuno, ni será estéril, que vayamos dando al concepto de trabajo la importancia que hoy realmente tiene.

Cuando sobre un cuerpo elástico actúan fuerzas exteriores, ya en sus diferentes elementos, ya en la superficie límite, por ejemplo, la gravedad y presiones exteriores, todos los puntos del sistema cambiarán de posición, describirán caminos infinitamente pequeños, cuyas componentes serán precisamente u, v, w, y á cada uno de estos desplazamientos corres-

ponderán trabajos elementales, cuya suma total será el trabajo á que está sometido el sólido elástico.

Precisemos aún más las ideas, y fijémonos en el método de Lamé.

En este método el elemento infinitamente pequeño del sistema elástico, es un paralelepípedo, cuyas aristas hemos designado por dx, dy, dz.

Sobre las caras de este paralelepípedo actúan tensiones, que podemos suponer aplicadas á los centros de las caras: las componentes de estas tensiones son las que hemos designado por T_1, T_2, T_3, N_1, N_2, N_3.

Puesto que dichos puntos se mueven, á sus desplazamientos corresponderán, como acabamos de decir, trabajos elementales, cuya suma vamos á calcular, siguiendo el método que sigue Lamé en sus «Lecciones sobre la teoría matemática de la Elasticidad de los cuerpos sólidos».

Las tres ecuaciones fundamentales del equilibrio del paralelepípedo, hemos visto que son las siguientes:

$$\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} = 0,$$

$$\frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} = 0,$$

$$\frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} = 0,$$

para el caso en que no *existen fuerzas exteriores más que sobre la superficie;* es decir, en que se tiene

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Este es, en efecto, el único caso que por ahora vamos á considerar, que es el que considera Lamé.

Multiplicando cada una de las ecuaciones anteriores por $udxdydz$ la primera, y por $vdxdydz$ y $wdxdydz$ las

otras dos, sumando é integrando en toda la extensión del cuerpo, ó sea hasta las superficies límites, tendremos:

$$
\text{(T)}\quad
\begin{aligned}
&\int_{(3)}\left(\frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}\right)u\,dx\,dy\,dz+\\
&+\int_{(3)}\left(\frac{dT_3}{dx}+\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}\right)u\,dx\,dy\,dz+\\
&+\int_{(3)}\left(\frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_3}{dz}\right)w\,dx\,dx\,dz=0,
\end{aligned}
$$

en que hemos representado por $\int_{(3)}$ la integral triple respecto á x, y, z, según costumbre.

Cada una de las integrales anteriores puede integrarse, desde luego, respecto á una de las variables: que es integrar respecto á un filete paralelo á uno de los ejes coordenados.

Por ejemplo, la integral

$$\int_{(3)}\frac{dN_1}{dx}u\,dx\,dy\,dz,$$

puede escribirse de este modo:

$$\int_{(2)}u\,dy\,dz\int\frac{dN_1}{dx}dx$$

é integrando por partes respecto á x, y representando por N'_1, N''_1 los valores de N_1 en las dos extremidades del filete paralelo á las x, lo cual supone, para simplificar, que dicho filete sólo corta á la superficie límite en dos puntos; y asimismo por u', u'' los valores de u en ambos puntos extremos, resultará por fin:

$$
\begin{aligned}
\int_{(3)}\frac{dN_1}{dx}u\,dx\,dy\,dz=&\int_{2)}(N'_1u'-N''_1u'')dy\,dz-\\
&-\int_{(3)}N_1\frac{du}{dx}dx\,dy\,dz.
\end{aligned}
$$

Esto mismo podemos hacer respecto á todos los demás términos de la integral.

Peró á la integral doble le podemos aplicar una simplificación, que ya hemos empleado antes introduciendo el elemento superficial ds de la superficie límite.

Si representamos por α, β, γ, los cosenos directores de la normal á dicho elemento ds, según vimos, se podrá substituir á $dydz$ sus valores $ds.\alpha, -ds'.\alpha'$ para ambos puntos extremos del filete, y podremos substituir los dos primeros términos por una sola integral doble extendida á toda la superficie límite s.

Tendremos, pues, que la expresión última podrá escribirse de este modo:

$$\int_{(2)} N_1 u\alpha . ds - \int_{(3)} N_1 \frac{du}{dx} dx\, dy\, dz.$$

Esto mismo podremos hacer para todas las demás integrales parciales, y tendremos sucesivamente:

$$\int_{(3)} \frac{dT_3}{dy} u dx dy dz = \int_{(2)} u dx dz \int \frac{dT_3}{dy} dy = \int_{(2)} dydz(T'_3 u' - T''_3 u'') -$$

$$- \int_{(3)} T_3 \frac{du}{dy} dx dy dz = \int_{(2)} T_3 u . \beta ds - \int_{(3)} T_3 \frac{du}{dy} dx\, dy\, dz,$$

$$\int_{(3)} \frac{dT_2}{dz} u\, dx\, dy\, dz = \int_{(2)} T_2\, u\gamma ds - \int_{(3)} T_2 \frac{du}{dz} dx\, dy\, dz,$$

$$\int_{(3)} \frac{dT_3}{dx} v\, dx\, dy\, dz = \int_{(2)} T_3\, v\alpha ds - \int_{(3)} T_3 \frac{dv}{dx} dx\, dy\, dz,$$

$$\int_{(3)} \frac{dN_2}{dy} v\, dx\, dy\, dz = \int_{(2)} N_2\, v\beta ds - \int_{(3)} N_2 \frac{dv}{dy} dx\, dy\, dz,$$

$$\int_{(3)} \frac{dT_1}{dz} v\, dx\, dy\, dz = \int_{(2)} T_1\, v\gamma ds - \int_{(3)} T_1 \frac{dv}{dz} dx\, dy\, dz,$$

$$\int_{(3)} \frac{dT_2}{dx} w\,dx\,dy\,dz = \int_{(2)} T_2\, w\alpha ds - \int_{(3)} T_2 \frac{dw}{dx}\, dx\,dy\,dz,$$

$$\int_{(3)} \frac{dT_1}{dy} w\,dx\,dy\,dz = \int_{(2)} T_1\, w\beta ds - \int_{(3)} T_1 \frac{dw}{dy}\, dx\,dy\,dz,$$

$$\int_{(3)} \frac{dN_3}{dz} w\,dx\,dy\,dz = \int_{(2)} N_3\, w\gamma ds - \int_{(3)} N_3 \frac{dw}{dz}\, dx\,dy\,dz.$$

Substituyendo este valor en la ecuación (T) obtendremos, sacando u, v, w y ds, factores comunes en el primer grupo, y $dxdydz$ en el segundo

$$\int_{(2)} \Big[(N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma)\,u + (T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma)\,v + \\ + (T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma)\,w \Big] ds - \\ - \int_{(3)} \Big[N_1 \frac{du}{dx} + N_2 \frac{dv}{dy} + N_3 \frac{dw}{dz} + T_1 \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) + \\ + T_2 \left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right) + T_3 \left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} \right) \Big] dx\,dy\,dz = 0.$$

Pero hemos visto que los coeficientes de u, v, w son precisamente las componentes Pl, Pm, Pn de la fuerza P, que actúa en la superficie sobre la unidad del elemento ds; representándolos, para abreviar, por P_x, P_y, P_z, y pasando la integral triple al segundo miembro, la última ecuación se convertirá en

$$\int_{(2)} (P_x u + P_y v + P_z w)\, ds = \\ = \int_{(3)} \Big[N_1 \frac{du}{dx} + N_2 \frac{dv}{dy} + N_3 \frac{dw}{dz} + T_1 \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) \\ + T_2 \left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right) \\ + T_3 \left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} \right) \Big] dxdydz.$$

Veamos la significación del primer miembro.

Sea S (fig. 48) la superficie límite del cuerpo elástico.

M un punto cualquiera de dicha superficie.

En este punto consideramos una área infinitamente pequeña ds; sobre esta área y por unidad de superficie supondremos que actúa una fuerza exterior, por ejemplo, una presión P.

Sus componentes las hemos designado por P_x, P_y, P_z.

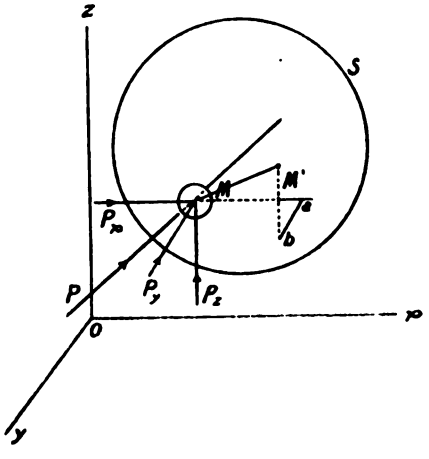


Figura 48.

Por efecto de la deformación, bajo la acción de estas fuerzas que actúan sobre la superficie, y que hemos supuesto que sean las únicas que obran sobre el sistema, el punto M experimentará un desplazamiento $M\,M'$, cuyas componentes serán,

$$M\,a = u,$$
$$a\,b = v,$$
$$M'\,b = w.$$

Ahora bien, considerando un elemento de la integral doble del primer miembro, y tomando la fuerza por unidad de superficie,

$$P_x u + P_y v + P_z w,$$

vemos, desde luego, que todos sus términos representan el producto de una fuerza por un camino.

Así $P_x u$ es el producto de la componente P_x por el camino $Ma = u$, es decir, un trabajo, el trabajo de la fuerza P_x, si ésta se conserva constante durante toda la deformación.

Lo mismo podemos decir respecto al término $P_y v$: será el trabajo de dicha fuerza P_y correspondiente á la deformación v, según su dirección.

Y otro tanto puede repetirse respecto al término $P_z w$.

Suponiendo siempre que las fuerzas son constantes.

Y como se sabe por mecánica racional, que el trabajo de la resultante es igual á la suma de los trabajos de sus componentes rectangulares, resulta que el elemento

$$(P_x u + P_y v + P_z w)\, ds$$

de la integral doble representará el trabajo de la fuerza Pds.

El teorema que hemos citado es evidente, porque

$$\cos(P, MM') = \frac{P_x u + P_y v + P_z w}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = \frac{P_x u + P_y v + P_z w}{P \,.\, MM'}$$

ó bien

$$P \,.\, MM' \cos(P, MM) = P_x u + P_y u + P_z w,$$

en que el primer miembro es el producto de la fuerza P por el camino MM' proyectado sobre dicha fuerza.

De aquí resulta, que la integral doble del primer miembro, suponiendo que las fuerzas exteriores P permanezcan constantes, representa el trabajo que dichas fuerzas ejercen sobre toda la superficie del sólido elástico trabajo durante la deformación; trabajo que, como veremos, en virtud de dichas deformaciones, se transmitirá á todo el sólido.

Mr. Lamé dice que esta expresión representa *el doble del expresado trabajo*, y sin duda se funda en lo siguiente:

Si desde que empieza la deformación, las fuerzas P tuvieran un valor constante, igual al definitivo, las reacciones elásticas, que al principio serían muy pequeñas, hasta que la deformación no llegase á cierto estado, no podrían equilibrar el trabajo de las P; por lo tanto, las masas adquirirían determinada fuerza viva, y el problema no sería ya de equilibrio elástico, sino de vibración.

Por este motivo se puede suponer que las fuerzas P empiezan por *cero,* y en cada instante tienen una intensidad igual á la reacción elástica; de suerte que sólo al fin de la deformación alcanzan el valor P de equilibrio que hemos supuesto.

Esto se ve con claridad en la figura 49.

F.ª 49.

Sean a y b dos moléculas en equilibrio y, por lo tanto, á la distancia r_o, definida por la ecuación $f(r_o)=0$, en que f representa la fuerza en función de la distancia.

La fuerza P actúa sobre b, procurando, por ejemplo, el estiramiento.

Cuando b llegue á d, representando bd por x, la fuerza elástica será

$$f(r_o+x)=f(r_o)+f'(r_o)x=f'(r_o)x=Ex;$$

habiendo para ello desarrollado por la serie de Taylor, habiendo suprimido el primer término, que es nulo, no apreciando más que el segundo y representando por E la constante $f'(r_o)$.

El trabajo resistente de la fuerza elástica, al describir el punto el elemento d, trabajo que es igual al de la fuerza P en este momento, será

$$Exdx.$$

Si suponemos que al llegar la molécula b al punto c, la fuerza P ha adquirido todo su valor y no sigue creciendo en

este punto, se detendrá la deformación, y representando bc por x_1 tendremos:

$$P = Ex_1.$$

Ahora bien; integrando el trabajo elemental entre b y c, se tendrá,

$$\int_0^{x_1} Exdx = \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^{x_1} = E\,\frac{x_1{}^2}{2} = Ex_1\,\frac{x_1}{2},$$

Y como Ex_1 es igual á P, el trabajo de la fuerza P actuando por grados y en constante equilibrio será:

$$\frac{Px_1}{2};$$

luego Px_1 es el doble del trabajo efectuado, como habíamos dícho y supone Lamé.

***

Resulta de lo expuesto que la integral doble del primer miembro representa el doble del trabajo que las fuerzas que actúan sobre la superficie ejercen en el sistema elástico.

El segundo miembro será, por lo tanto, otra forma del mismo trabajo mecánico, expresado en función de todas las deformaciones del sistema y extendiéndose á todos los elementos, porque, en efecto, es una integral triple.

Se comprende, *à priori*, que el trabajo que se efectúa sobre la superficie se extenderá á todo el sólido y que cada paralelepípedo elemental recibirá una parte de este trabajo, y almacenará, por decirlo así, una porción de la energía que el trabajo exterior representa: son los paralelepípedos elementales, á modo de resortes, que las fuerzas exteriores ponen en tensión.

Esto puede comprobarse: en efecto, sea (fig. 50) $MABC$ un paralelepípedo elemental del interior del sólido elástico; pues bien, el elemento de la integral triple del segundo miembro representa el trabajo de todas las fuerzas ó, en este caso, tensiones, que actúan sobre dicho paralelepípedo, ó en rigor, por lo que antes explicábamos, el doble de dicho trabajo.

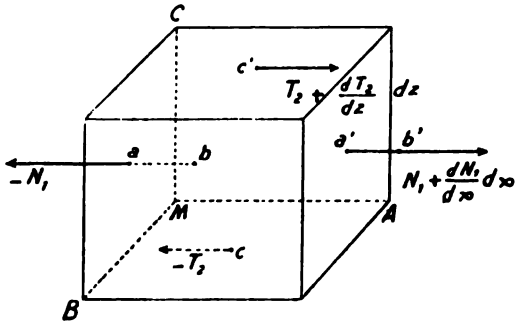


Figura 50.

Para demostrarlo, consideremos cada uno de los términos del elemento diferencial.

El primero es

$$N_1 \frac{du}{dx} dx\, dy\, dz = N_1\, dz\, dy \frac{du}{dx} dx,$$

y es fácil ver que esta expresión representa el trabajo resultante de la fuerza N sobre las dos caras opuestas, á saber, BC y la paralela que pasa por A, según se indica en la figura.

Si ab representa el desplazamiento paralelamente al eje x, del punto a, que siempre lo hemos representado por u, tendremos para el trabajo de la fuerza $-N_1$

$$-N_1 dy\, dz \times u.$$

Del mismo modo para la cara opuesta, en que N_1 y u ha-

brán variado por el incremento dx de la variable x, tendremos

$$\left(N_1 + \frac{dN_1}{dx}\,dx\right)\left(u + \frac{du}{dx}\right)dy\,dz.$$

Advirtiendo, que los desplazamientos v, w son normales á N_1 y el trabajo correspondiente es nulo.

Luego el trabajo resultante de estas dos fuerzas será,

$$\left[\left(N_1 + \frac{dN_1}{dx}\,dx\right)\left(u + \frac{du}{dx}\right)dx - N_1 u\right]dy\,dz,$$

ó bien

$$\left(N_1 u + \frac{dN_1}{dx}\,dx\,u + N_1\frac{du}{dx}dx + \frac{dN_1}{dx}\,\frac{du}{dx}\,dx^2 - N_1 u\right)dz\,dy$$

y simplificando y despreciando el término infinitamente pequeño de quinto orden

$$\frac{dN_1}{dx}\,\frac{dv}{dx}\,dx^2\,dy\,dz,$$

y decimos de quinto orden, porque $\frac{dv}{dx}$ es muy pequeña, tendremos para el trabajo de las fuerzas paralelas al eje de las x y, por lo tanto, perpendiculares al plano de las yz:

$$\left(N_1\frac{du}{dx}dx + \frac{dN_1}{dx}\,dx\,.\,u\right)dy\,dz. \qquad (1')$$

Conservamos ambos términos, porque ambos contienen dx, y además u y $\frac{du}{dx}$ son cantidades muy pequeñas que pueden ser del mismo orden.

Consideremos ahora el término

$$T_2 \frac{du}{dz} dx\, dy\, dz.$$

Para llegar á él, veamos cuál es el trabajo de las fuerzas paralelas al eje de las x que actúan sobre la cara superior é inferior.

Sobre la cara inferior, y en su centro, actúa paralelamente al eje de las x, como tantas veces hemos explicado la componente por unidad de superficie $-T_2$. Para determinar el trabajo que desarrolla, supondremos que está aplicada en el centro c de dicha cara y que el desplazamiento de este punto paralelamente al eje de las x es u: con los desplazamientos v, w no hay que contar, porque son normales á $-T_2$.

En general: los desplazamientos de los centros de las tres caras que concurren en M, admitimos que son los mismos que en este punto M, es decir u, v, w. Y estos desplazamientos, al pasar á las caras paralelas, recibirán incrementos correspondientes á dx, dy, dz.

Esto es precisamente lo que hemos hecho antes con los centros a y a'.

De aquí resulta que, siendo $-T_2$ la fuerza aplicada en c, y siendo el camino recorrido u, el trabajo será

$$-T_2 u.$$

Decimos el trabajo con la salvedad que al principio explicamos; desde el punto de vista de Lamé, será el doble del trabajo.

En la cara superior la fuerza y el camino sufrirán incrementos correspondientes á dz, y tendremos

$$\left(T_2 + \frac{dT_2}{dz} dz\right)\left(u + \frac{du}{dz} dz\right).$$

Pues no ha de olvidarse que en ambas caras las tensiones tienen direcciones contrarias, según hemos explicado en muchas ocasiones.

Reuniendo los dos trabajos, y multiplicando por $dx\,dy$ para obtener la acción sobre el área de la cara, resultará,

$$\left[-T_2 u + \left(T_2 + \frac{dT_2}{dz} dz\right)\left(u + \frac{du}{dz} dz\right)\right] dx\,dy.$$

Desarrollando, simplificando y despreciando el término que contiene dz^2, tendremos

$$\left(T_2 \frac{du}{dz} dz + \frac{dT_2}{dz} dz\,u\right) dx\,dy. \qquad (2')$$

Otro tanto podemos decir respecto á las caras anterior y posterior, tomando la fuerza T_3 que es paralela al eje de las x y que corresponde también al camino u.

Veremos que este término nos da el $T_3 \frac{du}{dy}$ de la fórmula general.

Tendremos, en efecto, para el trabajo de las fuerzas paralelas al eje de las x en las caras posterior y anterior,

$$\left(T_3 \frac{du}{dy} dy + \frac{dT_3}{dy} dy\,u\right) dx\,dz. \qquad (3')$$

Sumando los valores (1′) (2′) (3′), resultará:

$$\left(N_1 \frac{du}{dx} + T_2 \frac{du}{dz} + T_3 \frac{du}{dy}\right) dx\,dy\,dz +$$

$$+ \left(\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_2}{dz} + \frac{dT_3}{dy}\right) u\,dx\,dy\,dz.$$

Observemos que la cantidad que multiplica á u, es decir,

$$\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_2}{dz} + \frac{dT_3}{dy},$$

es igual á cero en el caso actual, en que no existen fuerzas sobre los diferentes elementos del sólido: es precisamente el primer miembro de la primera de las ecuaciones de equilibrio, habiendo suprimido el término X.

No quedará, pues, más que la primera parte

$$\left(N_1 \frac{du}{dx} + T_2 \frac{du}{dy} + T_3 \frac{du}{dy}\right) dx\, dy\, dz,$$

que entra precisamente en el segundo miembro de la fórmula general del trabajo (T).

Repitiendo estos mismos razonamientos para las fuerzas paralelas á los otros dos ejes, obtendremos los demás términos de (T).

Queda, pues, comprobado que el segundo miembro expresa el mismo trabajo mecánico que el primero.

Este representa el trabajo de las fuerzas exteriores que actúan sobre la superficie. *El segundo miembro*, este mismo trabajo, distribuído en todo en sólido: cada elemento diferencial expresa el trabajo sobre cada paralelepípedo dx, dy, dz.

Si actuaren fuerzas sobre estos paralelepípedos, el trabajo de estas fuerzas debería ser tenido en cuenta, y entonces no podríamos anular el término

$$\left(\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_2}{dz} + \frac{dT_3}{dy}\right) u\, dx\, dy\, dz$$

y sus análogos; porque representarían precisamente dicho trabajo, como se ve substituyendo el paréntesis por su valor deducido de la ecuación de equilibrio.

Más claro; si existen fuerzas exteriores, al multiplicar las tres ecuaciones de equilibrio, que en este caso serán,

$$\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_2}{dz} + \frac{dT_3}{dy} + \rho X = 0,$$

$$\frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} + \frac{dT_3}{dx} + \rho Y = 0,$$

$$\frac{dN_3}{dz} + \frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \rho Z = 0,$$

por $udxdydz$, $vdxdydz$, $wdxdydz$, respectivamente, y al sumar é integrar después, aparecerá el nuevo término

$$\int_{(3)} (Xu + Yv + Zw)\rho\, dx\, dy\, dz,$$

el cual representa el trabajo total (ó, según Lamé, el doble) de las fuerzas exteriores X, Y, Z sobre todo el sólido elástico.

Repitiendo la operación que antes hicimos, es decir, verificando la integración parcial de cada término, tendremos en el primer miembro de (T) la expresión

$$\int_{(2)} (P_x u + P_y v + P_z w) ds + \int_{(3)} (Xu + Yv + Zw)\rho dxdydz,$$

que representa evidentemente el trabajo (ó el doble) de todas las fuerzas exteriores: las de la superficie y las que actúan en la masa.

El segundo miembro tiene la misma forma que antes, y también representa este trabajo total. Claro es que las T y las N, así como las u, v, w son distintas de las de la primera fórmula, y se refieren concretamente á este caso que estamos examinando.

Podemos comprobar, como antes, que dicho segundo miembro representa la suma de los trabajos transmitidos á

todos los elementos del sólido. Porque si bien es cierto que, calculando el trabajo de cada paralelepípedo elemental, aparecen los términos,

$$\left(\frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_2}{dz}+\frac{dT_3}{dy}\right)u\,dx\,dy\,dz;$$
$$\left(\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}+\frac{dT_3}{dx}\right)v\,dx\,dy\,dz;$$
$$\left(\frac{dN_3}{dz}+\frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}\right)w\,dx\,dy\,dz;$$

los cuales se convierten, substituyendo en vez de los paréntesis sus valores deducidos de las ecuaciones de equilibrio, en

$$-\rho X u\,dx\,dy\,dz,\quad -\rho Y v\,dx\,dy\,dz,\quad -\rho Z w\,dx\,dy\,dz,$$

también ha de advertirse que, al calcular el trabajo sobre cada paralelepípedo infinitamente pequeño, *debemos agregar el trabajo de las fuerzas exteriores sobre el centro de dicho paralelepípedo*, que son precisamente

$$+\rho X u\,dx\,dy\,dz,\quad +\rho Y v\,dx\,dy\,dz,\quad +\rho Z w\,dx\,dy\,dz.$$

Estas cantidades destruyen las anteriores, y el segundo miembro de la ecuación (T) queda como antes: el primer miembro es el que tiene un grupo más.

Resulta, pues,

$$\int_{(2)}(P_x u+P_y v+P_z w)\,ds+\int_{(3)}(Xu+Yv+Zw)\rho\,dx\,dy\,dz=$$
$$=\int_{(3)}\left[N_1\frac{du}{dx}+N_2\frac{dv}{dy}+N_3\frac{dw}{dz}+T_1\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)\right.$$
$$+T_2\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)$$
$$\left.+T_3\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right)\right]dx\,dy\,dz.$$

Sólo agregaremos á lo dicho que en el primer caso, el segundo miembro puede transformarse, como lo transforma Lamé, eliminando los coeficientes diferenciales, y resulta el teorema de Clapeyron.

***

Si el sistema de ejes es el que hemos llamado sistema principal, y, por lo tanto, T_1, T_2, T_3, son iguales á cero, el segundo miembro de la fórmula (T) se simplificará, y tendremos:

$$\int_{(2)} (P_x u + P_y v + P_z w)\, ds =$$

$$= \int_{(3)} \left(N_1 \frac{du}{dx} + N_2 \frac{dv}{dy} + N_3 \frac{dw}{dz} \right) dx\, dy\, dz.$$

Pero las ecuaciones que determinan N_1, N_2, N_3, son

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu \frac{du}{dx},$$

$$N_2 = \lambda\theta + 2\mu \frac{dv}{dy},$$

$$N_3 = \lambda\theta + 2\mu \frac{dw}{dz}.$$

Si ahora admitimos que el sistema sea incomprensible, es decir, empleando términos vulgares, que cualquier elemento infinitamente pequeño puede cambiar de forma, pero que el volumen que gana por una parte lo pierde por otra, la dilatación cúbica θ será nula, y tendremos

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Con lo cual las tres ecuaciones anteriores se reducen á

$$N_1 = 2\mu \frac{du}{dx}; \quad N_2 = 2\mu \frac{dv}{dy}; \quad N_3 = 2\mu \frac{dw}{dz}$$

de donde

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\mu} N_1, \quad \frac{dv}{dy} = \frac{1}{2\mu} N_2, \quad \frac{dw}{dz} = \frac{1}{2\mu} N_3$$

y substituyendo estos valores en la ecuación

$$\int_{(2)} (P_x u + P_y v + P_z u)\, ds =$$

$$= \int_{(3)} \left(N_1 \frac{du}{dx} + N_2 \frac{dv}{dy} + N_3 \frac{dw}{dz} \right) dx\, dy\, dz$$

resultará para el segundo miembro

$$\frac{1}{2\mu} \int_{(3)} (N_1^2 + N_2^2 + N_3^2)\, dx\, dy\, dz$$

que es el trabajo de cada elemento del sólido elástico, ó, como si dijéramos, *la energía que en él está almacenada.*

Esta fórmula es análoga á la de la energía almacenada en un campo eléctrico ó en un campo magnético, como veremos en otro curso.

Así, el valor de la energía eléctrica es

$$\int \frac{\varepsilon}{8\pi} (X^2 + Y^2 + Z^2)\, dx\, dy\, dz,$$

y el de energía magnética

$$\int \frac{\mu}{8\pi} (L^2 + M^2 + N^2)\, dx\, ay\, dz.$$

Quizá volveremos á insistir en estas consideraciones, sobre todo respecto al trabajo de X, Y, Z, al estudiar *una objeción gravísima*, que el eminente matemático Mr. Poincaré opone en su obra magistral sobre electricidad y magnetismo á la teoría electro-estática de Maxwell.

Pero ni debemos anticipar las ideas ni tenemos todavía en estas conferencias preparación para estudiar dicho problema.

II.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia undécima.

SEÑORES:

Anunciamos en la última conferencia, que para terminar el estudio de la Elasticidad por el método de Lamé, y para completar la primera parte de este curso, ya que hemos de dedicar la segunda, como hicimos en el curso anterior, á métodos más modernos, expondríamos brevemente las teorías de las *coordenadas curvilíneas* en su aplicación al estudio de los cuerpos elásticos.

En el sistema ordinario de coordenadas, y principalmente en el sistema trirrectangular, se toman como planos fijos tres planos, que se corten normalmente, y se determina cada punto por sus distancias octogonales á estos tres planos, distancias á que se da el nombre de *coordenadas*.

Así es, que un punto cualquiera M está definido y determinado por sus tres coordenadas

$$x = a,\ y = b,\ z = c.$$

Estas tres magnitudes a, b, c, que pueden ser positivas ó negativas, infinitamente pequeñas ó infinitamente grandes, pero siempre reales, fijan, sin duda de ningún género, la posición del punto M, según se explica detalladamente en Geometría analítica.

Pero las tres ecuaciones anteriores pueden interpretarse también de otro modo, que es el que ahora nos interesa considerar.

En realidad $x = a$ representa un plano paralelo al plano coordenado de las yz; porque, en efecto, todos los puntos de dicho plano distan del plano coordenado y z la magnitud constante a.

Del mismo modo $y = b$ representa un plano paralelo al de las xz á la distancia b de éste.

Y por último, $z = c$ análogamente representa un plano paralelo al de las xy, y distante del mismo c.

Luego también podemos decir, que el punto M está determinado por la intersección de *tres superficies*, que en este caso son tres planos, y que están definidos por las ecuaciones

$$x = a,\ y = b,\ z = c.$$

Este sistema de representación es el más elemental, el más sencillo casi siempre; pero con ser tan sencillo, á veces trae complicaciones, que pueden evitarse acudiendo á otros métodos de representación analítica ó geométrica.

Entre todos ellos está el de los coordenadas curvilíneas, en que ahora vamos á ocuparnos.

Pero sigamos todavía con nuestros tres planos trirrectangulares, cuyas intersecciones son los tres ejes x, y, z.

Por el punto M, cuya posición queremos definir, hagamos pasar una superficie referida á los tres ejes x, y, z fundamentales.

Representará la ecuación referida á x, y, z, de esta super-

ficie, que, por ahora, suponemos completamente arbitraria,

$$F_1(x, y, z) = a,$$

siendo a una constante.

Que esto puede hacerse geométricamente, es evidente.

Que puede hacerse analíticamente, también lo es; porque basta que demos á a el valor $F_1(x_0, y_0, z_0)$, siendo x_0, y_0, z_0 las coordenadas ordinarias del punto M, para que la superficie F_1 pase por M.

En efecto, la ecuación de la superficie, poniendo por a su valor, tendrá la fórmula

$$F_1(x, y, z) = F_1(x_0, y_0, z_0);$$

y esta ecuación en que las variables están en el primer miembro, desde luego se ve que pasa por el punto M; puesto que si en vez de x, y, z se ponen las coordenadas de dicho punto, la ecuación queda satisfecha, como que se reduce á una identidad

$$F_1(x_0, y_0, z_0) = F_1(x_0, y_0, z_0).$$

Del mismo modo que hemos hecho pasar por el punto M la superficie F_1, podemos hacer pasar otra segunda superficie cuya ecuación sea

$$F_2(x, y, z) = b,$$

determinando b de la misma manera que hemos determinado a.

Y por último, aún podemos hacer pasar otra tercera superficie

$$F_3(x, y, z) = c,$$

escogiendo convenientemente el valor de c.

Las tres ecuaciones $F_1 = a$, $F_2 = b$, $F_3 = c$ para cada

sistema de valores a, b, c, determinan evidentemente un punto, que será en coordenadas ordinarias el que corresponda á los valores x, y, z que satisfagan á dichas tres ecuaciones.

Y podrá decirse también, que las coordenadas del punto son a, b, c. Haciendo variar estas cantidades se podrán representar todos los puntos del espacio.

En efecto, como antes decíamos, si x_0, y_0, z_0 son las coordenadas de este punto, substituyendo en las tres ecuaciones $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, los valores que resulten para a, b, c serán las tres coordenadas, que pudiéramos llamar *curvilíneas,* del punto en cuestión.

Por lo demás, en la práctica claro es que F_1, F_2, F_3 no podrán escogerse arbitrariamente, porque resultarían multiplicidad de puntos ó puntos imaginarios.

Por lo general estas superficies, es decir, las representadas por cada ecuación parcial, son ortogonales, es decir, que se cortan en ángulo recto en todos sus puntos, dividiendo al espacio en algo así como paralelepípedos rectos y rectangulares infinitamente pequeños.

Mas por hoy es imposible que tratemos esta cuestión en toda su generalidad. Nos contentaremos con estudiar algunos casos particulares, que tienen aplicación inmediata á la teoría de la Elasticidad, y que por ser elementales tienen cabida en estas conferencias.

Por lo demás, es claro, que cada una de las ecuaciones expresadas, por ejemplo

$$F_1 (x, y, z) = a,$$

para cada valor de a representa una superficie perfectamente definida, si lo está F; y haciendo variar a por la ley de continuidad, obtendremos *una serie de superficies* que constituirán en cierto modo *una familia geométrica* con caracteres comunes, bien determinados, y con propiedades que se deducirán de la forma de F.

Así, en el sistema ordinario de coordenadas, $x = a$, ha-

ciendo variar a representa una serie de planos paralelos al de las yz; y las otras dos ecuaciones, $x = b$, $x = c$, representan asimismo dos familias ó dos sistemas de planos paralelos, ya al plano de las xz, ya al de las xy.

Sus intersecciones dividen al espacio en un sistema de paralelepípedos rectos y rectángulos y los puntos están determinados, ya por las intersecciones de los planos de los tres sistemas, ya por las coordenadas, que son, por decirlo así, fragmentos de las expresadas intersecciones.

Todo esto puede repetirse para el caso general de tres superficies:

$$F_1 = a, \; F_2 = b, \; F_3 = c.$$

También aquí cada punto puede definirse, ó por la *intersección de tres superficies*, ó por *las longitudes de sus líneas de intersección*, que serían las verdaderas *coordenadas* curvilíneas.

Pasemos de estas generalidades á ejemplos ó casos concretos.

Nos proponemos en estas conferencias que siguen, y que constituyen la primera parte del presente curso, nos proponemos, repito, estudiar dos sistemas de coordenadas curvilíneas: *las llamadas coordenadas cilíndricas* y las que se designan con el nombre de *coordenadas esféricas.*

***

¿Y por qué, preguntará el lector, estando ya resuelto, al menos en teoría y en ecuaciones relativamente sencillas, el problema, se trata de acudir á otro sistema, que aun antes de estudiarlo, se sospecha que ha de ser mucho más complicado que el sistema ordinario de planos trirrectangulares?

En primer lugar, este sistema de coordenadas no sólo se ha introducido en el análisis para la resolución del problema de la Elasticidad, sino para otros problemas y ramas de la

Física matemática, como, por ejemplo, para el estudio del calor y de su distribución, equilibrio y movimiento en los cuerpos conductores.

Y aun en la misma teoría de los cuerpos elásticos puede ser cómoda su aplicación para ciertos casos y determinados ejemplos.

Claro es que, para expresar el equilibrio en un sistema elástico indefinido y aun en un sólido elástico limitado, pero siempre refiriéndonos á su interior, nada hay más cómodo, más elemental, más sencillo, que el paralelepípedo clásico é infinitamente pequeño de aristas paralelas á los ejes.

Las tres ecuaciones que resultan y que obtuvimos en las conferencias anteriores, sobre todo para los sistemas isótropos, son, en esta materia, la última expresión de la sencillez, con ser difíciles de integrar si entran las componentes X, Y, Z de fuerzas exteriores y son variables de un punto á otro.

En cualquier otro sistema, las ecuaciones que substituyen á éstas tres han de ser mucho más complicadas.

De suerte que, si el sistema elástico es indefinido, la elección no es dudosa.

Pero si se trata de un sólido limitado por determinadas superficies, el problema cambia de aspecto.

Porque el problema de la Elasticidad, según hemos dicho, y no está demás repetirlo frecuentemente, para que se grabe en mis oyentes ó en mis lectores, se expresa por *seis ecuaciones*.

Las *tres primeras* expresan el equilibrio de un punto en el interior del sistema.

Las otras *tres* expresan el equilibrio de un punto cualquiera de la superficie límite.

Para las primeras basta el paralelepípedo; y no representan otra cosa que el equilibrio de este sólido, infinitamente pequeño, bajo la acción de las tensiones que actúan sobre sus diferentes caras y de la fuerza exterior que actúe sobre su masa.

Mas para el equilibrio de los puntos de la superficie, es preciso substituir al paralelepípedo el *tetraedro de Cauchy,* y esto complica el problema, porque son nuevas ecuaciones diferenciales que integrar, y en general, complicadas.

De suerte que, si hemos obtenido facilidad relativa para el equilibrio en el interior del cuerpo elástico, en cambio será más difícil satisfacer á las *condiciones,* que se llaman *de los límites.*

Precisamente para simplificar esta parte del problema se aplican las coordenadas curvilíneas.

Porque ya no habrá que aplicar el tetraedro, si dichas coordenadas se han escogido convenientemente; es decir, si dicha superficie límite del cuerpo pertenece á una de las familias $F =$ constante á que antes nos referíamos.

Porque en este caso, volvemos á repetirlo, la ecuación de la superficie no será en general

$$F(x, y, x) = 0,$$

sino que será mucho más sencilla. Si una de las coordenadas curvilíneas es ρ, la ecuación de la superficie será

$$\rho = \text{constante}.$$

De modo que en las ecuaciones que expresen el equilibrio de un punto de la superficie, ecuaciones que, como sabemos, son en diferenciales parciales de primer orden de *tres* funciones u, v, w, y sólo de *dos* variables independientes, deberemos igualar la tercera variable á una constante, lo cual simplificará las ecuaciones que consideramos.

***

Presentemos algunos ejemplos.

Supongamos que el sólido elástico está terminado por un cilindro de revolución, cuyo eje sea el eje de las z.

Pues en este caso, una sola variable determina todos estos cilindros.

Basta dar la magnitud del radio de la sección recta de cualquiera de ellos para que quede completamente definido.

Si representamos por ρ este radio, la ecuación de un cilindro de revolución alrededor del eje de las z, será

$$\rho = a;$$

representando a una constante.

Supongamos que el cilindro que termina el sólido elástico tiene por radio R, pues la ecuación de la superficie límite será evidentemente

$$\rho = R.$$

Y en las tres ecuaciones, que expresan el equilibrio de un punto cualquiera de la superficie, deberemos poner, en vez de la variable ρ, la constante R, lo cual representa una simplificación notable.

***

Supongamos, como segundo ejemplo, que el sólido elástico está terminado por una superficie esférica de radio R; pues eligiendo entre las superficies coordenadas, esferas concéntricas con la anterior, cualquiera de ellas estará definida por su radio r; y la ecuación de una esfera cualquiera de esta familia de superficies, será,

$$r = a,$$

siendo a una constante para cada esfera.

Cuando queramos expresar la esfera límite, no hay más que dar á a el valor R y resultará

$$r = R.$$

En las ecuaciones del equilibrio de la superficie, del mismo modo que hacíamos para el caso del cilindro, en vez de la variable r deberemos poner la constante R, con lo cual se simplificarán los resultados.

***

Otro ejemplo más, y será el último.

Supongamos que la superficie límite es un elipsoide de revolución.

Si fijamos los focos de este elipsoide, que llamaremos F y F', la suma de las distancias de un punto cualquiera del elipsoide á estos dos focos será constante: supongamos que es s.

Si construímos una serie de elipsoides de revolución, que tengan estos mismas focos, subsistirá la propiedad del elipsoide de la superficie, pero variará la suma de las distancias focales: para uno cualquiera, podremos representarla por s, siendo s una variable, y bien puede decirse, que la ecuación general de esta familia de superficies elípticas y de revolución es

$$s = a.$$

Si queremos que exprese la ecuación límite, basta que demos á a el valor S.

Y de este modo podríamos prolongar la serie de los ejemplos indefinidamente. El caso es que cada familia de superficies de los tres grupos, que definen cada punto, contenga una sola constante.

***

Este sistema de coordenadas curvilíneas, ó que pueden reducirse á coordenadas curvilíneas, determinando las intersecciones de los tres grupos de superficies, del mismo modo que en el sistema ordinario se reducen á tres rectas ó coor-

denadas los sistemas de los tres planos fundamentales; este sistema de coordenadas, repetimos, tiene un inconveniente grave.

A saber: que cada sistema no sirve más que para un caso, y cuando más, en ese caso es en el que presenta algunas ventajas.

En otro ejemplo hay que variar el sistema de coordenadas.

Así, cuando el sólido elástico está terminado por una superficie cilíndrica de revolución se podrá aplicar el sistema que se llama *cilíndrico.*

Cuando el sólido elástico está terminado por una esfera podrá emplearse el sistema de coordenadas *esféricas.*

Si la superficie límite del sistema elástico fuera un elipsoide de revolución, como antes decíamos, podrá emplearse también un sistema de coordenadas elíptico.

Pero siempre conviene, casi es condición indispensable para evitar enormes complicaciones, que la superficie límite forme parte de una de las tres familias de superficies, que adoptemos para determinar la posición de cada punto.

Para concretar estas ideas generales, sólo presentaremos en este curso, como hemos dicho, dos ejemplos: el de las coordenadas cilíndricas y el de las coordenadas esféricas, empezando por las primeras.

Sistema de coordenadas cilíndricas.

Sean OX, OY, OZ (fig. 51), tres ejes coordenados de un sistema trirrectangular.

Consideremos un punto cualquiera M, y vamos á definirlo, haciendo pasar por ese punto tres sistemas de superficies.

Primer sistema.—Cilindros de revolución alrededor del eje OZ. El que pasa por el punto M, está representado en la figura por $AA'MB'B$. Su radio es r, que será en la figura $OA = OM' = O'M$.

Para otro punto cualquiera del espacio la variable r será distinta.

Podemos decir, que la ecuación de este sistema de superficies, tiene la forma

$$r = a,$$

en que r es la variable, y a la constante que caracteriza cada superficie cilíndrica de revolución.

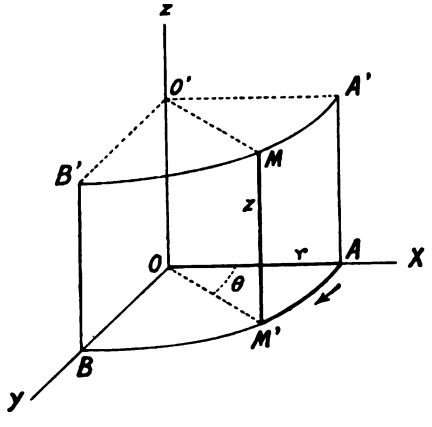


Figura 51.

Claro es que en la figura sólo hemos representado una parte de esta superficie.

En coordenadas ordinarias la ecuación de dicha superficie sería

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Segundo sistema.—Planos perpendiculares al eje de las Z, por lo tanto, paralelos al de las XY.

En la figura hemos representado el plano que pasa por M, que corta al cilindro, según el círculo $A'MB'$, y que está limitado en dicha figura por el contorno $O'A'MB'$.

La ecuación de este plano, que dista del de las XY la longitud z, que es siempre la misma, será

$$z = b.$$

Según el valor que demos á b, representará planos distintos paralelos al de las XY.

Tercer sistema.—Se compone de planos meridianos que pasan por el eje OZ. Por ejemplo: para el punto M será el plano $OO'MM'$.

Se determinará su posición por el ángulo que forma con el plano XZ, ó sea el ángulo AOM' que hemos representado por θ.

De suerte, que la ecuación de un plano cualquiera de este sistema, será

$$\theta = c,$$

en que c varía desde 0 á 180 y se cuenta á partir de OA en el sentido de la flecha.

Claro es que θ, en rigor, no se mide por grados, aunque puede reducirse á grados. Es *una longitud:* la de un arco de círculo, cuyo radio es 1 y que está comprendido entre OA y OM'.

***

Así, pues, resumiendo: un punto cualquiera M del espacio está definido por estas tres ecuaciones

$$r = a,\ z = b,\ \theta = c$$

que representan un cilindro de radio OA; un plano paralelo al de las XY á la distancia z, y un plano meridiano que forma con el plano XZ un ángulo θ.

Estas tres superficies se cortan según tres líneas: $O'M$, MM' y MA'.

Puede decirse que las coordenadas del punto M son (figura 52): MM' paralela al eje de las Z; MO' que es un radio del cilindro, y MA' que es un arco de la sección recta de dicho cilindro.

Estas tres líneas están representadas por las mismas letras en la figura 51, y suplen, en cierto modo, á las coordenadas

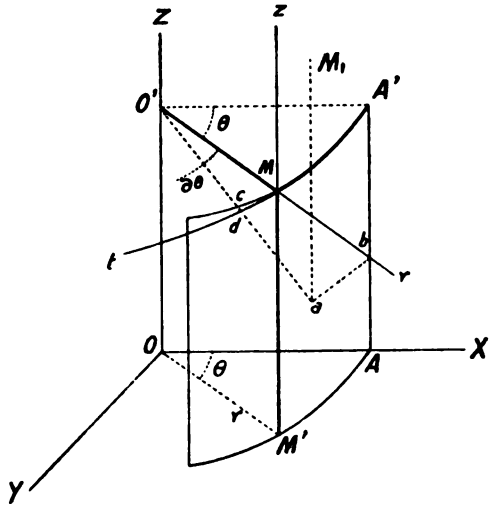


Figura 52.

ordinarias x, y, z en el sistema de tres planos trirrectangulares.

Sería inútil decir, que la r suple á la x; el arco á la y y la z es la misma para ambos sistemas.

Antes hemos dicho que las tres coordenadas en el sistema cilíndrico eran,

$$r, \theta, z.$$

Pero tanto da considerar la θ como el arco MA', porque

ambas coordenadas están enlazadas evidentemente por la relación

$$\text{arco } MA' = r\theta.$$

Una última observación, para terminar estas consideraciones generales.

Los tres sistemas de superficies se cortan normalmente en todos sus puntos.

Por ejemplo, el plano $B'MA'O'$ (fig. 51), corta normalmente al cilindro $AA'BB'$, puesto que es su sección recta, y corta normalmente al plano meridiano $OM'MO'$, puesto que éste pasa por OZ, que es perpendicular al primer plano.

Asimismo el plano meridiano OM corta normalmente al cilindro, y ya hemos visto que al plano de la sección recta.

Por último, el cilindro corta normalmente al plano meridiano y al plano de la sección recta.

De aquí resulta (fig. 52) que si prolongamos la recta $O'M$ según Mr; si prolongamos asimismo $M'M$ según Mz, y si trazamos en M la tangente Mt al arco $A'M$, estas tres rectas, Mr, Mt, Mz, formarán un triedro trirrectángulo y constituirán un sistema de ejes trirrectangulares cuyo vértice estará en M.

Más adelante nos serviremos de este sistema auxiliar de ejes coordenados.

Hemos definido la posición de cada punto del espacio en coordenadas cilíndricas ó semipolares, como dicen algunos autores.

Ahora debemos definir los desplazamientos de cada punto del sistema elástico.

Componentes de un desplazamiento.

Consideremos un punto M de un sistema elástico (fig. 52).

Este punto estará definido, como hemos visto, por sus tres coordenadas MO', MA', MM' ó, si se quiere, por

$$r, \theta, z,$$

porque hemos indicado que tanto da conocer la magnitud de MA' como el ángulo θ.

Supongamos, que por la acción de las fuerzas que actúan sobre el sistema elástico, el punto M se desplaza y viene á parar á M_1.

Hay que fijar la posición de este punto.

Al pasar M á M_1 sus coordenadas cilíndricas ya no serían las mismas que antes, y lo natural sería definir M_1 por sus nuevas coordenadas ó por la diferencia entre éstas y las de dicho punto antes de la deformación.

Esto hacíamos en el sistema ordinario x, y, z, representando por u, v, w tales diferencias.

De suerte, que si eran x, y, z las coordenadas del punto M en su primitiva posición, las coordenadas en su posición nueva M_1 serían

$$x + u, y + v, z + w.$$

Pues análogamente, y siguiendo este sistema, y representando por δ la variación de la magnitud á que afecta, si las coordenadas del punto M eran

$$r, \theta, z,$$

las del punto M_1 deberían ser

$$r + \delta v, \ \theta + \delta\theta, \ z + \delta z.$$

En rigor esto haremos; pero con una pequeña modificación, que simplifica los cálculos.

Referiremos el punto desplazado M_1 al sistema de ejes trirrectangulares $Mrtz$, de que hablamos antes; y para definir dicho punto tomaremos las tres coordenadas ordinarias respecto á los ejes r, t, z que serán Mb, ba, aM_1, las cuales representaremos por las letras U, V, W, de suerte que tendremos

$$Mb = U, ba = V, aM_1 = W.$$

Son las mismas letras u, v, w, que expresaban en el sistema ordinario las componentes de un desplazamiento, pero mayúsculas para evitar confusiones.

Observemos que $Mb = U$ está en la recta Mr, de modo que el incremento de $O'M$, es en rigor dr, al pasar del punto M al punto M_1.

$aM_1 = W$ es el incremento de MM', es decir, que se confunde con dz.

No podemos decir lo mismo de $ab = V$ porque éste no es el incremento de θ.

Sin embargo, con él se relaciona de una manera muy sencilla.

Si unimos el punto a con el punto O' por la recta aO', y designamos por d, c los puntos de intersección de esta recta con la tangente t y con el arco $A'M$, tendremos que ab podrá considerarse como un arco trazado desde O' como centro; y representando por $d\theta$ el ángulo $bO'a$ resultará:

$$ab = arc.ab = d\theta.O'b = d\theta\,(O'M + Mb) =$$
$$= d\theta\,(r + Mb) = rd\theta + d\theta.Mb;$$

y como el último término es de segundo orden, con errores infinitamente pequeños de orden superior, podremos suponer

$$ab = V = Mc = Md = rd\theta.$$

En suma, las tres componentes del desplazamiento de M, al pasar á M_1, serán

$$M_1a = W = dz,\ Mb = dU,\ V = rd\theta.$$

Importa fijar bien las ideas respecto á la magnitud cd que se sabe, y es una noción elemental, que es de segundo orden, si Md es de primero.

En efecto, y permítasenos que recordemos este punto, por

sencillo que sea. En la figura 52′, que es la misma $O'Mcd$ que en la figura 52, pero en mayor escala, se sabe que

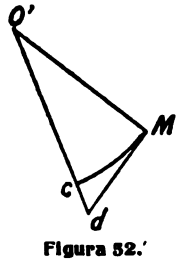


Figura 52.′

$$Md^2 = (2O'c + cd)\,cd,$$

de donde

$$cd = \frac{Md^2}{2O'c + cd};$$

y como Md es de primer orden, y el denominador es una cantidad finita, cd será evidentemente de segundo orden.

Esta es una trivialidad; pero conviene recordarla por lo que luego indicaremos.

***

Hemos definido un punto en coordenadas cilíndricas, que son:

$$r,\ \theta,\ z.$$

Hemos definido las componentes de un desplazamiento, que las hemos representado por

$$U,\ V,\ W.$$

Debemos ahora definir en estas coordenadas el *elemento de volumen* en el interior de un sólido elástico, que es el que ha de substituir al paralelepípedo elemental, empleado en el sistema de coordenadas ordinarias.

En este sistema, dicho paralelepípedo se formaba considerando un par de planos paralelos al de las xy, distantes entre sí dz; otro par de planos paralelos al de las xz, distantes dy; y otro tercer par de planos paralelos al de las yz, cuya distancia era dx.

Abreviadamente, el paralelepípedo se formaba por tres

pares de superficies infinitamente próximas, dos á dos, y pertenecientes á las tres familias de superficies:

$$z = c,$$
$$y = b,$$
$$x = a.$$

Pues ahora tenemos que seguir exactamente el mismo procedimiento.

Como aquí, las superficies son *cilindros* de revolución al-

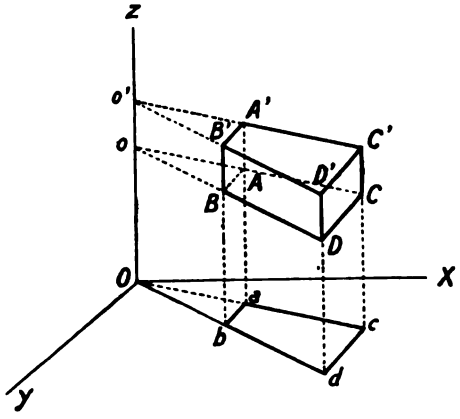


Figura 53.

rededor del eje de *Z; planos meridianos*, que pasan por dicho eje, y *planos perpendiculares*, al mismo, el sólido elemental se formará por dos cilindros distantes dr, dos planos meridianos formando el ángulo $d\theta$, y dos planos perpendiculares á Z, distantes dz.

Esto es lo que hemos representado en la figura 53.

Las rectas OX, OY, OZ, son tres ejes fijos de referencia.

OZ es el eje del sistema.

El sólido AD' infinitamente pequeño, y que es un elemento del sólido elástico, está formado:

1.° Por dos planos $ABDC$, $A'B'D'C'$ paralelos al plano de las XY, y, por lo tanto, perpendiculares al eje Z, al cual cortan el primero en 0, el segundo en 0'

2.° De dos planos meridianos $BDB'D'$, $ACA'C'$.

3.° Por dos cilindros $ABA'B'$ $CDD'C'$: son cilindros de revolución y su eje es OZ.

Los planos perpendiculares á Z, distan entre sí dZ, de suerte que AA', BB', DD', CC' y 00' son todas iguales á dZ.

Los planos meridianos cuyas trazas sobre el plano XY son Oc, Od, forman un ángulo $d\theta$.

Por último, los cilindros tienen por radio

$$Oa = r \text{ y } Oc = r + dr,$$

de suerte que los cilindros distan entre sí dr.

Todo esto está conforme con lo que se estableció en las coordenadas ordinarias.

El sólido elemental $A'D$ que acabamos de definir tiene sus ángulos triedros rectos, según explicamos anteriormente.

Se proyectará sobre el plano de las XY, según el trapecio circular $abdc$, en que los lados ab y dc son dos arcos de círculo.

Comprendido todo esto, la marcha que debemos seguir para establecer las ecuaciones de la Elasticidad es bien sencilla, y, en el fondo, es idéntica á la que seguimos para el sistema de coordenadas ordinarias.

Se reduce á lo siguiente:

1.° Establecer el equilibrio de este sólido elemental, igualando á cero las componentes, paralelas á tres ejes rectangulares, de las tensiones sobre las caras y de las fuerzas que actúen sobre el elemento de masa.

2.° Expresar las tensiones en funcion de las deformaciones, es decir, en función de U, V, W.

3.° Eliminar de las tres primeras ecuaciones las componentes de las tensiones.

Las ecuaciones que resulten serán ecuaciones en diferenciales parciales con relación á r, θ, z.

Estas serán las ecuaciones del problema y las que deberemos integrar.

Si suponemos, como debemos suponer, que la superficie límite del cuerpo es un cilindro de revolución, porque de lo contrario no hubiéramos empleado coordenadas cilíndricas, las condiciones de equilibrio de la superficie se simplificarán como ya hemos explicado anteriormente.

En primer lugar, las componentes de la presión sobre una superficie cualquiera se aplicarán á la superficie límite sin más que hacer en ella $r = R$, si R es el radio del cilindro.

Y en segundo lugar, considerando una zona infinitamente estrecha y cuyo espesor tienda constantemente hacia cero, para el equilibrio y sus condiciones, no habrá más que igualar directamente las componentes de las fuerzas exteriores aplicadas al cilindro á las componentes generales, de que antes hablábamos, para un cilindro cualquiera de los del sistema en que se halla hecho $r = R$.

Esto lo veremos aún con más claridad en los ejemplos que presentemos, si el tiempo nos lo permite, y si no en otro curso.

***

En la conferencia próxima estudiaremos las tensiones sobre las diferentes caras del sólido elemental y estableceremos asimismo las ecuaciones de equilibrio de dicho sólido.

En estas ecuaciones no tendremos que estudiar los movimientos de rotación por una razón análoga á la que nos sirvió en coordenadas ordinarias para esta misma simplificación.

III.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia duodécima.

SEÑORES:

Empezamos á estudiar en nuestra última conferencia las coordenadas cilíndricas ó semipolares con el objeto de aplicarlas al problema de la Elasticidad.

Definimos la posición de un punto por las tres coordenadas r, θ, z.

Definimos asimismo las componentes del desplazamiento de este punto por tres variables U, V, W, que en rigor eran tres coordenadas del sistema ordinario trirrectangular, referidas á un sistema auxiliar de tres ejes rectangulares, que tenían por origen el punto M del sólido, que hubiéramos elegido, en que uno de los ejes, el equivalente al de las x, era la prolongación del radio r: sobre él se contaba la componente U; otro era la tangente en M á la sección recta del cilindro de revolución que pasase por M: se representaba por t, y era equivalente al eje de las y, contándose sobre él la V; y el tercero se imaginaba perpendicular á los dos anteriores, se designaba por z y era paralelo al eje Z: paralelamente á él mediamos W.

Todo esto quedaba representado en la figura 52.

Anunciamos al final de la conferencia, que en ésta habíamos de estudiar los dos problemas fundamentales de la teoría, á saber: hallar la expresión de las tensiones en función de las deformaciones, y establecer las ecuaciones de equilibrio de un sólido elemental, que lo definíamos por dos cilin-

dros, dos planos meridianos y dos planos perpendiculares al eje *Z*, según se ve en la figura 53.

Pero ante todo debemos decir algo respecto á las tensiones.

***

El estudio de las tensiones queda ya hecho al estudiar el método general de Lamé; pero como al paralelepípedo elemental, que allí considerábamos, hemos substituido el sólido elemental que acabamos de definir, algo tenemos que exponer aún sobre los esfuerzos que actúan en sus diferentes caras, y sobre todo respecto á las notaciones que hemos de emplear.

Conformándonos con la notación de Mr. Resal en su *Física matemática*, que nos ha de servir de guía en el estudio de las coordenadas cilíndricas, representaremos una tensión cualquiera por *p*.

Ni el emplear la letra *p* significa que la tomemos como inicial de presión, ni el que hallamos empleado y sigamos empleando la palabra tensión significa tampoco que la consideremos como sinónima de tracción.

Empleamos la palabra tensión, según hemos dicho ya muchas veces, como término genérico, como sinónimo de esfuerzo, que unas veces será de tracción y otras de compresión.

Pero es bueno recordar que para el cálculo de la tensión, sobre una cara perpendicular á un eje cualquiera, consideramos las acciones de la parte de la derecha sobre la izquierda, ó de la región positiva sobre la negativa, ó bien, suponiendo que la cara tenga dos hojas, sobre la hoja de la parte negativa: si resulta una tracción, evidentemente se tendrá una fuerza positiva. De suerte que las tracciones las consideramos como positivas.

En el caso de coordenadas cilíndricas, debemos definir lo

que se entiende por región positiva y región negativa, para cada una de las caras del sólido elemental prismático.

Sea M un punto del sistema elástico (fig. 54). Hagamos pasar por este punto una superficie de cada una de las tres familias que definen el sistema de coordenadas cilíndricas, que serán: el cilindro $B\,M\,C$ de radio $o\,M = r$;

El plano meridiano $A\,M\,C$, que formará con el plano $X\,Z$

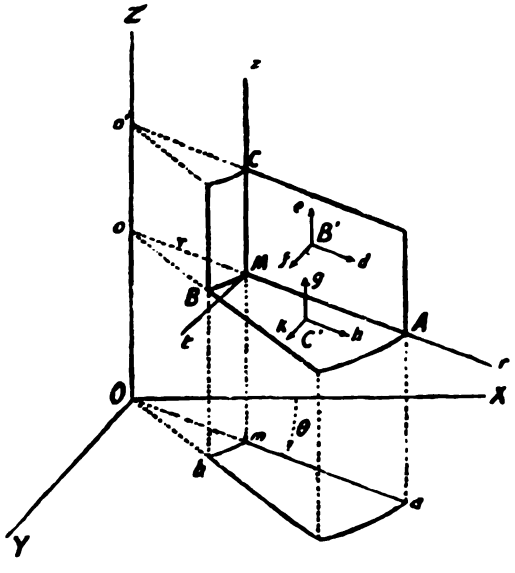


Figura 54.

el ángulo θ igual al que forma su traza Oa, sobre el plano $X\,Y$, con el eje X;

Y por último, el plano $A\,M\,B$ perpendicular al eje Z y cuya distancia al plano $X\,Y$ es z.

Estas tres superficies forman en M un triedro trirrectángulo, y dichas superficies constituyen tres caras del elemento de volumen, que hemos definido en la figura 53; pero en ésta (fig. 54) no hemos representado más que las tres caras de dicho triedro.

Si por M y en el plano $A\,M\,B$ trazamos la tangente $M\,t$ al arco $B\,M$, tendremos también representado en la figura el sistema auxiliar de tres ejes trirrectangulares $M\,r\,t\,z$.

Claro es que el plano $t\,M\,z$ es tangente al cilindro $B\,M\,C$ á lo largo del eje $M\,z$.

Dicho esto con toda la minuciosidad que hemos creído necesaria para evitar confusiones, estudiemos las tensiones y sus componentes sobre las caras planas $A\,M\,C$ y $A\,M\,B$, y sobre la cara curvilínea $B\,M\,C$, que ya hemos dicho que es un cilindro de revolución alrededor de Z.

Por regla general vamos á descomponer todas las tensiones en tres componentes paralelas al eje de las r, de las t y de las z; es decir, de los tres ejes que constituyen el sistema auxiliar trirrectangular.

Consideremos la cara $A\,M\,C$, y sea B' su centro, á cuyo punto suponemos aplicada la resultante de todos los esfuerzos sobre los diferentes puntos de la superficie alrededor del punto B'.

El esfuerzo ó tensión por unidad de superficie, será el esfuerzo total sobre la cara $A\,M\,C$ dividido por la superficie de esta cara.

Consideraremos que el ángulo θ va creciendo positivamente del eje de las X hacia el eje de las Y, según marca la flecha: pues en esta hipótesis estudiaremos las acciones de la parte de delante del plano $A\,M\,C$ sobre la parte de detrás.

Si las tres componentes de la fuerza, ó tensión que actúa en B', las representamos, por $B'd$ la paralela al eje de las r, por $B'f$ la paralela al eje de las t, y por $B'e$ la paralela al eje de las z, pues ya hemos explicado que las fuerzas las descomponemos en la dirección de los ejes r, t, z, es evidente que $B'f$, por ejemplo, si es positiva, representará una tracción, y lo mismo diríamos de las otras dos componentes.

Pero veamos, ante todo, cuales son las notaciones adoptadas.

La letra p es la designación general del esfuerzo ó de la

tensión; un primer subíndice indica el eje del sistema auxiliar al cual es perpendicular el plano elástico á que se refiere dicha tensión, y un segundo subíndice indicará la dirección de la componente; de suerte que $B'd$ por referirse al plano AC, que es perpendicular al eje t, y por ser paralela al eje de las r, se representará por p_{tr}.

Asimismo $B'f$, por referirse á dicho plano AC perpendicular á t, llevará t por primer subíndice, y también por segundo por ser una componente paralela á este eje.

Por último $B'e$, que corresponde al plano AMC perpendicular á t, y que es paralela á z, llevará ambas letras como primero y segundo subíndice.

En resumen: para la cara AMC

$$B'd = p_{tr},\ B'f = p_{tt},\ B'e = p_{tz}.$$

Del mismo modo para la cara AMB perpendicular al eje de las z las tres componentes serán:

$$C'h,\ C'k,\ C'g,$$

respectivamente paralelas á los ejes auxiliares r, t, z.

Las notaciones serán las mismas que en el caso anterior: p, en general indica los esfuerzos; el primer subíndice será z, porque la cara AMB es perpendicular al eje z; los segundos subíndices serán r para la componente paralela á este eje, t para la componente paralela á dicho eje t, y z para la componente paralela al eje de las z; de suerte que tendremos:

$$C'h = p_{zr};\ C'k = p_{zt};\ C'g = p_{zz}.$$

Respecto á la cara BMC, que no es plana como las anteriores, sino cilíndrica, son necesarias algunas aclaraciones y conviene hacer una figura en mayor escala, como es la figura 55.

Hemos representado en esta figura los tres ejes *r*, *t*, *z*; el cilindro *BMC* y el plano tangente B_1MC á dicho cilindro á lo largo de la generatriz *MC*.

Sea *a* el punto de aplicación de la tensión *p* sobre toda la cara *BMC*, pero referida á la unidad de superficie. Esta tensión la descompondremos, porque es la regla general, según los tres ejes *r*, *t*, *z*; de suerte que si hacemos pasar por *a* un

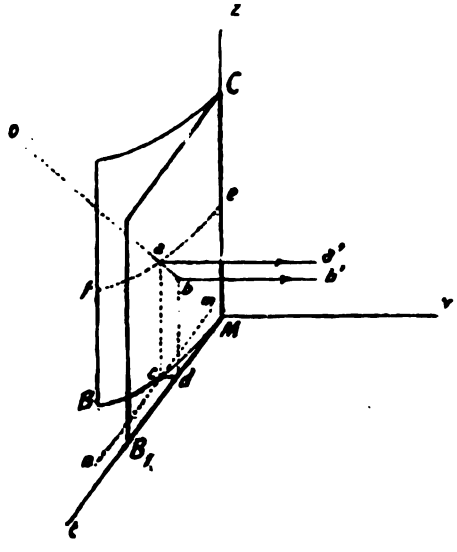


Figura 55.

plano paralelo al *tMz*, cuya traza sobre el plano *rMt* será *mn* paralela á *t*, dos de las componentes estarán en el plano *mna* y la tercera *aa'* será paralela á *r*, y, por lo tanto, perpendicular al plano *mna* y también á su paralelo *tMz*.

Fijémonos sólo en la componente *aa'*, y lo que de ella digamos, podríamos decir de las otras dos componentes.

Si consideramos la sección recta del cilindro *BMC* correspondiente al punto *a*, que designaremos por *fe*, y si *o* es su centro, que será un punto del eje del cilindro, trazando la recta *oa* hasta que encuentre el plano tangente *tMz*, y lla-

mando b al punto de intersección, los puntos a y b marcarán un segmento ab, que será infinitamente pequeño de segundo orden, lo mismo que cd, si cM es de primer orden.

Ahora bien; consideremos la tensión por unidad de superficie en el punto b del plano tangente B_1MC, y sea bb' su componente paralela al eje de las r.

La distancia de los puntos a, b hemos dicho que es de segundo orden, luego la distancia de las rectas aa' bb' también lo será, y por lo tanto, podremos substituir á la componente aa' de la tensión correspondiente al cilindro, la componente bb' de la tensión que corresponde al plano tangente, con errores infinitamente pequeños de segundo orden.

De aquí deducimos que en vez de considerar la tensión para el cilindro, podemos considerar la tensión por unidad de superficie para el plano tangente, que es el plano coordenado auxiliar tz.

Las notaciones para las tres componentes de esta tensión, que es, como hemos dicho, la del cilindro ó la del plano tangente, serán las mismas que hasta aquí hemos empleado.

Por ser el plano tangente perpendicular al eje de las r, será r el primer subíndice, y los segundos serán respectivamente r, t, z.

De suerte que tendremos aproximadamente para las componentes de la tensión por unidad de superficie del cilindro BMC, siendo por de contado muy pequeñas, de primer orden, las longitudes Mc y Md:

$$p_{rr}, p_{rt}, p_{rz}.$$

En resumen, las componentes de las tensiones, por unidad de superficie, para las caras infinitamente pequeñas BMC, AMC, AMB (fig. 54), serán:

Para el cilindro BMC (ó para el plano tang.).. $p_{rr}\ p_{rt}\ p_{rz}$.
Para el plano AMC..... $p_{tr}\ p_{tt}\ p_{tz}$.
Para el plano AMB..... $p_{zr}\ p_{zt}\ p_{zz}$.

Estas notaciones son enteramente análogas, como ya hemos dicho, á las que empleamos en el sistema ordinario de coordenadas con estas diferencias de notación: que á lo que allí llamábamos X, aquí le llamamos p, y que los ejes que allí se designaban x, y, z, aquí se designan por r, t, z.

En rigor, todas estas componentes se refieren á las caras del sistema auxiliar r, t, z, que es trirrectangular, y pueden considerarse, como formando parte de un paralelepípedo, análogo al que empleamos en las coordenadas ordinarias, el cual se ajustará en cierto modo al sólido elemental de la figura 54.

Esta observación va á simplificar notablemente el procedimiento que hemos de seguir, y por el pronto nos permite, sin nueva demostración, aplicar un teorema que ya demostramos para el paralelepípedo.

Allí demostramos que los subíndices pueden cambiar sin que cambie el valor de la tensión, de suerte que en el cuadro anterior tendremos

$$p_{tr} = p_{rt}, \; p_{tz} = p_{zt}, \; p_{rz} = p_{zr},$$

y el cuadro de las nueve componentes se reducirá á seis distintas:

$$p_{rr}, \; p_{tt}, \; p_{zz}$$
$$p_{rt}, \; p_{tz}, \; p_{rz},$$

que equivalen, las tres primeras á lo que llamábamos N_1, N_2, N_3, y las tres de la segunda línea á T_1, T_2, T_3.

Decimos que esto puede establecerse sin demostración, porque hemos reducido aproximadamente las componentes de la cara cilíndrica á componentes del plano tangente, que es uno de los planos coordenados, que forma parte del ángulo triedro trirrectángulo y que puede ser el triedro M de un paralelepípedo auxiliar.

Por esto precisamente, y para otra simplificación aun de

mayor importancia, hemos substituído al cilindro el plano tangente á lo largo de MC en el cálculo de las tensiones.

Claro es que la demostración directa tampoco ofrecería dificultad de ningún género.

***

Debemos ya pasar á las dos cuestiones fundamentales que son: expresión de las tensiones en funcion de las deformaciones, y equilibrio del sólido elemental formado por los dos cilindros, los dos planos perpendiculares á Z y los dos planos radiales, distantes los dos primeros entre sí dr, los segundos dz, y los terceros formando un ángulo $d\theta$.

Determinación de las tensiones en función de las deformaciones.—Este problema puede simplificarse aprovechando los resultados que obtuvimos al estudiarlo para el sistema de coordenadas ordinarias.

Se funda dicha simplificación en que las tres superficies, que determinan cada punto en el sistema de coordenadas cilíndricas, y que son para cada punto, y pasando por él, un cilindro de revolución, un plano meridiano y otro plano perpendicular al eje Z, forman, como hemos explicado repetidas veces, un *triedro trirrectángulo*, cuyo vértice es el punto en cuestión.

Tomando por ejes auxiliares, pero fijos, para dicho punto M la generatriz del cilindro, la tangente á la sección recta y el radio, es decir, z, t, r, estas tres líneas y los planos que determinan forman otro triedro que se ajusta al primero; porque el plano de las $z\,r$ es el mismo para los dos triedros; también es el mismo para ambos el plano de las $t\,r$; y el tercer plano de las tz, si no coincide con la superficie cilíndrica, es tangente á la misma á lo largo de la generatriz z, y además hemos demostrado que, á las componentes de la tensión que sobre dicha superficie actúa, pueden substituirse las componentes de la tensión sobre el plano tangente, con errores

infinitamente pequeños de segundo orden. De aquí se deduce esta consecuencia importante: que en este sistema de coordenadas cilíndricas, para estudiar las tensiones y sus componentes nos basta estudiar el triedro trirrectángulo formado por z, t, r.

Pero este triedro lo tenemos ya estudiado en la primera parte del curso, y es más, tenemos calculadas las componentes de la tensión en función de las deformaciones u, v, w, ó mejor dicho, de sus derivadas parciales; sólo que lo que allí llamábamos x, y, z, serán en este caso r, t, z. Además, recordemos que las componentes de la tensión que allí llamábamos N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, aquí están expresadas con la letra p, á la cual agregamos dobles subíndices.

Tendremos, por lo tanto, conservando las denominacianes x, y, z, para las variables independientes.

$$p_{rr} = \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx}; \quad p_{tt} = \lambda\theta + 2\mu\frac{dv}{dy};$$

$$p_{zz} = \lambda\theta + 2\mu\frac{dw}{pz};$$

$$p_{tz} = \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right); \quad p_{rz} = \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right);$$

$$p_{rt} = \mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right).$$

Sin embargo, el problema no está resuelto todavía.

Hemos expresado las componentes de las tensiones en función de las derivadas parciales de las deformaciones; pero en función de las componentes u, v, w, que se refieren al sistema ordinario, y debemos expresarlas en función de las componentes de la deformación U, V, W, en el sistema cilíndrico; ó mejor dicho, de sus derivadas parciales con relación á r, θ, z.

Luego aquí se nos presenta este nuevo problema: expresar aquellas derivadas parciales en función de éstas; es decir,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{du}{dx}, \dfrac{dv}{dx}, \dfrac{dw}{dx} \\ \dfrac{du}{dy}, \dfrac{dv}{dy}, \dfrac{dw}{dy} \\ \dfrac{du}{dz}, \dfrac{dv}{dz}, \dfrac{dw}{dz} \end{array}\right\} \text{en función de} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dU}{dr}, \dfrac{dV}{dr}, \dfrac{dW}{dr} \\ \dfrac{dU}{d\theta}, \dfrac{dV}{d\theta}, \dfrac{dW}{d\theta} \\ \dfrac{dU}{dz}, \dfrac{dV}{dz}, \dfrac{dW}{dz} \end{array}\right. \quad \text{(I)}$$

Y substituyendo las primeras en función de las segundas, en los valores de las p, que hemos escrito antes, habremos resuelto el problema en cuestión, porque tendremos los valores de las p en función de las derivadas parciales de U, V, W, con relación á r, θ, z. Es decir, las tensiones en función de las deformaciones U, V, W.

Queda, pues, reducido el problema á este otro.

En el sistema ordinario, es fácil determinar la significación geométrica de du, dv, dw.

Consideremos un punto M (fig. 56) del sólido elástico, y los tres ejes x, y, z que pasan por dicho punto; advirtiendo que, en este caso, el eje de las x es también eje de las r, y el eje de las y, es el eje de las t; el de las z se conserva con esta denominación.

Supongamos que por la deformación elástica, el punto M se traslada á M'; pues proyectando M' sobre x, y, tendremos las dos componentes u, v, que están señaladas con líneas más gruesas en la figura.

Consideremos, asimismo, un punto M_1 muy próximo á M, y sea $M_1 M'_1$ su desplazamiento.

Proyectando M_1 sobre el plano de las x, y, y lo mismo M'_1, y representando las proyecciones por m_1, m'_1, no hay más que proyectar la recta $m_1 m'_1$ sobre x y sobre y, que es lo mismo que haber proyectado directamente $M_1 M'_1$,

para obtener las componentes de este desplazamiento, componentes que llamaremos u', v' y que están representadas con líneas gruesas en la figura.

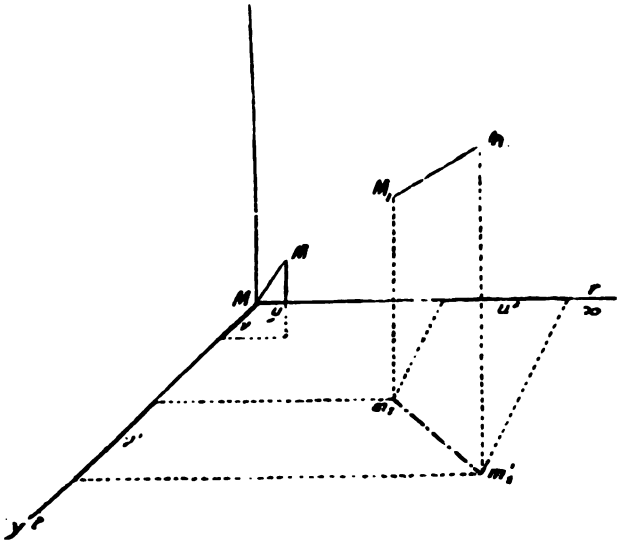


Figura 56.

Tenemos, pues, que al pasar de M á M_1, la componente u se ha convertido en u', luego

$$du = u' - u;$$

y del mismo modo

$$dv = v' - v.$$

Como la variable z es la misma en los dos sistemas, no tenemos para qué ocuparnos en ella; por lo demás, obtendríamos un resultado análogo á los anteriores:

$$dz = z' - z.$$

De todas maneras, podemos formular esta regla práctica:

Para obtener du, *no hay más que proyectar* M M′ *y* M_1 M'_1 *sobre el eje de las* x, *ó de las* r *en nuestro caso, y tomar la diferencia de las proyecciones.*

De igual suerte, para obtener *dv* proyectaremos *M M′* y M_1 M'_1 sobre el eje de las *y*, ó sobre el eje de las *t*, y tomaremos la diferencia de ambas proyecciones.

Pues apliquemos esta regla general al caso de las coordenadas cilíndricas.

***

Sean: *M* un punto del sólido elástico (fig. 57);

X, *Y*, *Z* los tres ejes fundamentales;

Ms la sección recta del cilindro de revolución, que pasa por *M* y que está representado por *Mmss*.

El sistema de ejes auxiliares que corresponden al punto *M* estará formado por las tres líneas siguientes, según hemos explicado ya: *Mr* prolongación del radio *oM* del cilindro; *Mt* tangente á *Ms*, y *Mz* paralela á *OZ*.

Si el punto *M* se desplaza por la deformación elástica y viene á parar á *M′*, las tres componentes de este desplazamiento serán:

$$Mb = U, \; ab = V, \; M'a = W,$$

según hemos explicado anteriormente. Son, en rigor, las tres coordenadas de *M′* con relación á los ejes *r*, *t*, *z*.

Por lo demás, sobre el plano *X Y*, *M* se proyecta en *m* y el ángulo *t M r* en *t′ m r′* que será también un ángulo recto.

Consideremos otro punto M_1 del sólido elástico muy próximo á *M*, y supongamos que la deformación elástica le lleva á M'_1.

Lo mismo que para el punto *M*, el punto M_1 que se pro-

yectará en m_1 estará definido por el cilindro $M_1\, m_1\, s'\, s'$, por el plano de la sección recta $M_1\, s'$, cuyo centro suponemos que esta en o' y por el plano meridiano $M_1\, m_1\, O\, o'$.

Para el punto M_1 podemos trazar, análogamente á lo que hacíamos para M, un sistema de ejes auxiliar r_1, t_1, z_1, que

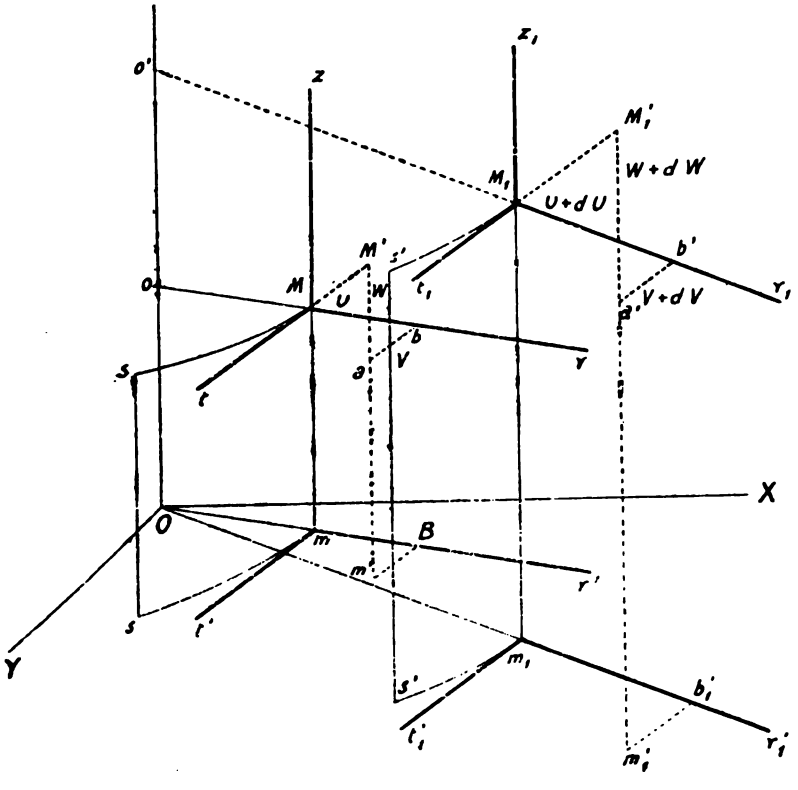


Figura 57.

estará formado por $M_1\, r_1$, prolongación del radio $o'\, M_1$; $M_1\, t_1$ tangente á la sección recta $M_1\, s'$ y $M_1\, z_1$.

Hemos dicho que el punto M_1 por efecto del desplazamiento viene á parar á M'_1: sus componentes, con relación á los últimos ejes auxiliares r_1, t_1, z_1, serán:

$$M_1 b' = U + dU,\ a'b' = V + dV,\ a'M'_1 = W + dW,$$

puesto que al pasar de M á M_1 las componentes del desplazamiento sufren variaciones que hemos representado por

$$dU, dV, dW.$$

El ángulo $t_1 M_1 r_1$ que es recto, por estar en un plano paralelo al XY se proyectará también según un ángulo recto $t'_1 m_1 r'_1$ sobre dicho plano de las XY.

Si queremos obtener du, dv, dw con relación á los ejes r, t, z, no tenemos que hacer otra cosa, según la regla que establecimos antes, que proyectar MM', $M_1 M'_1$ sobre r, y tomar la diferencia: así obtendremos du; y después proyectar estos mismos desplazamientos sobre t, y tomar la diferencia también entre ambas proyecciones.

Pero lo mismo da proyectar MM' que el polígono $MbaM'$; y análogamente da lo mismo proyectar $M_1 M'_1$ sobre r, que el polígono $M_1 b'a'M'_1$ siempre sobre r. Ahora bien; estos polígonos tienen los lados aM' y $a'M'_1$ perpendiculares á r, luego sus proyecciones serán nulas sobre dicho eje. Nos basta, pues, proyectar Mba y $M_1 b'a'$ sobre el eje expresado r.

Por otra parte, los planos rMt y $r_1 M_1 t_1$ son paralelos, luego esta operación última podemos hacerla en sus proyecciones sobre el plano de las XY.

En resumen: no tenemos más que proyectar los dos contornos mBm' y $m_1 b'_1 m'_1$ sobre mr' y sobre mt', para obtener du y dv.

Á fin de que resulte más clara esta construcción, hemos trazado una nueva figura, no ya en perspectiva, sino con sus verdaderas dimensiones, que es la figura 58. Esta y la 57 deben considerarse á la vez.

En ella m es la proyección sobre el plano XY del punto que se considera, ms la traza del cilindro de revolución que pasa por M.

mr' y mt' las proyecciones de los dos ejes r, t, y r'_1, t'_1 formarán un sistema de ejes rectangulares.

Del mismo modo $m_1 s'$ es la traza del cilindro que pasa por M_1 siendo m_1 la proyección de este punto, para el cual $m_1 r'_1$ es la proyección de $M_1 r_1$ y $m_1 t'_1$ es proyección de $M_1\ t_1$.

Estas dos líneas también forman un ángulo recto.

Los dos círculos s y s' distan dr y los planos Or' y Or'_1 forman un ángulo infinitamente pequeño $d\theta$.

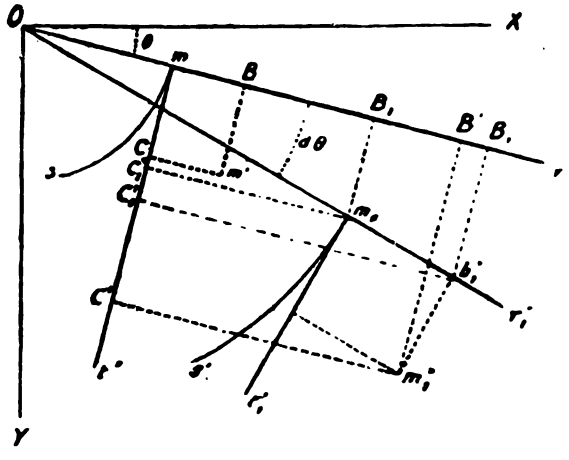


Figura 58.

Por último, m' es la proyección de M', de suerte que tendremos:

$$mB = U,\ m'B = V.$$

Y asimismo m'_1 será la proyección de M'_1, y es evidente que se tendrá:

$$m_1 b'_1 = U + dU,\ m'_1 b'_1 = V + dV.$$

Es decir, los valores del punto m aumentados en las diferenciales que resulten al pasar de m á m_1.

Según lo que antes explicábamos, basta proyectar sobre r'

los contornos $m'Bm$ y $m'_1 b'_1 m_1$ y tomar la diferencia de ambas proyecciones para obtener du.

La proyección de $m'Bm$ es evidentemente mB, ó sea U.

La proyección de $m'_1 b'_1 m_1$ será $B_1 B' = B_1 B'_1 - B' B'_1$ que puede calcularse fácilmente.

En efecto,

$$B_1 B'_1 = m_1 b'_1 \cos (r', r'_1),$$

pero

$$m_1 b'_1 = U + dU \quad \text{y} \cos (r', r'_1) = \cos d\theta.$$

luego

$$B_1 B'_1 = (U + dU) \cos d\theta.$$

Mas el coseno de un ángulo infinitamente pequeño de primer orden difiere de la unidad en un infinitamente pequeño de segundo, luego poniendo 1 en vez de cos $d\theta$, resultará

$$B_1 B'_1 = U + dU.$$

Por otra parte

$$B' B'_1 = m'_1 b'_1 \operatorname{sen} (t'_1, r')$$

ó bien

$$B' B'_1 = (V + dV) \operatorname{sen} d\theta,$$

y poniendo en vez del seno el arco por tratarse de un ángulo infinitamente pequeño

$$B' B'_1 = (V + dV) d\theta = V d\theta + dV d\theta.$$

Despreciando la última parte, que es un infinitamente pequeño de segundo orden, resultará

$$B' B'_1 = V d\theta;$$

y substituyendo los valores de $B_1 B'_1$ y $B' B'_1$, obtendremos, por último,

$$B_1 B' = U + dU - V d\theta.$$

Sólo nos queda, para obtener du, que restar las dos proyecciones $B_1 B'$ y mB así

$$du = U + dU - V d\theta - U,$$

ó bien

$$du = dU - V d\theta.$$

El mismo procedimiento nos servirá para determinar dv.

La proyección del primer contorno $m'Bm$ sobre el eje t' es $mC = V$.

La del segundo $m_1 b'_1 m'_1$ sobre el mismo eje será

$$C_1 C' = C_1 C'_1 + C' C'_1,$$

y estas dos últimas líneas tendrán respectivamente por valores, observando que los ejes t' y t'_1, forman, lo mismo que los r', r'_1, un ángulo $d\theta$,

$$C_1 C'_1 = m_1 b'_1 \operatorname{sen} d\theta = (U + dU)\, d\theta$$
$$C'_1 C' = b'_1 m'_1 \cos d\theta = V + dV$$

por lo tanto,

$$C_1 C' = V + dV + U d\theta.$$

Restando las dos proyecciones $C_1 C$ y mC obtendremos

$$dv = V + dV + U d\theta - V$$

ó bien

$$dv = dV + U d\theta.$$

En suma, tenemos para du y dv en función de las nuevas coordenadas, estas dos expresiones:

$$du = dU - Vd\theta$$
$$dv = dV + Ud\theta.$$

***

Las expresiones anteriores nos determinan du, dv en función de dU, dV, pero en el caso general, cuando el punto M ha tomado la posición M', y el punto M_1 ha ido á parar á M'_1. Y no son las diferenciales generales las que buscamos, sino las diferenciales parciales.

Sin embargo, de los valores obtenidos para du, dv, podemos deducir, en este sistema particular de coordenadas que vamos examinando, las nueve diferenciales parciales de u, v, w, en función de las nueve diferenciales ó derivadas parciales de U, V, W que hemos consignado en el cuadro (I).

Determinemos una por una las derivadas parciales de u, v, w.

1.° $\frac{du}{dx}$. Esta expresión significa que ha de buscarse la relación entre un incremento de u y un incremento de x, cuando no varían la y ni la z; de modo que el punto M ha de moverse sobre el eje auxiliar de las x, que es el mismo de las r, y que en proyección será el eje r'

Dividiendo, pues, por dx el valor du tendremos:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dU}{dx} - V\frac{d\theta}{dx}.$$

En primer lugar, puesto que coinciden los ejes x y r, la expresión anterior también podrá escribirse de este modo:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dU}{dr} - V\frac{d\theta}{dr}.$$

Pero si el punto M se mueve sobre el eje de las r, al pasar á M_1, no habrá variado θ, pues como decimos, M y M_1 estarán sobre Mr (fig. 57) de modo que $\frac{d\theta}{dr} = 0$ y tendremos,

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr}. \qquad (a)$$

El primer miembro es la derivada parcial de u con relación á x; y el segundo, es la derivada parcial de U con relación á r, porque como hemos visto, no varía ni θ, ni z tampoco.

En resumen, una de las derivadas parciales del primer grupo (I) se expresa en función de otra del segundo grupo.

2.° $\frac{du}{dy}$. Para que esta expresión represente la derivada parcial de u con relación á y, es preciso que x y z no varíen, luego M debe moverse sobre el eje de las y, ó de las t, de suerte que M y M_1 estarán sobre dicha recta Mt.

Tendremos

$$\frac{du}{dy} = \frac{dU}{dy} - V\frac{d\theta}{dy}.$$

Pero hemos visto que $dy = r\,d\theta$, luego

$$\frac{du}{dy} = \frac{dU}{rd\theta} - V\frac{d\theta}{rd\theta};$$

ó bien

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{r}\frac{dU}{d\theta} - \frac{V}{r}. \qquad (a')$$

Ahora bien, moviéndose M sobre Mt, es como si se moviese sobre Ms, luego sólo varía θ: no varían ni r ni z. Así $\frac{dU}{d\theta}$ es *la derivada parcial* de U con relación á θ.

Hemos expresado otra derivada parcial de u con relación á y en funcion de la derivada parcial de U con relación á θ.

3.° $\frac{du}{dz}$. Como la u coincide con U, y además, el eje de las z es el mismo para ambos sistemas, es evidente que se tendrá

$$\frac{du}{dz} = \frac{dU}{dz} \qquad (a'')$$

y ambas son derivadas parciales en que x, y por una parte, y r, θ por otra permanecen constantes.

4.° $\frac{dv}{dx}$. Dividiendo por dx el primer miembro del valor de dv, y por dr el segundo, porque las variables x, r coinciden sobre el mismo eje, y sus incrementos serán iguales, tendremos:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dV}{dr} + U\frac{d\theta}{dr}.$$

Mas para que la ecuación anterior tenga, por decirlo así, una significación útil en nuestro problema, es preciso que los coeficientes diferenciales que contiene sean verdaderas derivadas parciales.

Para que lo sean $\frac{dv}{dx}$, es forzoso que la y y la z permanezcan constantes, luego el punto M_1 debe moverse sobre el eje de las x, que en este caso coinciden con el eje de las r.

Ahora bien, si el punto M_1 se mueve sobre el eje de las r, es claro que $d\theta$ será igual á cero, luego la fórmula anterior se reduce á

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dV}{dr}. \qquad (b)$$

Además, no variando z ni variando θ, dV es el incremento que corresponde á la variación dr; por lo tanto, el segundo

miembro es la derivada parcial de V con relación á r. Tenemos, pues, otra derivada parcial del primer sistema expresada por una derivada parcial del segundo.

5.° $\frac{dv}{dy}$. Dividiremos análogamente á los demás casos el valor de dv por dy, y tendremos:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{dV}{dy} + U\frac{d\theta}{dy}.$$

Pero dy se cuenta sobre el eje t, y hemos visto que, con diferencias infinitamente pequeñas de orden superior, se tiene $dy = rd\theta$.

Luego la expresión anterior puede escribirse en esta forma:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{dV}{rd\theta} + U\frac{d\theta}{rd\theta},$$

ó bien

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta} + \frac{U}{r}. \qquad (b')$$

Para que el primer miembro represente la derivada parcial de v con relación á y, es preciso que la x y la z permanezcan invariables; es decir, que el punto M_1 se mueva sobre el eje de las t. Pero en este caso dV significará la variación de V únicamente por la variación de θ, luego el coeficiente $\frac{dV}{d\theta}$ será también una derivada parcial: la de V con relación á θ.

En cuanto al término $\frac{U}{r}$ nada hay que advertir, porque no contiene cantidades diferenciales.

En suma: la ecuación (b') expresa una derivada parcial del antiguo sistema en función de otra derivada parcial del segundo.

6.° $\frac{dv}{dz}$. Como v y V se cuentan paralelamente al mismo eje, es evidente, puesto que el eje z permanece invariable, que tendremos:

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dV}{dz} \qquad (b'')$$

ó sea una derivada parcial del primer sistema de coordenadas en función de otra derivada parcial del segundo.

7.° $\frac{dw}{dx}$. La W y la w se cuentan ambas paralelamente al eje de las z; es decir, que se tiene $dw = dW$ y dividiendo el primer miembro por dx y el segundo por dr, que son iguales, tendremos:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dW}{dr} \qquad (c).$$

De modo, que si el punto M_1 se mueve sobre el eje de las r, los dos miembros representarán dos derivadas parciales: el primero con relación á los ejes x, y, z; el segundo con relación á los ejes r, θ, z, porque también la θ y la z permanecerán invariables.

8.° $\frac{dw}{dy}$. Como tenemos $dw = dW$, dividiendo el primer miembro por dy y el segundo por su igual $rd\theta$, se obtendrá:

$$\frac{dw}{dy} = \frac{1}{r}\frac{dW}{d\theta} \qquad (c').$$

Si el punto se mueve sobre el eje de las y, ó sea de las t, el primer miembro será la diferencial parcial de w con relación á y; pero en este caso, la z y la r permanecen constantes; luego el segundo miembro es la derivada de W con relación á θ.

9.° $\frac{dw}{dz}$. Consideraciones exactamente iguales á las anteriores nos demuestran que

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dW}{dz} \qquad (c').$$

Tenemos, pues, expresadas todas las derivadas parciales de u, v, w con relación á x, y, z, en función de derivadas parciales de U, V, W con relación á r, θ, z, que era el problema que nos habíamos propuesto resolver con el fin de substituir las primeras por las segundas en los valores de las componentes de la tensión p.

Resumiendo en un cuadro las nueve fórmulas marcadas con las letras a, b, c, podremos escribir:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dU}{dr},$$
$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta} + \frac{U}{r},$$
$$\frac{dw}{dz} = \frac{dW}{dz},$$
$$\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} = \frac{1}{r}\frac{dW}{d\theta} + \frac{dV}{dz},$$
$$\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = \frac{dU}{dz} + \frac{dW}{dr},$$
$$\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} = \frac{dV}{dr} + \frac{1}{r}\frac{dU}{d\theta} - \frac{V}{r},$$

que son precisamente las cantidades que entran en los valores de p.

Si quisiéramos expresar la dilatación cúbica en función de las nuevas coordenadas, no habría más que substituir en

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz},$$

en vez de las derivadas parciales $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$ sus valores tomados del cuadro anterior. Llamando θ_c la dilatación cúbica expresada en las nuevas coordenadas cilíndricas, y por ser dicha dilatación cúbica invariable, é independiente de las coordenadas que se elijan, de modo que $\theta = \theta_c$, tendremos:

$$\theta_c = \frac{dU}{dr} + \frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta} + \frac{U}{r} + \frac{dW}{dz}.$$

***

Para obtener las tensiones p por unidad de superficie, sobre las superficies del sistema cilíndrico que pasan por un punto M, y para dicho punto, no habrá más que substituir en

$$p_{rr} = \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx}; \; p_{tt} = \lambda\theta + 2\mu\frac{dv}{dy};$$

$$p_{zz} = \lambda\theta + 2\mu\frac{dw}{dz};$$

$$p_{tz} = \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right); \; p_{rz} = \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right);$$

$$p_{rt} = \mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right);$$

los valores de las derivadas parciales de u, v, w con relación á x, y, z, tomadas del cuadro anterior en función de las derivadas parciales de U, V, W con relación á v, θ, z, y resultará:

$$p_{rr} = \lambda\theta_c + 2\mu\frac{dU}{dr},$$

$$p_{tt} = \lambda\theta_c + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta} + \frac{U}{r}\right) = \lambda\theta_c + \frac{2\mu}{r}\left(U + \frac{dV}{d\theta}\right),$$

$$t_{zz} = \lambda\theta_c + 2\mu \frac{dW}{dz},$$

$$p_{tz} = \mu\left(\frac{dV}{dz} + \frac{1}{r}\frac{dW}{d\theta}\right),$$

$$p_{rz} = \mu\left(\frac{dU}{dz} + \frac{dW}{dr}\right),$$

$$p_{rt} = \mu\left(\frac{dV}{dr} + \frac{1}{r}\frac{dU}{d\theta} - \frac{V}{r}\right).$$

Estas fórmulas son las mismas de M. Resal, cuyo tratado hemos tomado por guía en este punto de las coordenadas cilíndricas, pero con signo contrario.

Se explica tal diferencia, porque nosotros consideramos *como positivas* las *tracciones*, y parece que M. Resal considera las *presiones* como *positivas*.

Si quisiéramos desarrollar por completo las fórmulas precedentes, de manera que sólo entrasen derivadas parciales de U, V, W con relación á r, θ, z, no había más que substituir por θ_c su valor ya obtenido.

$$\theta_c = \frac{dU}{dr} + \frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta} + \frac{dW}{dz} + \frac{U}{r}.$$

En la conferencia próxima determinaremos las condiciones de equilibrio del *sólido elemental* en coordenadas cilíndricas.

IV.—Nuevo método para determinar el diámetro del planeta Venus.

POR VICENTE VENTOSA.

Este hermoso planeta, que por su extraordinario resplandor ha cautivado en todas épocas la atención hasta de las personas menos habituadas á levantar los ojos al Cielo, reserva todavía á los astrónomos muchos y difíciles problemas que están por resolver. Aunque éste astro sea de tamaño poco inferior al de la Tierra, y el que á ella más se acerca en ciertas ocasiones (*), desconócense casi totalmente las condiciones topográficas de su superficie, á lo que coadyuva la presencia de la densa atmósfera que le rodea, y el tiempo que el planeta emplea en girar sobre su eje continua siendo objeto de grandes controversias, por la discordancia de los resultados de la observación, basada, por junto, en la vaga determinación de los movimientos de ciertas manchas ó irregularidades poco definidas que á veces con dificultad se vislumbran dentro del disco ó en su borde, cuya figura aparente tampoco está bastante estudiada.

Los trabajos de los primeros observadores daban para la rotación de Venus una duración muy parecida á la de nuestro globo, que Schröter fijó en unas 23 horas y 21 minutos; valor que fué sin discusión aceptado y admitido como bueno, hasta que el ilustre astrónomo de Milán, el señor Schiaparelli, como resultado de sus propias observaciones, creyó poder afirmar en 1889 que dicho planeta presentaba siempre, cual sucede á la Luna con relación á la Tierra, la misma cara al Sol, de manera, que el período de rotación de Venus debía coincidir con el de su revolución, ó cum-

(*) Salvo la *Luna* y el asteróide *Eros*.

plirse en unos 225 días. Mas, á pesar de la autoridad indiscutible del Sr. Schiaparelli, los astrónomos no se han puesto de acuerdo, y la cuestión permanece todavía indecisa y parece difícil llegar á solucionarla en breve término.

M. Bouquet de la Grye, en un interesante artículo publicado en el *Annuaire du Bureau des Longitudes* para 1907, afirma que si en la figura aparentemente circular del disco de Venus se pudiera evidenciar la existencia en determinado sentido de un achatamiento susceptible de medida, éste sólo podría ser producido por la rotación del planeta, de cuya velocidad daría alguna idea, así como de la situación del eje de giro. M. Bouquet pasa revista y discute los resultados hasta ahora obtenidos por diversos procedimientos para el valor del diámetro angular de Venus y las deducciones consiguientes acerca de su rotación tan debatida. Pone además de relieve las graves dificultades que en la práctica se encuentran para la resolución satisfactoria de estos problemas, de las cuales, quizá la más importante, procede de las grandes variaciones que el diámetro y las fases del planeta experimentan durante cada revolución sinódica, con circunstancias verdaderamente desfavorables para la precisión de los resultados.

Con efecto, en las conjunciones superiores de Venus, éste se presenta á la vista redondo y perfectamente iluminado; la la fase sería, por tanto, muy apropiada para medir el diámetro en todas direcciones alrededor del disco, y de aquí deducir el valor del achatamiento; pero entonces Venus está á la mayor distancia posible de la Tierra, y su diámetro apenas excede de 10″, cantidad tan pequeña, que los errores inevitables de mensuración, puesto que sólo se trata de hallar diferencias, que á lo sumo pueden valer algunas centésimas de segundo de arco, harían perfectamente ilusorio el resultado que obtuviéramos. Cuando Venus se halla cerca de las cuadraturas, su brillo aumenta notablemente y su diámetro crece también, duplicando casi de valor; mas en esta fase, la me-

dición del mismo sólo es posible en una dirección, circunstancia que basta para invalidar las condiciones favorables indicadas.

Queda, al parecer, como el mejor y casi único recurso, aprovechar los momentos en que se verifican los pasos de Venus por el disco solar, durante los cuales el planeta se proyecta obscuro sobre un fondo de brillantez deslumbradora, perfectamente redondo y del mayor tamaño posible, alcanzando entonces el diámetro su máximo valor, de 60″, poco más ó menos. M. Bouquet examina particularmente en su artículo los resultados de la observación del paso de Venus en 1882, hecha en la ciudad de Puebla (Méjico), á una altitud de 2.300 metros y con tiempo inmejorable. De este examen cree poder concluir que Venus tiene una figura esferoidal, con achatamiento superior al de la Tierra, pareciéndole imposible que á tal achatamiento, cualquiera que sea su valor exacto, no corresponda una rotación alrededor de un eje casi perpendicular á la eclíptica, conforme indican las mediciones efectuadas. En resumen, M. Bouquet inclínase á dar por cierto que Venus posee una rotación análoga á la de nuestro globo.

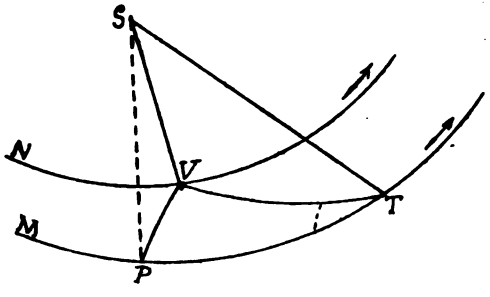
Dejando aparte estas conclusiones, que sólo citamos por convenir á nuestro propósito, lo que se ve claramente es que, si bien los pasos de Venus ofrecen ventajas indudables sobre los demás métodos ideados y puestos en práctica para medir el diámetro y determinar la figura del planeta, ocurren tan de tarde en tarde, que no se debe esperar que la Ciencia saque de ellos gran provecho para resolver estos problemas. En efecto, el último paso de Venus se verificó en el año 1882, y hasta el 2004 no ocurrirá el próximo. No es, pues, aventurado el asegurar que casi ninguno de los actuales vivientes podrá disfrutar, si no ha disfrutado ya, de tan bello espectáculo.

¿No podrían utilizarse para el mismo fin *todas* las conjunciones inferiores de Venus? Tal es la idea que motiva el pre-

sente artículo, y que, dada la insuficiencia de los medios de información actualmente á nuestro alcance, ignoramos si es nueva ó ha sido ya dada á conocer; mas por si se la juzga útil y factible, vamos á exponerla á continuación brevemente.

En los días inmediatos, anteriores y posteriores, á la conjunción inferior, Venus, visto con auxilio de un anteojo, se presenta en forma de filete ó segmento luminoso semicircular y muy delgado, cuyas puntas ó cuernos pueden servir para determinar la magnitud del diámetro del planeta en una sola posición, midiendo con un micrómetro la distancia que aparentemente los separa, Pero el hecho que, á juicio nuestro, merece fijar la atención de los astrónomos en este caso especial, es que, conforme Venus avanza con relación al Sol, en el intervalo de pocos días el ángulo de posición del filete luminoso varía con rapidez, de manera que, repitiendo las operaciones de mensuración en varios *días consecutivos*, será posible obtener el valor del diámetro *en diferentes posiciones* alrededor del disco, casi como durante los pasos de Venus. Obrando así, claro es que las medidas no podrán ser simultáneas, pero el error que de proceder de este modo se cometiera, sería probablemente pequeño, comparándole con la facultad de medir el diámetro en su máxima magnitud aparente y en tan gran número de direcciones como se desee, sin que las condiciones de visibilidad del planeta varíen apenas de un día á otro. Además, el filete luminoso se destaca perfectamente por su brillo del fondo en que se proyecta, y es siempre visible por muy cercano que esté Venus al Sol. Con este procedimiento es de esperar que se llegará á determinar el achatamiento y las irregularidades de figura del disco, algunas de las cuales han sido ya señaladas. Otra ventaja considerable es que las operaciones podrán repetirse al término de cada revolución sinódica, ó cada diez y nueve meses próximamente, y ocupando el planeta distintos lugares en su órbita. Desde ahora, hasta el año 2004, será posible aplicar el método propuesto 60 veces.

Precisemos las ideas. Sean S el Sol; MT y NV, respectivamente, las intersecciones del plano de la eclíptica y del de la órbita de Venus con una esfera de radio arbitrario cuyo centro sea el Sol; T y V las proyecciones de la Tierra y de Venus sobre la misma esfera en un instante dado. Tracemos desde V los arcos de círculo máximo VT y VP, siendo el



último perpendicular á la eclíptica. El arco VP expresará, por tanto, la latitud heliocéntrica b del planeta, y el PT la diferencia $L - l$ de las longitudes heliocéntricas de la Tierra y Venus. Supónese nula, en atención á su pequeñez, la latitud heliocéntrica de la Tierra. Entonces el triángulo esférico rectángulo VPT dará para el ángulo $VTP = T$ la siguiente fórmula:

$$\cot T = \cot b \operatorname{sen} (L - l).$$

Obsérvese ahora que el plano STV, cuya inclinación sobre el de la eclíptica tiene por medida el ángulo T, representa el plano de simetría del segmento luminoso de Venus, y es, en consecuencia, perpendicular al diámetro que une las puntas ó cuernos del mismo segmento, de manera que el valor de T podrá servir para determinar el ángulo de posición del indicado diámetro.

Para dar una idea de la rapidez de las variaciones del ángulo T en estas circunstancias, eligiremos, como ejemplo,

las últimas conjunciones inferiores, correspondientes á los años 1906 y 1908. Los valores numéricos de *b* y *L-l*, consignados en el siguiente cuadro, refiérense al mediodía medio del Observatorio de San Fernando, y están tomados del *Almanaque Náutico*:

	b	*L-l*	*T*	Δ *T*
1906				
Nov. 26	— 0° 52′	+ 2° 12′	338°,5	— 4°,1
27	— 0 46	+ 1 36	334 ,4	— 8 ,3
28	— 0 41	+ 1 1	326 ,1	— 21 ,7
29	— 0 35	+ 0 24	304 ,4	— 55 ,2
30	— 0 29	— 0 11	249 ,2	— 42 ,2
Dic. 1	— 0 24	— 0 47	207 ,0	— 14 ,6
2	— 0 18	— 1 22	192 ,4	— 6 ,6
3	— 0 12	— 1 58	185 ,8	— 3 ,6
4	— 0 6	— 2 35	182 ,2	
1908				
Julio 2	— 1 17	+ 2 17	330 ,6	— 10 ,3
3	— 1 22	+ 1 39	320 ,3	— 15 ,3
4	— 1 27	+ 1 1	305 ,0	— 21 ,0
5	— 1 32	+ 0 23	284 ,0	— 22 ,8
6	— 1 37	— 0 15	261 ,2	— 18 ,2
7	— 1 42	— 0 52	243 ,0	— 13 ,0
8	— 1 47	— 1 30	230 ,0	— 9 ,0
9	— 1 51	— 2 8	221 ,0	— 5 ,9
10	— 1 56	— 2 45	215 ,1	

Se ve, por los números que anteceden, que en cinco días la variación de *T* ascendió á 142° en 1906, desde el 27 de Noviembre hasta el 2 de Diciembre, y á 90° nada más en 1908, del 3 al 8 de Julio. El ser más rápida la variación en 1906, procede de ser más pequeña la latitud de Venus, cuyo paso por el nodo ascendente sucedió el 5 de Diciembre, esto es, seis días *después* de la conjunción inferior, mientras que en 1908 el paso del planeta por el nodo descendente había ocurrido diez y ocho días *antes* de la conjunción, ó sea el 18 de Junio. De aquí parece desprenderse que no todas las conjunciones son igualmente eficaces, sin embargo de lo

cual, opínamos que en *todas* la variación de *T* ha de ser bastante rápida para la resolución provechosa del problema que perseguimos. Téngase en cuenta, además, que en el intervalo de 8 años hay 5 revoluciones sinódicas de Venus casi exactas (*), y, en consecuencia, que las condiciones del problema se reproducen ó vuelven á ser casi las mismas al cabo de este intervalo, por lo menos durante mucho tiempo.

No desconocemos que, cuando se trate de poner en práctica el nuevo método, han de presentarse graves dificultades, nacidas, en primer término, de la proximidad aparente de Venus al Sol; circunstancia que, por el caldeamiento consiguiente del aire exterior y del que circula dentro del tubo del anteojo, ha de producir en la imagen del planeta una especie de trepidación muy perjudicial para la precisión de los resultados. Habrá también que luchar con el efecto de la irradiación del limbo de Venus fuertemente iluminado; con el estado de transparencia del cielo, variable de un día á otro; con la presencia de la atmósfera del planeta, y con otras que sería prolijo enumerar. Abrigamos, no obstante, la esperanza de que tales dificultades (inherentes, por lo demás, en gran parte á muchas observaciones astronómicas) podrán vencerse, si se atiende á los grandes progresos que el arte de observar ha realizado en estos últimos años, y eligiendo, para efectuar estas delicadas observaciones, lugares situados á grandes altitudes y en latitudes convenientes, y que disfruten de cielo excepcionalmente puro, conforme ahora, con el fin de evitar la nociva influencia de la atmósfera, se recomienda eficazmente para aquellos trabajos astronómicos que, por su índole especial, exigen minuciosas precauciones en su ejecución (**).

(*) La diferencia entre ambos períodos no llega á tres días.

(**) En el observatorio de Madrid, cuya altitud es de 655 metros sobre el nivel del mar, tuvimos numerosas ocasiones de observar á Venus en su conjunción inferior, y en no pocas la imagen del planeta se presentó tranquila y bien definida.

Por otra parte, en medio de estas desventajas, como se tiene la facultad de comprobar frecuentemente los resultados de la experiencia aplicando el nuevo método, nada se perderá con ensayarlo. En la confianza de que así suceda, ponemos á continuación una efeméride para la próxima conjunción inferior de Venus, que se verificará en el mes de Febrero de 1910, calculada con datos tomados de la *Connaissance du Temps.*

		b	*L-l*	*T*	Δ*T*
1910					
Febr.	6.....	+ 2° 51′	+ 3° 42′	37°,8	+ 5°,6
	7.....	2 54	+ 3 5	43,4	6,8
	8.....	2 57	+ 2 28	50,2	8,1
	9.....	3 0	+ 1 51	58,3	9,5
	10.....	3 3	+ 1 14	67,8	10,7
	11.....	3 5	+ 0 38	78,5	11,2
	12.....	3 7	+ 0 1	89,7	11,1
	13.....	3 10	— 0 36	100,8	10,0
	14.....	3 12	— 1 13	110,8	8,7
	15.....	3 14	— 1 50	119,5	7,4
	16.....	3 15	— 2 27	126,9	+ 6,1
	17.....	+ 3 17	— 3 4	133,0	

Aun en este caso, uno de los de más lenta variación de *T* que puede haber, en los doce días que abarca esta efeméride, la variación total asciende á 95°, ó excede de un cuadrante.

V.—Investigación analítica de los cloratos.—Generalización á muchos oxidantes.—Colorimetría de los cloratos.

POR JUAN FAGES VIRGILI.

Las reacciones que se utilizan en la práctica para la investigación de los cloratos son, en el fondo, tan sólo tres, conocidas de antiguo, y dos de ellas consignadas claramente en el Tratado clásico de H. Rose.

Consiste una en reducir los cloratos á cloruros y deducir de la presencia de éstos la de aquéllos. Se practica la reducción, ó fundiendo el clorato solo, ó con cuerpos que faciliten la reducción, ó por vía húmeda, con reductores variados, en líquido ácido ó alcalino, en frío, ó, más generalmente, con larga ebullición. Los reductores más usados en el procedimiento de vía húmeda son el polvo de cinc, cobreado ó no, las sales ferrosas y los nitritos. Los percloratos son también reducidos por calcinación, pero no por vía húmeda; estorban, pues, sólo en el primer caso. Los cloruros, otros compuestos de cloro (ó de bromo y yodo), y aquellos que precipitan con el nitrato argéntico en solución ácida (ferrocianuros, etc.), estorban en todo caso y deben ser destruídos ó eliminados previamente. Esto constituye un enojoso entorpecimiento para este procedimiento en unos casos, y en otros una dificultad que puede hacerle inaplicable. Son, en cambio, sus ventajas, el poderse utilizar en presencia de nitratos y nitritos, y de substancias orgánicas si se opera por vía húmeda. Es muy frecuente investigar los cloratos por este procedimiento.

Otra reacción usada, pero mucho menos, para esta investigación, consiste en reducir parcialmente el clorato en solución sulfúrica débil y en presencia del añil, con el ácido sulfuroso. La inalterabilidad del añil antes de añadir el ácido

sulfuroso, y la decoloración, en cambio, después de añadirle, es característica para los cloratos y constituye esto la ventaja de esta reacción, junto con la amplitud de su aplicación posible. Los inconvenientes son: la dificultad de practicarla bien; pues un exceso de ácido sulfuroso reduce totalmente el ClO_3H á ClH, que no decolora el añil, y es muy fácil excederse cuando el clorato es muy escaso; la presencia de cuerpos como el cloro, bromo, hipocloritos, nitritos, etcétera, que en solución ácida decoloran el añil, y, finalmente, la de cuerpos reductores enérgicos que en líquido ácido convierten el ClO_3H en ClH antes de adicionar el ácido sulfuroso.

La tercera reacción es la más específica. Al clorato sólido, ó á pocas gotas de su disolución, se añade ácido sulfúrico puro, concentrado: en el acto, ó más ó menos pronto, según la cantidad de clorato, la mezcla se pone amarilla y despide un olor intenso especial, debidos aquel color y este olor al peróxido de cloro producido. Sólo los cloratos poseen esta propiedad, y, en consecuencia, esta antigua reacción es tan específica, que ninguna de las modernas la iguala, y menos la supera, en este sentido. Un exceso de previsión y de prudencia hace advertir á casi todos los autores que debe operarse con pequeñas cantidades de clorato, por ser explosivo el cuerpo amarillo. La indicación es exagerada, pues á las dosis en que se opera ordinariamente en análisis no ocurren tales explosiones, y además engaña el aviso á los principiantes que deducen, con bastante lógica, que es una reacción poco sensible. No es cierto; es reacción muy sensible y no es forzoso practicarla con el clorato sólido, como de ordinario se dice; basta que el volumen de la solución sea bastante escaso, para que la dilución del ácido sulfúrico, adicionado luego, resulte exigua é insignificante el calor desprendido. Si no aparece el color y el olor en seguida, no tardarán en manifestarse, uno y otro, aun con menos de 0,0001 gr. de clorato.

lumen y en este orden sobre el clorato sólido ó á pocas gotas de su disolución, producen coloraciones intensas.

La fácil alterabilidad del agua de anilina y el calor desarrollado al añadir el ácido clorhídrico concentrado, que perturba la reacción disminuyendo su sensibilidad, me ha hecho modificar el reactivo, conservando su fundamento, reduciendo la práctica al empleo de un sólo líquido, fácil de preparar, que se conserva indefinidamente, que no origina perjudicial elevación de temperatura y que reconoce mínimas cantidades de cloratos con gran sencillez y sin dudas ni vacilaciones en los resultados. El reactivo que ahora propongo es éste:

A	Acido clorhídrico de 1.12 *D.* puro.....	1.000 c. c.
	Clorhidrato de anilina.....	50 gr.

Conviene emplear clorhidrato de anilina puro para que su solución sea *incolora.* Con frecuencia el producto comercial, aun de fábricas muy acreditadas y anunciado como puro, da soluciones algo coloreadas en amarillo verdoso. Si no se dispone de otro clorhidrato que el técnico, conviene elegir los pedazos más blancos, abandonar la disolución clorhídrica veinticuatro horas, y filtrarla ó decantarla para separar los copos verde-azulados que tal vez se hayan formado. Una solución algo coloreada sirve todavía para muchos casos; pero para pequeñísimas cantidades de clorato ó para las aplicaciones cuantitativas hay que emplear soluciones incoloras.

En algunos casos particulares es preferible esta otra disolución:

B	Acido clorhídrico de 1.145 *D.* (*)	1.000 c. c.
	Clorhidrato de anilina.....	50 gr.,

que sólo se distingue de la anterior por la concentración del ácido clorhídrico. Advierto que añadiendo á 100 c. c. de *B*

(*) Se prepara con 754 c. c. de *ClH* de 1.19 y 246 c. c. de agua.

25 c. c. de agua, se obtiene la solución *A*, algo empobrecida en clorhidrato de anilina, pero que sirve igualmente en la práctica.

Al mezclar *B* con una solución acuosa hay todavía sensible desarrollo de calor: con la solución *A*, la elevación de temperatura es insignificante.

Me apresuro á confesar que este reactivo no es tan específico para los cloratos como la solución nítrica de estrignina, como no lo es tampoco la solución sulfúrica de anilina propuesta por Böttger y por Vitali. En realidad, *es específico del cloro y, por lo tanto, de todos los cuerpos que con ácido clorhídrico, de 1.12 ó de 1,145 de p. e., desprenden cloro en frío.*

Como son muchos los cuerpos oxidantes de esta condición, recomiendo este reactivo como *general de muchos oxidantes,* y como es perfectamente conservable, de preparación muy sencilla, barato y de uso muy cómodo, encarezco su empleo como reactivo de uso frecuente y sensible. Puede formar parte de la colección de reactivos, donde lo tengo yo, y resolver con él pronto, la ausencia ó presencia de un gran número de oxidantes en una mezcla sólida ó en una disolución, más fácilmente que con el añil, ó el engrudo de almidón y yoduro potásico, ó las soluciones sulfúricas de brucina y de difenilamina; reactivos de manejo mas delicado y mas alterables, que pueden reservarse para casos más especiales, en particular los últimos, para nitritos y nitratos que precisamente *no dan coloraciones con las soluciones A ó B, ni impiden con su presencia las que originen los otros oxidantes.*

Considero, sin embargo, la solución clorhídrica de clorhidrato de anilina, como reactivo de aplicación especial á los cloratos, porque permite investigarlos directamente, mejor que con reactivos sulfúricos, en la mayoria de casos que ofrece la práctica, que son en presencia de cloruros, de nitratos, de nitritos y de substancias orgánicas (análisis de los

nítros; pólvoras, explosivos, pastas fosfóricas, medicamentos, y, en ciertas condiciones, en orinas, etc.) y, con poca preparacion del problema, en los cloruros decolorantes y en las soluciones resultantes de la fabricación de los cloratos.

Modo de operar.—Se pone en un tubo, de una gota á 1 c. c. de la solución ó de un granito de la materia sólida, hasta un gramo, según la proporción de clorato ó, en general, de oxidante existente: se añade desde 1 c. c. hasta 4 c. c. de la solución *A*, según la cantidad de problema, sólido ó líquido. Aparece en el acto, ó más ó menos pronto, según el oxidante y su cantidad, una coloración morada, que pasa rapidamente á azul progresivamente intenso, palidece con el tiempo y precipita copos verde azulados más tarde. Si el problema es una disolución, no conviene añadir menos de cuatro veces su volumen del reactivo *A*.

El reactivo *B* se usa de la misma manera y las coloraciones que origina son análogas; pero las primeras son más intensas; las variaciones, más rápidas, y el color final, más pálido. Conviene la solución *B* para los oxidantes que con más dificultad desprenden cloro ó para las soluciones que por ser muy diluídas hay que examinarlas en cantidad algo grande.

Sensibilidad.—Excepto en el caso de cloro libre, las coloraciones citadas las produce el cloro del ácido clorhídrico, que queda libre por la acción del oxidante. En consecuencia, la sensibilidad de la reacción depende de la cantidad de cloro puesta en libertad, y ésta, á su vez, del oxígeno activo del oxidante, á unidad de peso, que depende de su composición. Los cuerpos de peso molecular pequeño con relación á su oxígeno disponible serán los de reconocimiento más sensible, por ejemplo, los cloratos, que siendo alcalinos desprenderán 3 Cl_2 por molécula y el peso de ésta no es grande. Así se reconocen muy cómodamente 0,00002 gr. de clorato potásico y 0,000007 gr. con alguna costumbre.

Depende además, la sensibilidad, del modo de operar: es

naturalmente mayor cuanto menor es el volumen final de la mezcla. Para cantidades muy pequeñas de oxidante disuelto conviene operar con pocas gotas de la solución, concentrada si es posible, mejor que con 1 ó más c. c. de solución, aun conteniendo éstos mayor cantidad de oxidante.

El reactivo *B* es algo más sensible que el *A;* pero si hay poco oxidante, la coloración es más fugaz, hay que tener más costumbre para apreciarla y es conveniente enfriar en seguida la mezcla sumergiendo el tubo en agua fría.

Casos de aplicación. — Respecto al modo como se conducen con este reactivo, forman los cuerpos, en general, estos tres grupos:

1.° *Cuerpos que dan la reacción.* — Cloro, hipocloritos, cloratos, hipobromitos, bromatos, yodatos, peróxidos de hidrógeno, de sodio, de bario, de manganeso, de plomo; cromatos y dicromatos; manganatos y permanganatos; vanadatos, ferricianuros: persales.

2.° *Cuerpos que no dan la reacción ni modifican con su presencia la de los del grupo primero.* — Carbón, azufre, fósforo, cloruros, percloratos, sulfatos, fosfatos y sales estables análogas; sales férricas y áuricas (mientras no estorben por su color), nitratos, nitritos en pequeña proporción, ácido nítrico de 1.20 *D*, ó de menor concentración; compuestos nitrados (nitrotoluenos): arseniatos, molibdatos, tungstatos, titanatos, ferrocianuros: acetatos, citratos, tartratos, sacarosa y un gran número de substancias orgánicas de acción reductora débil ó menos fáciles de clorar que la anilina.

3.° *Cuerpos que no dan la reacción pero impiden ó dificultan la de los del grupo primero.* — Todos los reductores enérgicos que peroxidados no dan cloro con el ácido clorhídrico, como sales ferrosas, arsenitos, sulfitos, etc., compuestos orgánicos muy reductores ó más facilmente clorables que la anilina (algunas substancias fenólicas, cromógenos de la orina, algunos productos de la putrefacción, etc.): el bromo, el yodo, los bromuros y los yoduros, *abundantes* nitritos:

cuerpos que por su intenso color ó por ser complementario del azul no permiten ver el de la reacción.

Observaciones.—La mayoría de los cuerpos que figuran en el grupo primero dan la reacción en el acto ó muy pronto, aun en cantidades bastante pequeñas.

Con el *agua oxigenada, algunos peróxidos (de sodio, de bario) y algunas persales*, no aparece la coloración, sino lentamente, á veces muy lentamente, progresando su intensidad paulatinamente hasta ser tan fuerte como con los cuerpos que la dan en el acto. Con estos cuerpos y, en especial, con el agua oxigenada, que no conviene tratar de concentrar por evaporación, es preferible emplear el reactivo *B*. El modo de conducirse los peróxidos citados, tan análogo al del agua oxigenada, parece indicar que lo primero que originan con el reactivo es peróxido de hidrógeno, y luego éste reacciona lentamente con el ácido clorhídrico, dando el cloro causante de la coloración.

Recomiendo especialmente el reactivo, sobre todo, el *B*, para investigar el peróxido de hidrógeno; pues descubre cantidades bastante pequeñas, con mucha más facilidad que la solución crómica y el éter, aunque es menos característico. Pero insisto en que la coloración puede tardar mucho (más de media hora) en aparecer, sobre todo si es muy diluída la solución del agua oxigenada. Se opera con 1 c. c. del agua oxigenada y 4 c. c. del reactivo *B*. La coloración, en este caso, como en los análogos, se aprecia mucho mejor sobre blanco.

En una nota próxima daré una reacción, también muy sencilla y muy sensible, del agua oxigenada, tampoco específica, pero aplicable en muchos casos.

El *ácido nítrico* de 1.20 de *D*. no da la reacción con el reactivo *A*. Con la solución *B* aparece muy lentamente una débil coloración, cuya persistencia, sin aumentar apenas la intensidad, revela una producción lentísima y constante de cloro; pero no impide reconocer los cloratos y demás oxi-

dantes que dan la coloración en el acto ó casi en el acto, y sólo podría motivar dudas en el reconocimiento de pequeñas cantidades de peróxido de hidrógeno en presencia de mucho ácido nítrico.

Los *nitratos*, aun en gran cantidad, incluso aquellos ($N\,O_3\,N\,a$, $N\,O_3\,A\,g$) que con el ácido clorhídrico algo concentrado producen cloruros y ácido nítrico libre, no dan la reacción si se opera con soluciones. Con nitratos *sólidos*, de los citados, el ácido nítrico que queda libre reacciona lentamente con el ácido clorhídrico de 1.12 ó el más concentrado, de las soluciones *A* y *B*, y al cabo de media hora se inicia una débil coloración, que es franca á la hora próximamente. No puede, pues, confundirse con la coloración que dan los otros oxidantes; y como operando con soluciones, el ácido clorhídrico del reactivo pierde en concentración, no aparece en tal caso coloración alguna y desaparece toda duda.

El reactivo permite distinguir, fácilmente, los *vanadatos*, que dan la reacción de los *molibdatos*, y *tungitatos*, que no la dan, y es muy sensible para aquéllos.

El *bromo* no da la coloración, pero actúa sobre la anilina, dando el bromuro correspondiente que, si no es muy escaso, enturbia el líquido. Su presencia abundante disminuye por esta causa la sensibilidad de la reacción que dan los cuerpos del grupo primero, y en todo caso, tal vez, por la formación de cloruro de bromo.

El *yodo* no da la reacción, ni actúa sobre el reactivo. Estorba por su color y por la formación de cloruro de yodo.

El modo de conducirse el bromo y el yodo con el reactivo, explica que la reacción, con los *bromatos* y los *yodatos*, sea menos sensible que con los cloratos á igual número de moléculas reaccionantes, y que los *bromuros* y los *yoduros* disminuyan la sensibilidad de la reacción siempre y la eviten del todo si están en proporción suficiente.

En efecto; en todo caso se puede suponer que la reacción

se verifica por la acción reductora del ácido clorhídrico sobre el oxidante. Por cada átomo de oxígeno activo del oxidante quedarán libres, en último término, dos átomos de cloro que podrán actuar sobre el clorhidrato de anilina, si no hay otro cuerpo que preferentemente los solicite. En consecuencia, los cloratos, bromatos y yodatos que tienen 3 átomos de oxígeno activo dejarán libres 6 átomos de cloro, quedando aquellas sales reducidas á cloruros, bromuros y yoduros respectivamente:

$$ClO_3R' + 6ClH = ClR' + 3H_2O + 3Cl_2,$$
$$BrO_3R' + 6ClH = BrR' + 3H_2O + 3Cl_2,$$
$$IO_3R' + 6ClH = IR' + 3H_2O + 3Cl_2.$$

En el caso de los cloratos, los 6 átomos de cloro podrán actuar sobre la anilina, si no hay otros cuerpos que lo impidan; pero en el de los bromatos ó yodatos, aun en soluciones puras, no actuarán más que 5, porque el sexto actuará sobre la molécula de bromuro, ó respectivamente yoduro, formada para producir cloruro y bromo ó yodo, que ni uno ni otro dan coloración al clorhidrato de anilina.

Si, antes de adicionar el reactivo, el problema ya tiene bromuros ó yoduros, aun en el caso de los cloratos y en todos en los que es aplicable la reacción, ocurrirá la misma ó mayor pérdida de cloro, disminuyendo la sensibilidad de la reacción y anulándola por completo, si para cada átomo de cloro hipotéticamente libre hay por lo menos una molécula de un bromuro ó yoduro de metal monovalente.

La concordancia entre los hechos y estas interpretaciones conducen á la conclusión, que ya antes expuse, de que el reactivo que propongo es específico del cloro. Los cuerpos que la dan es porque desprenden cloro en las condiciones de la experiencia, incluso el agua oxigenada, y los que no la dan es porque no originan dicho halógeno en las mismas

condiciones, incluso los nitratos, ácido nítrico de *D*, inferior á 1,20, y los nitritos.

Para confirmar todavia más que no hay reacción coloreada cuando no hay cloro libre, he preparado una solución análoga á la *A*, pero con

Ácido bromhídrico de 1.20 *D*

y

Bromhidrato de anilina.

Ni los cloratos, ni los bromatos, ni los yodatos, dan coloración azul con este reactivo: con los bromatos aparece si acaso el precipitado blanco de bromuro de anilina, y con los yodatos, el color del yodo libre.

De la acción perturbadora de los bromuros y yoduros se deriva una conclusión poco agradable para las aplicaciones prácticas. Así como es muy fácil con la solución *A* ó *B* descubrir los cloratos en presencia de cloruros, aun abundando éstos mucho, no es posible reconocer directamente con aquéllas los bromatos en los bromuros, ni los yodatos en los yoduros, que son problemas muy frecuentes. En todo caso, para investigar oxidantes con este reactivo, hay que eliminar los bromuros y los yoduros si los hay. No es difícil: adición de nitrato argéntico hasta débil exceso; adición, después, sin filtrar, de cloruro sódico para precipitar el exceso de plata; hervir un poco, filtrar, y al líquido filtrado, concentrado casi á sequedad, si es posible, y frío, adicionar el reactivo (*). No es indispensable quitar el exceso de plata; pero el cloruro argéntico que, no haciéndolo, se produce al añadir el reactivo de los oxidantes, estorba algo la apreciación del color azul si es débil. De este modo he reconocido cómodamente 0,00005 gr. de clorato potásico en 0,005 gr. de

(*) Si para esta investigación se usara solución sulfúrica de anilina en lugar del reactivo que propongo, siempre aparecería coloración, porque cloruros y nitratos juntos dan color con aquel reactivo.

yoduro potásico, ó sea 1 por 100; pero puede reconocerse sin duda 1 por 1.000 siguiendo igual camino, operando con cantidades suficientes de mezcla.

Los nitritos no dan la reacción de los oxidantes con la solución clorhídrica de anilina, y no impiden la de los cloratos, sino abundando mucho con relación á éstos. Es sabido que los cloratos son reducidos por el ácido nitroso. A pesar de esto, he podido reconocer que en soluciones diluídas, partes iguales de clorato potásico y de nitrito potásico dan con el reactivo una coloración igualmente intensa que la misma cantidad de clorato puro. Asimismo he podido reconocer el clorato en una mezcla de 0,0001 gr. de éste con 0,005 gr. de nitrito potásico, ó sea 2 por 100. Como es muy raro que en la práctica se presenten mezclas tan abundantes en nitrito, puede decirse que en los casos ordinarios de aplicación los nitritos no estorban.

Para la determinación cuantitativa de los cloratos, carecemos de procedimientos francamente buenos; ó son de dudosa exactitud, ó son complicados, sobre todo al aplicarlos á los casos que se presentan en la práctica, casi siempre complejos, por la presencia de otros oxidantes, especialmente nitratos é hipocloritos, ó la de cloruros y percloratos, ó la de aquéllos y estos cuerpos á la vez.

Un procedimiento ya antiguo, pero todavía el más usado, se basa en la reducción de los cloratos á cloruros, y medición de éstos para deducir aquéllos.

La reducción se practica por simple fusión ó previa adición de cuerpos que regularicen, faciliten y completen la reducción, ó eviten las pérdidas que origina el desprendimiento de oxígeno y la volatilidad de los cloruros (*). Son

(*) H. Rose: *Traité complet. de Chim. analy.*, t. II, pág. 811: 1862. París.

dichos cuerpos el carbonato sódico anhidro, el carbonato cálcico, ó el hidrato, ó el óxido cálcico (*), el peróxido de manganeso, el nitrito potásico (**), el azúcar (***), la arena cuarzosa (****) y los sulfitos (*****). Esta forma de practicar la reducción supone la ausencia de toda otra combinación de cloro (ó de bromo y yodo), y, por lo tanto, su previa eliminación si la hay. Generalmente se opera la reducción en esta forma para determinar el cloro total de una mezcla, y dedúcese por diferencia el de un componente clorado de ella, que suele ser el de los cloratos (y percloratos), determinando por otros medios el cloro de los otros compuestos clorados (cloruros, hipocloritos).

En otros casos se practica la reducción por vía húmeda: la lista de reductores utilizados es larga: uno de los más antiguos es el nitrito de plomo en solución diluída nítrica (******): Scholtz (*******) emplea los nitritos alcalinos: Jannasch (********), el ácido nítrico rojo fumante. También se ha propuesto y usa el sulfato ferroso en líquido ácido, y aun de más antiguo, el sulfato ferroso y la potasa (*********). El reductor más usado hoy, por vía húmeda, es el polvo de cinc, ó el cinc cobreado, ó el par cinc-cobre de Glastonne-Traube, en solución neutra, sulfúrica ó acética del clorato.

(*) Pagnoul: *Bulletin de la Station Agronomiq. de Pas de Calais*, 1898, 3; *Methode de l'Etat Belge pour le dosage des perclorates.*

(**) Diettrich: *B. S. Ch. P.*, 1905, pág. 1.435.

(***) Grimbert: *Ann. de Chim. Analyt.*, 1906, pág. 336.

(****) Carnot: *Traité d'Analyse des Substances minerales*, 1898.

(*****) Lemaitre: *Moniteur scientif*, 1904, pág. 253.

(******) H. Toussaint: *Analy. Chim. Quanti.*, por R. Fresenius.—Pellet: V Internationales Kongres für Angewandte Chemie, Berich III, página 754, *Le nitrate de soude perchloraté.*

(*******) *Quimica farmacéutica del Dr. Schmidt*, ed. esp., pág. 612.

(********) *B. S. Ch. P.*, 1906, p. 137.

(*********) Stelling: *Zeit. f. analy. Chem.*, VI, 32. — Fresenius, loc. cit.

Brunner (*) y Brunner y Mellet (**) emplean el persulfato potásico y un cuerpo orgánico, especialmente el formol: B. Grützner (***) opera la reducción con aldehído fórmico y ácido nítrico, en presencia de nitrato de plata, en vasija cerrada, que calienta media hora en baño de maría. Jannasch (****) y Vitali han estudiado la acción del sulfato de hidroxilamina.

La reducción por vía húmeda requiere la ausencia de combinaciones de bromo y de yodo, y casi todas las del cloro. Los percloratos no estorban, porque no son reducidos, y la materia orgánica, si no abunda, tampoco perjudica en general. Por esto se aplica este procedimiento, en particular, en presencia de estos cuerpos en que no es aplicable la fusión, y si hay cloruros hay que determinar los cloratos por diferencia lo mismo que operando por vía seca.

Lo mismo operando por vía seca que por la húmeda, el procedimiento es relativamente exacto si el problema no exige la determinación por diferencia de los cloratos, supuesto que se eliminen con mucho cuidado las causas de error y, en especial, se evite la introducción de cloruros con los reactivas empleados, en proporción generalmente grande, y que suelen contener cloro incluse el polvo de cinc. Si se opera por diferencia, y es necesario muchas veces, el procedimiento desmerece mucho, y tanto más, cuanto menor es la diferencia teórica de las dos mediciones de cloruros, pues todos los errores afectan á dicha diferencia. Así, en casos algo exagerados, de mucho cloruro y poco clorato, ó nada, no es raro medir cloratos que no existen, ó no medir los que estén en pequeña proporción.

Otro método, antiguo, de medición de cloratos es el yo-

(*) *Journal suisse de Chimie et Pharmacie,* 23 avril 1904.
(**) *Jour. suisse de Chim. et Phar.*, 15 Febr. 1908.
(***) *Química farm. del Dr. E. Schmidt.*, ed. esp., 612.
(****) Loc. cit.

dométrico, y, de antiguo también, es discutido. Bunsen (*) calentaba el clorato con ácido clorhídrico concentrado, y los gases desprendidos los dirigía á una solución de yoduro potásico, en la forma sabida, determinando luego el yodo libre. Es procedimiento bastante usado todavía, aunque más bien se opera en frasco cerrado, conteniendo el ácido, el clorato y el yoduro, que se calienta en baño de maría como ya aconsejó Finkener (**), y previa eliminación del aire con anhídrido carbónico. Luther y Butter (***) regularizan la acción sobre el yoduro potásico, empleando ácido sulfúrico y una sal de vanadilo.

Este método no es aplicable, en presencia de cuerpos que en las mismas condiciones dan cloro, que son muchos, sobre todo calentando. En tales casos sirve más bien para medir la acción oxidante total, para medir por diferencia los cloratos con los mismos posibles inconvenientes del método anterior. Esto es lo que á veces se hace en presencia de nitratos ó de hipocloritos.

Tampoco es aplicable el procedimiento en presencia de reductores, y es un error, de algunos autores, emplearlo para medir el clorato potásico de la orina y de otros líquidos que contienen substancias orgánicas fácilmente oxidables ó clorables, como especificaré en otra nota.

Basados también en las acciones oxidantes de los cloratos, se han propuesto otros métodos, como la ebullición de la solución sulfúrica con sulfato ferroso y medición de la sal férrica producida, ó de la sal ferrosa remanente, previa medición de la adicionada. Carnot (****), especialmente adopta lo último. Desbourdeaux (*****) aplica á los cloratos la vo-

---

(*) *Annal. de Chim. u. Phar.*, LXXXVI, p. 282: Fresenius, loc. cit.
(**) H. Rose: loc. cit.
(***) *Zeits. für Anal. chem.*, 1907, p. 521.
(****) Loc. cit.
(*****) *Ann. de Chim. Analy.*, 1904, pág. 167.

lumetría del mismo autor para los nitratos, basada en la oxidación del ácido oxálico en solución sulfúrica, en presencia del sulfato manganoso, que regulariza la oxidación, y medición del exceso de ácido oxálico que permite calcular el clorato.

Cantidades muy pequeñas de clorato se determinan colorimétricamente por la coloración amarilla, que con ellos origina el ácido sulfúrico concentrado. No conozco otra colorimetría de los cloratos, ni otra aplicación de ésta, que el ensayo de los nitros refinados para la preparación de explosivos.

Durante mucho tiempo he tenido la idea preconcebida de que la coloración azul que dan los cloratos con la solución de clorhidrato de anilina en ácido clorhídrico, que propongo como reactivo general de oxidantes y especial de cloratos en los ensayos corrientes de éstos, no podría utilizarse como metódo colorimétrico. Las variaciones del color, con el tiempo, alejaban mi ánimo de hacer un estudio sobre este particular. Sin embargo, no es así y fué error mío tal creencia: se puede utilizar esta reacción para las determinaciones cuantitativas, tan bien como otras colorimetrías, y aun mejor que muchas; pues por una singularidad del reactivo, se puede aplicar á cantidades muy pequeñas de clorato, 0,0001 gr., y á cantidades relativamente grandes, 0,01 gr.; á soluciones que no contengan más que 0,02 gr. de clorato potásico por litro, y á soluciones que contengan 10 gr. por litro.

En efecto; adicionando á volúmenes iguales de soluciones acuosas de concentración distinta en clorato, cuatro veces su volumen del reactivo *A*, aparece la serie de coloraciones características, más ó menos pronto, según la proporción de clorato; se suceden las variaciones de color é intensidad que he indicado antes; al principio, estas variaciones son bastante rápidas para que el diferente tiempo transcu-

rrido desde que se adicionó el reactivo á cada disolución, por poca que sea tal diferencia, motive intensidades de color que no son proporcionales, en un momento dado, á la concentración de cada disolución, como se necesita para poder comparar. Pero las variaciones son cada vez más lentas, y á los 30 minutos próximamente, lo son tanto, que ya se marca con todo rigor la escala de intensidades en relación exacta con las concentraciones correspondientes, y se pueden comparar aquéllas entre sí como en las colorimetrías más cómodas. Sigue, sin embargo, variando el color ó su intensidad, pero lentamente y conservándose la gradación del conjunto, hasta que, pasado un tiempo muy superior al necesario para comparar, variable con la concentración y en sentido inverso, empiezan á enturbiarse los líquidos, se hace otra vez difícil la comparación y más tarde, imposible. En la mayoría de casos, el tiempo disponible para poder comparar es superior á media hora. La colorimetría es, pues, posible.

Si se repite la experimentación anterior en todo igual, pero empleando la solución *B* en lugar de la *A*, se llega también á una escala colorimétrica útil, pero con estas dos importantes diferencias: 1.ª, bastan de 10 á 15 minutos para obtener la escala de colores comparable; 2.ª, la coloración final, á igual concentración en clorato, es mucho más pálida. Esta segunda circunstancia es la que permite aplicar la colorimetría que propongo á concentraciones en clorato de límites tan distanciados. Para cantidades algo grandes de clorato, se debe emplear forzosamente la solución *B*, pues con la *A* resultarían coloraciones demasiado intensas para poderlas comparar. Inversamente, para soluciones muy pobres en clorato debe utilizarse la solución *A*, pues la *B* da coloraciones finales apenas visibles. Según mis numerosos ensayos, conviene el líquido *A* para cantidades de clorato potásico comprendidas entre 0,0001 gr. y 0,0022 gr., y el líquido *B* para las de 0,0005 gr. hasta 0,0070 gr., suponiendo en ambos

casos que la solución del clorato ocupa 5 c. c. y que se adicionan 20 c. c. del reactivo. Para cantidades mayores de clorato, hasta 0,01 gr., hay que operar con 10 c. c. de solución de dicha sal y 40 c. c. del reactivo, forzosamente *B*. Teniendo costumbre, se puede tambien operar, en este último caso, con 5 c. c. de solución y 20 c. c. de reactivo; pero es difícil comparar bien por la excesiva intensidad y, sobre todo, porque el líquido se enturbia, precipitándose el colorante, tanto más pronto, cuanto más abunda.

La causa de ser de diversa intensidad la coloración final, para la misma cantidad de clorato, según se emplee el reactivo *A* ó el *B*, es la diferente concentración del ácido clorhídrico; de donde se deduce que, siendo las soluciones tipos neutras, es necesario que la de clorato que se ensaya también lo sea; de lo contrario, la concentración final en ácido clorhidrico, y, por lo tanto, las coloraciones á igual cantidad de clorato, serían diferentes. En la práctica, las soluciones de clorato que se ensayan son neutras ó alcalinas; pocas veces ácidas. La adición de ácido acético ó de carbonato sódico, hasta casi neutralidad, es necesario, en los dos últimos casos, antes de empezar la colorimetría.

Aunque la concentración del ácido clorhídrico influye en la coloración final, una vez obtenida no la modifica la adición *de agua*, sino por el hecho de la dilución. En consecuencia, se puede practicar la colorimetría de los cloratos, con el reactivo *A* ó *B*, por el método de comparación, con una escala de soluciones tipos ó por el método de las diluciones sucesivas.

1.° *Escala colorimétrica.*—Para prepararla es lo mas cómodo tener una solución de clorato potásico puro de 5 gr. por litro. Esta solución es demasiado concentrada para preparar con ella inmediatamente la escala colorimétrica; es preferible en cada caso tomar de ella los c. c. convenientes y agua hasta 100 c. c., para obtener una disolución de dilución apropiada para el momento. En cada tubo se pondrán de esta di-

solución los c. c. que convenga (que no deben ser mas de 5 en el que mas) y agua hasta ocupar justos 5 c. c. La diferencia en la cantidad de clorato de uno á otro tubo puede ser de 0,0005 gr. para cantidades totales comprendidas entre 0,005 gr. y 0,01 gr.; de 0,00025 gr. desde 0,002 á 0,005 gr., y para cantidades menores, las diferencias pueden ser solamente de 0,0001 gr. La escala así construída se marca muy bien, teniendo costumbre de esta clase de determinaciones, y permite apreciar cómodamente 0,0001 gr. en los términos más superiores, y 0,00001 gr. en los más inferiores.

Como la escala es tan extensa, cuando no se sepa aproximadamente el contenido en clorato del problema, conviene hacer un tanteo para saber los términos de la escala que importa construir.

De la solución problema se toman también 5 c. c., ó menos, y agua hasta ocupar exactamente 5 c. c. Se adicionan 20 c. c. del reactivo *A* ó del *B, lo más rápidamente posible,* á todos los tubos; se agita, y pasados 25 minutos, si se empleó el reactivo *A*, y 15 minutos, si el *B*, se comparan los colores en la forma usual.

2.° *Diluciones sucesivas.*—En un tubo graduado de 50 c. c. se ponen 5 c. c. de la solución neutra que se ensaya; en otro tubo igual, clorato potásico en cantidad conocida y poco menor á la que se juzga que tiene el problema, y agua hasta 5 c. c. justos. Se adicionan á ambos tubos 20 c. c. del reactivo, se agita y, *pasados* 25 minutos si se empleó el reactivo *A*, y 15, si el *B*, se comparan las intensidades. Supuesto que no sean iguales, se diluye la solución problema, que supongo la más intensa, con *agua* (no con ácido clorhídrico), poco á poco, mezclando cada vez, y comparando con el líquido tipo hasta tener intensidades iguales. Entonces se calcula el clorato en la forma usual de esta clase de colorimetrías.

Los dos procedimientos dan buenos resultados; es más

sencillo el segundo; pero aquí, como en todas las colorimetrías, es más exacta la comparación con una escala.

Como ejemplo de resultados indico los siguientes:

ClO_3K puesto.	ClO_3K encontrado	ClO_3K puesto.	ClO_3K encontrado
0,00960 gr.	0,00960 gr.	0,00240 gr.	0,00237 gr.
0,00960 »	0,00940 »	0,00213 »	0,00212 »
0,00650 »	0,00645 »	0,00213 »	0,00211 »
0,00450 »	0,00460 »	0,00210 »	0,00210 »
0,00250 »	0,00243 »	0,00150 »	0,00148 »
0,00249 »	0,00246 »	0,00094 »	0,00094 »
0,00240 »	0,00240 »	0,00094 »	0,00093 »

He de advertir que la mayoría de estas disoluciones ensayadas no era de clorato sólo, sino más complejas, y algunas contenían substancia orgánica. La determinación primera está hecha operando con 10 c. c. de disolución y 40 c. c. del reactivo *B;* las otras, con 5 c. c. de aquélla y 20 c. c. de reactivo *B* ó *A* según los casos.

En notas próximas expondré la aplicación á los casos más importantes que se presentan en la práctica.

No he aplicado esta colorimetría sino á los cloratos; pero, seguramente, es extensiva á los bromatos y á los yodatos, y á otros oxidantes, con las restricciones que, en todo caso, se deducen de las indicaciones de esta nota.

VI. — Estudio comparativo de los instrumentos más usados en Sismología.

POR MANUEL-M.ª S. NAVARRO (S. J.)

Al presentarse una agitación de suficiente intensidad se mueven las varillas que soportan entrambos péndulos, cerrándose el circuito, con lo que se para el reloj, etc., registrando la hora del movimiento.

Es también bastante sensible el sismoscopio Cancani (*), compuesto de siete péndulos invertidos con períodos diferentes, y terminados por pequeñas hélices, cuyos extremos, al moverse éstas, tocan los radios de un círculo de platino colocado encima, cerrándose así el circuito (**).

Si se desease gran rapidez en la inscripción de dos velocidades desde el principio de los movimientos del sismo, y, forzosamente, por lo tanto, al menor barosismo, cambio de temperatura, sobre todo, algo brusco, etc., pudiera ensayarse el sismocopio de doble péndulo, también del mismo Dr. G. Agamennone, instrumento que, como ya lo indica su inventor, pudiera servir de péndulo fotográfico tipo Milne ó Von Rebeur con algunas modificaciones y los aditamentos indispensables.

Consta su segundo modelo de un péndulo horizontal (***)

(*) *Sismoscopio ad effeto multiplo,* ibid IV (1898), págs. 68-70.

(**) Precio, 45 liras; constructor el mismo Fascianelli.

(***) G. Agamennone.— *Sopra un sismoscopio destinato ai terremoti lontani. Boll. S. S. I.* pp. 267-277, fig. 2.

Con un Omori de 106 kilogramos de masa construído en Cartuja (Granada), se obtenían por este procedimiento, practicado muy á la ligera, aumentos de 70 y más veces, aunque la paja procedía por saltos.

análogo á los Omori, etc., de 10 kilogramos de masa. 30 centímetros de distancia entre el punto de apoyo y el centro de la masa y suspendido de un pilar á 4,50 metros de altura por un hilo de acero de menos de un milímetro de diámetro, cuya flexibilidad dispensa el uso de prisma, puntas, etc., en el punto de suspensión donde sólo existe un sencillo mecanismo para centrar y dar al péndulo el período oscilatorio conveniente.

De la parte anterior de la masa sale un espolón, y de allí un finísimo alambre de latón, sujeto á la extremidad posterior de una paja, suspendida, un poco más adelante de otro hilo metálico igual, de un soporte también con sus tornillos de centraje. Esta paja, así montada, constituye un péndulo horizontal Hengler-Zöllner y se mueve al oscilar el péndulo, aumentando considerablemente la amplitud de sus oscilaciones.

Si se termina la paja, por un alambre fino de platino unido convenientemente con una pila, relacionada con el electroimán del disparador de la gran velocidad, y se pone dicha punta dentro de una pequeña abertura en otra lámina de platino convenientemente dispuesta y fija en el muro, por ejemplo, al agitarse el péndulo se cerrará el circuito y funcionará la gran velocidad.

III

ENSAYO DE JUICIO CRÍTICO

Pasemos á la última y más ardua parte de este trabajo, para el cual hubiéramos podido allegar mucho mayor número de descripciones de instrumentos, como los péndulos eléctricos registradores á distancia, de S. A. S. el Príncipe B. de Galitzine y del Profesor G. Goldschmidt; el colosal péndulo de 17 toneladas del Profesor Wiechert, que, con el hoy enorme au-

mento de 2.200 veces, da resultados muy notables en los terremotos de epicentro cercano; el de 2.000 kilogramos del fecundísimo Dr. Agamennone, etc., etc., pero todavía no se han publicado datos suficientes para juzgar de algunos; otros pertenecen aún á la categoría de proyectos, y los hay asimismo no descritos por sus inventores.

Varios son modelos únicos, y alguna vez hasta muy inferiores á los citados, y por eso los omitimos.

Daremos, pues, nuestra sincera opinión en este ensayo de juicio crítico, creyendo que más perjuicios causa en el terreno de la ciencia el criterio de alabarlo todo que el manifestar los defectos ó lo que se considere como tal, acaso con ruda franqueza, ciertamente susceptible de error, pero leal y sin deliberado apasionamiento.

Para juzgar del valor práctico de un sismógrafo, hace falta combinar numerosos factores, relacionados con el instrumento en sí y su funcionalismo con los gráficos obtenidos y finalmente, con los objetos que se intentaron.

Un instrumento, para que pueda llamarse completo, ha de reunir las siguientes condiciones: baratura, solidez, fácil manejo y entretenimiento poco costoso, en lo que respecta al primer punto.

Sus gráficos han de ser claros, exactos y lo más numerosos posibles. En fin, á no contar más que con un solo instrumento, ha de poder éste registrar bien así los terremotos lejanos como los cercanos.

Estas condiciones son muy difíciles de cumplir, pero no faltan hoy instrumentos que las reúnen de modo satisfactorio y con esperanza de no ser desechados pronto, achaque frecuente en las ciencias de rápido desarrollo, y más en la Sismología.

•

Precisa, sin embargo, hacer algunas salvedades respecto de nuestra manera de interpretar los resultados prácticos, para deducir el valor relativo de los sismógrafos.

Uno ó algunos gráficos malos ó aun detestables, por la confusión ó falta de detalles, amplitud insignificante, *ganchos*, que indican también el mal funcionalismo del instrumento en un solo sismo, si bien predisponen en contra del sismógrafo, no bastan para juzgarlo; pero si el gráfico, ó algunos de los gráficos procede del inventor, ó de estaciones donde los obtenidos con los demás instrumentos son buenos, con rarísimas excepciones, y el hecho se repite con varios sismos, creemos que esto basta para juzgarlo respecto de su categoría, cuando menos, y aun respecto de otros sismos (lejanos, muy lejanos, próximos, locales). Si esto se repite y además los *Boletines* que publican las observaciones obtenidas con dicho instrumento las traen muy deficientes, malas ó nulas, no creemos pueda pedirse más contra él. Pudo haber llenado un gran papel en su tiempo; hoy pasó.

Por consiguiente, aquí hablamos del valor práctico de los instrumentos en el supuesto de que están *bien construídos*, ó que, por lo menos, lo hayan sido por sus inventores, *y que se les cuide bien.*

En efecto, es más difícil de lo que á primera vista parece que un péndulo funcione satisfactoriamente. Muchas veces hay que relacionar enormes masas con piezas delicadísimas, y una montura poco sólida, una palanca mal equilibrada ó demasiado pesada, un alambre de suspensión excesivamente grueso, una punta algo roma, una aguja mala, etc., etc., bastan para inutilizar el mejor instrumento, ó siquiera para disminuir muchísimo su rendimiento.

Nada de esto, sin embargo, debe extrañar si recordamos la pequeñez de las fuerzas que obran sobre las masas en las desviaciones más usuales, bastando medio gramo para desviar de la vertical un segundo de arco, la ya respetable masa de cien kilogramos, si lo aplicamos convenientemente.

Para poder juzgar con imparcialidad, precisa no contentarse con estudiar los instrumentos en los libros, revistas, etc., sino acudir más bien á la inspección de los gráficos y á los

Boletines de los Observatorios, y aún en éstos, en vez de contar el número de sismos registrados, comprobar cómo lo han sido.

Lo primero, dada la laudable costumbre, cada vez más extendida, de archivar los gráficos, es mucho más fácil que lo segundo, sobre todo si se publican los resultados de tarde en tarde. Basta buscar en aquéllos los movimientos hacia la hora en que se realizaron, y si éstos no fueran insignificantes, etc., raro será, aun con instrumentos muy medianos, el no hallar siquiera algún leve vestigio, alguna desviación de décimas de milímetro, correspondiente á la fase máxima ó al principio del sismo, según sea pequeño ó grande el aumento externo, relacionado con la longitud correspondiente del instrumento.

Una cosa muy distinta es poder deducir la distancia del epicentro, marcar las diferentes fases, etc., que requiere, no pocas veces, instrumentos de primer orden, y más difícil aún poder unir á esto una exacta determinación, en lo posible, de los períodos de las distintas ondas.

Para lo último hace falta que el péndulo tenga la menor tendencia posible á adquirir su propio período oscilatorio, esto es, que se halle provisto de un aparato de amortiguamiento, si su período es corto, ó que éste sea superior á treinta segundos, y en todo caso, lo más exento que se pueda de rozamientos perjudiciales, que, si se hallan muy acentuados, hacen que el péndulo inscriba todos los movimientos del terremoto, ó poco menos, con su mismo período oscilatorio é irregularmente exagerados los que lo tenían, naturalmente, análogo al suyo, perdiéndose así datos muy interesantes.

Otra de las ventajas del *apagador,* cuando su influencia es grande, esto es, cuando se hace que el péndulo trabaje con un *amortiguamiento suficiente,* es que permite limitar las fases del sismo, coartando los movimientos secundarios del péndulo. Verdad es que le quita, en estas circunstancias,

algo de sensibilidad ficticia al instrumento; pero teniendo varios, esto no es inconveniente, porque puede utilizarse una componente, la *NS*, con él, y la otra, la que suele dar mayores amplitudes á igualdad de circunstancias, la *EW*, sin él, ó sólo con uno bastante débil. Sin embargo, aun teniendo uno sólo, debe usarse de preferencia á sacrificar á algún movimiento más registrado como un vestigio, el tener buenos gráficos de continuo.

Alguna vez, sin embargo, pueden apreciarse en los de péndulos de período muy corto, cual ocurre con los Vicentini, los distintos períodos de las diferentes partes de un sismo; lo afirma el P. José Algué, S. J., Director del Observatorio de Manila y del *Weather Bureau*, de Filipinas (*), y el hecho lo hemos podido comprobar con los gráficos correspondientes á los grandes terremotos de Colombia y de San Francisco de California, obtenidos con el Vicentini de Cartuja, comparados con los del de Manila; pero esto es debido, por una parte, á la enorme diferencia entre el ritmo de los movimientos de la tierra durante la porción principal y aun final de un sismo y al propio del instrumento, y por otra, á funcionar el aparato multiplicador un tanto á la manera de amortiguador. Esto no implica que, según se deduce del *Boletín del Instituto de Física de Padua*, hoy trate el Profesor Vicentini de proveer de un aparato de amortiguamiento á su *péndulo universal.*

Otro factor, en algunos casos nada despreciable, y que precisa tener en cuenta, es el coste anual, tanto de material gráfico, como de vigilancia, limpieza, etc.

Respecto de lo último, los péndulos ligeros y el Vicentini con los demás verticales son muy superiores á los horizontales pesados, de los cuales algunos tipos, como los Stiattesi,

---

(*) *Bulletin*, for April, 1906, pág. 84.—Consúltese el *Bolletino* de Padua también.

requieren desmontarlos con alguna frecuencia, necesitándose el auxilio de un par de inteligentes obreros y no escasa pérdida de tiempo.

En los de otros tipos, esta maniobra rara vez es necesaria, pues se hace apelando á los tornillos de centrado, etc., sin tener que separar la masa del péndulo.

En cambio, es preciso cuidar con esmero extraordinario del juego de las distintas piezas y de la presión de las agujas en los Vicentini, si se quiere que sirvan; y en los otros de registro mecánico, las conexiones del péndulo con el aparato multiplicador pueden, ó evitar que señale los movimientos pequeños, característicos del comienzo de los sismos, ó, por el contrario, marcar bien estas vibraciones y otras de causa extrasísmica continuamente, ó poco menos, y pasar por alto, por el contrario, las agitaciones más amplias, etc., etc. También los péndulos fotográficos, sobre todo los más sensibles, requieren no pocos cuidados respecto del juego de las piezas, disposición y foco de luz, etc., terminando este largo paréntesis indicando que, para comprender el esmero que exige el cuidar un buen sismógrafo, basta recordar que se trata de un instrumento capaz de transmitir, al través de millares de kilómetros, agitaciones que á veces no son destructoras en el punto más atacado, ó si lo son, dejan de ser sensibles á una distancia no muy considerable.

Aparte de lo enojoso y poco limpio que resulta el ennegrecido de las bandas de papel, su valor es muy escaso, de modo que, aun uniéndole el alcohol industrial y goma laca, etcétera, para barnizarlas, fijando así los gráficos obtenidos, llega á 50 pesetas el gasto de las dos componentes de un péndulo de inscripción mecánica al año, empleando las velocidades corrientes, esto es, hasta un metro por hora.

Los péndulos fotográficos son mucho más caros, espe-

cialmente los Rebeur-Ehlert, cuyo coste anual excede de 700 pesetas, con la velocidad de sólo 12 centímetros por hora. Los Bosch gastan un *marco* diario de papel, ó sea menos de 500 pesetas al año, con la velocidad horaria de 90 centímetros, que resulta menos de 200 pesetas para una sola componente, con la velocidad de 60 centímetros, más que suficiente en casi todos los casos. Los Milne requieren de 8 á 10 libras esterlinas entre papel sensible y reactivos, añadido el pequeño coste de una luz de petróleo permanente.

En cambio los péndulos fotográficos, con gran velocidad de desarrollo en el papel, requieren lámpara especial, eléctrica de incandescencia, como la empleada por el doctor Schütt (*), en Hamburgo, ó de gas, como la del Dr. Straubel (**), que son de crecido gasto, y hay que renovarlas con frecuencia; la primera se ha de instalar en derivación de otra de 25 bujías, cuando menos. Quizás resulta más económico, y es de seguro más cómodo, el empleo de lámparas de un solo filamento de tantalio é intensidad de dos ó tres bujías, con voltaje muy escaso, y accionadas empleando pilas ó acumuladores.

El costo de la instalación se relaciona con la sensibilidad y dimensiones de los aparatos, dato que solo apuntamos para no dar al presente trabajo exageradas proporciones.

Volviendo á la sensibilidad de los aparatos y á su utilidad práctica, se ponen en un cuadro, imitando al Profesor Wiechert (***), del que son las cifras marcadas, los datos referentes á la sensibilidad teórica de los instrumentos, no

---

(*) *Die Horizontalpendel-Station Hamburg*, S. 206; *Sond. aus Beitraege zur Geophyik*, IV Bd, 2 Hft.

(**) *Beleuchtungsprinzipien... In Verhandl. der erste...* SS. 290 bis 304.

(***) *Prinzipien... in Verhandl. der erste...* S. 269.

sin declarar como no pocas veces los resultados prácticos difieren, de manera deplorable, de los prometidos.

Representa T el período oscilatorio completo, expresado en segundos; l la longitud en metros, correspondiente al péndulo simple que lo tuviera; L la longitud correspondiente, multiplicada por el aumento externo del instrumento, ó sea su longitud total; $\frac{L}{206,000}$ la desviación en milímetros que marcarán en los gráficos por un segundo de arco de desviación de la vertical, y A el aumento externo del péndulo, ó sea el propio del aparato multiplicador.

CONSTANTES DE ALGUNOS SISMÓGRAFOS

A) Componentes horizontales

INSTRUMENTOS	T segundos.	l metros.	L metros.	$\frac{L}{206.000} = 1''$ milímetros.	A	NOTAS
Sismometrógrafo Agamennone.	5	6,25	62,5	$^1/_3$	10	Observatorio Fabra, Barcelona.
Idem Cancani	4,4	4,64	92,8	$^1/_2$	20	Idem.
Iden íd..	10	25	312,5	1,5	12,5	Observatorio de Catania.
Microsismógrafo universal Vicentini ..... *	2,4	1,50	150	$^3/_4$	100	Observatorio del Ebro (Tortosa), Fabra.
Péndulo fotográfico Milne... *	15	56	400	2	7	
Péndulo horizontal Grablovitz.	17	72	586	2,8	8	Ischia, O. del Ebro.
P. h. Agamennone.....	6	9	450	2,3	50	Estación Central de Estrasburgo.
P. h. Mainka, 100 kgs	6	9	765	3,7	85	
P. invertido Wiechert, 80 kgs..	4-10	4-25	160-2.000	$^3/_4$-10	40-80	
P. *pesado de Estrasburgo*.....	15-50	56-625	885-9,400	4,3-46	15	

P. invertido Wiechert, 125-300 kilogramos	4-15	4-56	160-9,240	$^{3}/_{4}$-45	40-165	
P. fotográfico R. Ehlert..... *	12	36	3,600	17	100	
P. ídem R. Bosch.....	12	36	4,800	23	133	
P. *astático* Wiechert, 1.000 á 1.200 kgs.	9-15	9-56	900-16,800	4,5-84	100-300	
P. largo Omori.....	40-60	400-900	6,000-18,000	30-90	15-20	Hōngō (Tōkyō).
Tromómetro Omori	30	225	27,500	130	120	Idem.
Tromometrógrafo Alfani.....	40	400	8,000	40	20	Ximeniano (Florencia).
B) Componentes verticales						
Componente vertical Agamennone.....	2	1	50	$^{1}/_{4}$	50	Estrasburgo.
Idem íd. Vicentini.....	1,2	0,36	29-100	$^{1}/_{7}$-$^{1}/_{2}$	80-280	
Idem Wiechert, 160 kgs.....	6	9	360-1,180	1,8-5,5	40-120	
Idem íd., 1.300 kgs.....	7	12,27	1,000	5	160 *	* El sistema compensador de este péndulo reduce su sensibilidad, según sus constructores, á las cifras apuntadas.
Gravímetro trifiliar de Schmidt.	1,5	0,56	230	1,1	400	
Instrumento de Schlüter.....	15	56	9,000	43	160	

Partiendo de lo anterior, examinemos las conclusiones deducidas, analizando los datos recogidos referentes á un mismo movimiento, y también el número de movimientos registrados, aunque sea menor su interés.

No se discutirá si los movimientos de mayor amplitud en los terremotos son inclinaciones de la vertical ó desplazamientos laterales, hipótesis la última aceptada por sismólogos de tanta categoría como Omori para explicar el hecho de que los aparatos más cortos marquen á veces desviaciones mayores en los gráficos (*); sin embargo no huelga recordar que los movimientos preliminares del sismo resultan casi siempre en función directa del aumento, y los de la porción principal, por el contrario, se relacionan con la longitud; de manera que, en un péndulo corto, pero de mucho aumento, el Vicentini por ejemplo, la máxima amplitud parecerá corresponder casi á los primeros movimientos, mientras que aparecerán muy pequeños en un péndulo horizontal de gran período y poco aumento, hallándose el máximo en éstos y en los invertidos, en la porción principal, dato que importa no olvidar en el estudio de los gráficos.

Es indudable que la influencia de un rozamiento excesivo, del aumento externo demasiado considerable, del período muy largo comparado á la resistencia del péndulo, etc., etc., y sobre todo de los defectos de construcción, es poderosísima y produce, á lo menos en algunos casos, el hecho que cita el profesor de Sismología de la Universidad de Tokyo, y explica á veces las notables divergencias observadas.

Fuera de los instrumentos destinados á registrar las violentas sacudidas próximas, ó, cuando menos, las *muy sensibles* locales, hay que rechazar la inscripción con tinta sobre papel blanco, á pesar de sus ventajas, ó lo que de tales califican sus defensores, y sería la mayor limpieza y facilidad en

---

(*) *Results of horizontal pendulum observations... in Publications*, núm. 5, pág. 45.

el estudio de los gráficos, evitando las tareas enojosas del ahumado de las bandas y el fijarlas, etc.

Aparecen las líneas mucho más gruesas que las trazadas sobre el papel ennegrecido, la presión de la pluma inscriptora es incomparablemente mayor (*), y aunque no lo hemos ensayado, ocurre pensar que, ó los recipientes han de ser voluminosos, ocasionando una presión variable que inutilice ó poco menos el instrumento, ó habrá que estar llenándolos continuamente, operación ni agradable, ni recomendable, ni tampoco muy limpia.

Hay, pues, que recurrir á la inscripción mecánica ordinaria con estilete sobre el papel ennegrecido á la lámpara, etcétera, ó al registro fotográfico.

Dentro de ambos sistemas de instrumentos se establecen categorías que quizás parezcan algo arbitrarias, pero las consideramos indispensables. En las ciencias experimentales los medios de observación se perfeccionan y cambian con prodigiosa rapidez, y si algo debe extrañar tocante á los de la Sismología, es el precio moderado que alcanzan los más perfectos instrumentos, inferior al de un buen anteojo de aficionado y comparable sólo al de los buenos microscopios, y eso que éstos se construyen en gran número, y el de aquéllos, si bien creciente, es todavía escaso. Además, lo reciente de las observaciones sismológicas hace que muchas veces se adquieran instrumentos sólo porque otro Observatorio los emplea del mismo autor, por la simple inspección de un catálogo, ó, á lo sumo, leyendo su descripción, ni con mucho suficiente. También es bastante escaso el número de casas constructoras.

Los resultados prácticos obtenidos *normalmente*, con un

(*) Según el profesor Wiechert, el rozamiento es 100 veces superior y las líneas diez veces más gruesas. Lo primero no parece discutible. Lo segundo alguna vez resulta exagerado, aunque lo corriente es que pasen de 0,5 mm. de ancho.

instrumento bien construído, montado y cuidado, debe ser el criterio de todo juicio crítico de cualquiera aparato, agrupándolo *con los demás existentes*, apreciando su valor actual, no el que antes pudo haber tenido, aunque fuera muy considerable, ni su misma influencia en el desarrollo de la ciencia.

Conforme á tal sentir, un instrumento podrá apellidarse universal ó completo, si es capaz de registrar todo género de sismos locales, cercanos, lejanos y aun remotosísimos, y para ser considerado de primer orden, ha de dar el mayor número de gráficos legibles y utilizables.

Lo último casi exige el empleo del amortiguamiento. Lo primero, una velocidad conveniente en el receptor y el aumento externo suficiente unido á un razonable período. Ambas cosas son una perfecta combinación entre las diferentes partes del instrumento, asociada á esmerada construcción é inteligente cuidado.

Un instrumento es de segundo orden cuando da resultados verdaderamente notables en algunos casos, y presenta frecuentes ó continuas deficiencias en algún punto importante. Es, últimamente, de tercero, cuando sólo rara vez, ó con escasa frecuencia, da resultados aceptables.

Para nosotros, el mejor péndulo universal existente es el astático de 1.000 á 1.200 kilogramos de Wiechert, y creemos serán poco inferiores sus recientísimas reducciones, sobre todo el modelo de 200 kilogramos que construye la casa Spindler & Hoyer, de Gotinga, empleando, en ese caso, el aumento de solo 80 veces por 14 segundos, ó algo menos, de período; de este tipo se está construyendo para la nueva estación sismológica del Observatorio de Cartuja.

Los péndulos largos de Omori, aunque carecen de mecanismo de amortiguamiento, dan numerosos y admirables gráficos; pero no es raro que registren de modo deficiente los primeros movimientos de los sismos, á causa de su escaso aumento externo. Los tromómetros del propio autor tienen aumento suficiente; en cambio su masa, 50 kilogra-

mos, es sobrado pequeña, y el roce, en los movimientos no muy rápidos, resulta considerable (*).

Los péndulos horizontales bifiliares Mainka son muy buenos instrumentos, sobre todo para los terremotos algo próximos, aun muy débiles. Los gráficos resultan iguales y aun alguna vez superiores á los del Wiechert; en los lejanos son bastante inferiores. Es de sentir que un buen fabricante, que no trabaje caro, no se hiciese cargo de su construcción, por demás sencilla, logrando que no pasase de unas 300 pesetas el modelo completo de 100 kilogramos.

También pueden considerarse instrumentos de primer orden los péndulos horizontales Stiattesi por su extremada sensibilidad, y dar, con gran frecuencia, magníficos gráficos; su defecto es común á todos los péndulos sin amortiguamiento, cuyo período, 16 á 22^{s}, aparece semejante al de los sismos lejanos, casi con máximos pendulares, siendo escaso su aumento corriente, 20 á 25 (**), y la construcción algo descuidada, y carecen de un buen mecanismo de centrado que ahorre la enojosa tarea de desarmarlos con frecuencia.

Pensamos convertir los de Cartuja en buenos aparatos de primera clase, proveyéndolos de amortiguamiento, empleando vaselina líquida y de un mecanismo de centrado, modificando además el aparato multiplicador.

Los tromometrógrafos que construye el sismólogo R. P. D. Guido Alfani, S. J., Director del Observatorio Ximeniano de Florencia, son también buenos instrumentos juzgando en vista de los gráficos que de ellos conocemos, y aunque se observaban algunos defectos, como eran de la época de su ensayo (Abril-Agosto de 1906), estarán ya corregidos.

No conocemos los gráficos del Omori-Hecker, de la casa

(*) *A Horizontal pendulum Tromometer*, Publications, núm. 12, pág. 4.

(**) Los resultados del modelo máximo de 500 kilogramos por 50 veces de aumento, no son superiores á los del mediano.

J. & A. Bosch, y sí sólo tenemos noticia de algunas observaciones citadas en las *Wöchentlicher...* de Estrasburgo. Parece un buen instrumento, aunque algo caro, y suponemos que no habrá en su mecanismo inscriptor el defecto más adelante citado.

El microsismógrafo universal Vicentini, resulta bastante inferior, en tal concepto, á los citados aparatos. Por su aumento considerable es superior á algunos en lo que respecta al registro de los terremotos de próximo epicentro.

En el pasado año lo hubiéramos clasificado, sin vacilar, entre los de primera clase; hoy, la aparición de los péndulos mediano y pequeño modelo Wiechert y Mainka, nos inducen á cambiar de opinión, aunque todavía lo juzguemos capaz de dar preciosos datos y digno de figurar en los mejores Observatorios, siquiera no sea en la categoría de instrumento principal.

Es aparato muy caro, con relación á otros superiores, sin amortiguamiento, con rozamientos enormes, extraordinaria tendencia á adquirir su propio período oscilatorio y escasa sensibilidad para los movimientos débiles lejanos. Además, queda indicado su difícil manejo, y á menudo suele funcionar *mal* en Observatorios con justicia muy reputados.

Como instrumentos de segunda clase, cuyos resultados son útiles y que se consideren apropiados á estaciones secundarias, figuran los péndulos Omori-Bosch, ó *péndulos pesados de Estrasburgo*, los sismógrafos más extendidos, y por eso conocemos numerosos gráficos suyos referentes á sismos sobremanera violentos, como los de Kangra (4 Abril 1905) (*), Siberia (9 y 23 Julio 1905), San Francisco (18 Abril 1906), Aleutianas y Valparaíso (16-17 Agosto de 1906) (**), etcétera, etc.

(*) Omori: *Report on the Great Indian Earthquake*, part. I, Seismograms, plana IX-X, figs. 10, 11, 12, 13, 14, in Publications... N.º 23, Tókyó, 1907.

(**) Atlas del Prof. Rudolph, pasim.

De su estudio infiérese que es excelente aparato de segunda clase, con poco aumento, quince veces, y rozamiento enorme (*), que probablemente depende, en gran parte, de la pluma, consistente en una laminilla de aluminio sin equilibrar (**). A tal causa debe el que pierde, sistemáticamente, ó poco menos, todos los pequeños y rápidos movimientos preliminares de los sismos, registrando en su lugar lentas é irregulares sinuosidades, aun en terremotos que aparecen muy marcados en otros instrumentos que tampoco funcionaban bien, como ocurrió muy en particular con el primero y el último de los indicados grandes sismos.

Ganaría no poco el aparato adoptando una palanca menos pesada, y además con una pluma bien equilibrada, por ejemplo, de vidrio hilado y con nuevo procedimiento de conexión, acompañado del aparato de amortiguamiento que tienen los nuevos modelos. Resultará así excelente instrumento, aplicable en las estaciones secundarias, de no preferir el nuevo modelo Wiechert, el cual, aun con solo 80 kilogramos, es considerado ahora muy superior, fuera de los sismos muy lejanos, precisamente los menos interesantes para los instrumentos que no sean de primer orden: el precio es también más económico.

El péndulo horizontal de Grablovitz tiene las ventajas del coste, verdaderamente exiguo, y la facilidad de su manejo, así es que los recomendaríamos de preferencia, como instrumentos de tercer orden, mejores que los sismocopios, pues donde abunden los terremotos sensibles pueden proporcionar utilísimos datos acerca de los algo fuertes. Registran te-

---

(*) 3,2 mm. y 2,5 mm., después de adaptarle el Profesor Marvin su *vibrador*, etc. *Improvements*... fig. 3, A B, y suponemos que el sismólogo norteamericano no lo tendrá en peor estado que el *término medio*.

(**) Con el Omori de Cartuja pudimos convencernos de la necesidad de equilibrar bien las agujas. Una de aluminio, sistema Marvin, que no lo estaba bien, daba pésimos resultados.

rremotos lejanísimos; pero á causa de la poco esmerada construcción, adquieren su propio período oscilatorio con gran facilidad, registrando á veces, entrambas componentes, cosas enteramente distintas. Así, en el terremoto de Kangra (fig. 17, pl. XII), del hermoso album de Omori, el *EW* tenía su máximo de 22 milímetros con 16,8ˢ (17ˢ período pendular), en la porción principal, mientras el *NS*, de 13ˢ de período, lo tuvo de 13,2ˢ con más de 14 milímetros de amplitud en los segundos movimientos preliminares, no pasando de 10 milímetros su máximo verdadero á hora muy distinta que la del *EW* en la porción principal del sismogramo.

Sin embargo, como puede construirlo cualquiera y el cilindro registrador marcha *muy bien* con un despertador de los ordinarios, sería deseable que su ilustre inventor publicase los detalles de la construcción con el fin de que pudiera extenderse su empleo. Adaptándole una buena aguja inscriptora y al botalón una lámina de hojalata, por ejemplo, de 8 × 6 centímetros, sumergida en un recipiente con vaselina líquida, funcionaría incomparablemente mejor.

Son inferiores todavía los sismometrógrafos de poco aumento y exigua longitud, que tuvieron importancia en tiempo ya pasado. Pueden inscribir amplios gráficos, gracias á sus oscilaciones pendulares, de terremotos locales ó muy cercanos, y algunas veces medio aceptables de terremotos mundiales; pero el número de aquellos es tan restringido, que no compensa los gastos considerables de instalación, el precio algo elevado y el tiempo empleado en su conservación.

Examinemos ahora los péndulos fotográficos: entre ellos se cuentan los tipos Rebeur y Milne.

Los primeros, por su elevado aumento externo, en general de 100 veces y aun superior, poder alcanzar períodos de hasta 10, 12 y en algunos hasta 20 y más segundos, carecer casi de rozamientos y poseer, ó podérseles adaptar, facilísi-

mamente, un aparato de amortiguamiento, son muy superiores á los segundos. Constituyen instrumentos de primer orden, comparables y aun alguna vez más sensibles que el péndulo astático de Wiechert para los terremotos lejanos, aunque algo menos para los de cercano epicentro, insustituíbles, sin amortiguamiento y con velocidad de un centímetro por hora, para ciertos estudios muy interesantes sobre las deformaciones de la superficie terrestre en función de las acciones del sol y de la luna, etc.

La velocidad del mecanismo receptor de los péndulos de Milne ordinarios resulta insuficiente y es imposible diferenciar las oscilaciones pendulares unas de otras. La porción principal de un violento sismo, aun muy lejano, aparece como una mancha gris confusa, irregularmente ribeteada de negro, y su escaso aumento externo, unas siete veces, hace perder los principios de muchos sismos, que suelen aparecer en los registros de no pocos Centros que tienen tales péndulos y donde saben cuidarlos é interpretar sus gráficos, como si comenzasen en plena porción principal.

Todavía parece escasa la velocidad últimamente adoptada por el Profesor Milne, de 25 centímetros por hora, y el péndulo, muy sensible por cierto, adquiere su propio período con extraordinaria facilidad, y aun estando muy resguardada la caja que lo proteja, se agita continuamente á la menor corriente de aire, enmascarándose y aun perdiéndose muchos sismos pequeños.

El Dr. Mainka ensayó el adaptar un espejo cóncavo á uno de estos péndulos, y lo ha provisto de amortiguador con aceite de vaselina, obteniendo, según era de esperar, magníficos gráficos en la medida que pueden lograrse con los péndulos fotográficos, cuyas líneas, de medio milímetro lo menos de anchura, á veces esfumadas en lugar de ser negras, nunca son comparables á la esquisita finura y delicadeza de los trazos marcados en los instrumentos de primer orden de inscripción mecánica.

En cuanto á los aparatos para el registro de la componente vertical en los terremotos algo lejanos, todavía faltan datos y pruebas que permitan recomendar determinado modelo. El de 160 kilogramos, del Profesor E. Wiechert, que vimos en el Haya, nos pareció muy bien construído y susceptible de dar excelentes resultados. El gran modelo de 1.300 kilogramos demostró su excelencia en los terremotos del 16-17 de Agosto de 1906, permitiendo percibir los primeros movimientos preliminares del terremoto de Valparaíso sobrepuestos en plena porción principal del de las islas Aleutianas; no ha mucho su mismo inventor pensaba modificarlo (*).

Respecto de la ingeniosa componente vertical del microsismógrafo Vicentini, es menester decir que ni de la lectura del *Bollètino* del mismo inventor resulta muy recomendable. Se advierte con demasiada frecuencia la seca frase *Nessuna traccia*, y lo mismo, conforme era de esperar, ocurre á los demás instrumentos. Son muy poco 45 ó 50 kilogramos para dominar los variados rozamientos de su aparato multiplicador. Serían precisos, á lo menos, 100 ó 150 kilogramos para que pudiese resistir 100 veces de aumento externo, y con todo representarían, á lo sumo, un péndulo simple de 35 á 38 metros de longitud total, á pesar del considerable aumento citado.

Sin embargo, alguna vez puede prestar buenos servicios, aun en terremotos de lejano epicentro. Por ejemplo, en el gráfico del de Cartuja, cuya parte inscriptora se acaba de construir en el mismo Observatorio, referente á los dos terribles terremotos del 21 de Septiembre de 1907, que tantas víctimas han causado en el Turkestán ruso, se observan á primera vista sus movimientos preliminares sin la menor confusión, advirtiendo que de los segundos apenas registró indicios la componente *EW* de los Stiattesi, y nada la *NS*.

También es cierto que la máxima amplitud aparente en la

(*) *Hauptstationen für Erdbebenforschung*... S. 629.

porción principal, con 24^s de período, no pasaba mucho de un milímetro, mientras alcanzaba 65,8 en el gráfico del Stiattesi, componente *NS*, á pesar de ser su aumento externo de 81 veces, y sólo de 23 en éste; pero la aplicación á los dos de la fórmula de Wiechert prueba que el aumento real en el primero de estos instrumentos, ó sea el de la componente vertical, era de poco más de cuatro veces y de unas 160 la del Stiattesi, cuyo período medía 21^s.

Además su gráfico resultaba insignificante al lado del de Omori, que, gracias á su amortiguamiento $\varepsilon : 1 = 3{,}2$, con 31 veces de aumento, por 13,3 segundos de período, se distinguían admirablemente los movimientos preliminares de entrambos sismos, á pesar de hallarse los del segundo, que aparecieron $20^m{,}23^s$ más tarde, en plena porción principal del primero, observándose claramente diferenciados los máximos principales de aquellos movimientos.

La sensibilidad de la componente vertical Vicentini, cuando el aparato funciona bien, es grande en los terremotos locales ó de muy cercano epicentro, empleándose entonces á la manera de un sismoscopio registrador sensible. A ello contribuye el que se unan la semejanza del período de los movimientos citados, á veces hasta inferiores respecto del suyo propio y el considerable aumento externo que resulta favorecido.

Resumiendo lo expuesto, en particular lo apuntado al principio de esta reseña, indicaremos la conveniencia de que en una Estación Sismológica completa haya varios instrumentos: alguno como base de los demás, ó universal; otros para los sismos lejanos y los cercanos, y otro para la componente vertical.

Entre los primeros preferimos el péndulo astático de Wiechert, mejor que el de Von Rebeur, á causa de su menor coste anual y lo detallado de sus gráficos, aun en los movimientos cercanos ó de pequeña amplitud. Entre los segundos, los Omori largos, Mainka y Stiattesi, y para los últimos, por ser modelos más corrientes, los Wiechert pequeños,

Mainka ídem, y aun los Vicentini. Como componente vertical pudiera utilizarse la de 160 kilogramos del Profesor Wiechert, y aun para los sismos próximos, la del Profesor Vicentini, provista de un mecanismo de amortiguamiento, y de otras modificaciones.

De esta suerte podrían obtenerse períodos de 2,4ˢ á 4 ó 6ˢ (Vicentini, Wiechert ó Mainka, pequeño modelo); para los sismos muy cercanos, 20 á 60ˢ (Stiattesi, Mainka, Omori), para los lejanos, y de 12 á 15ˢ para el instrumento universal. En cuanto á las componentes verticales, habría que contentarse con 6ˢ como máximum con los Wiechert y 1,2ˢ, ó poco más, con los Vicentini.

La combinación preferida del Profesor Omori, consiste en un péndulo largo, de 60ˢ ó más de período, como base; otro de 15ˢ para registrar los movimientos rápidos, y un par de péndulos fotográficos de considerable aumento con períodos, uno de 3 ó 4ˢ y el otro de unos 20ˢ, para que actuasen de sismoscopios registradores, todos sin amortiguamiento alguno (*).

El Profesor Wiechert emplea en su célebre Instituto, de Gotinga, para los terremotos cercanos, su colosal péndulo de 17.000 kilogramos con 1,2ˢ de período; para el resto el de 1.200 kilogramos, hoy tan extendido, y con 12 á 15ˢ, y para el estudio particular de las ondas lentas otro de 100 kilogramos con sólo 10 veces de aumento externo, de período superior á un minuto. De componente vertical emplea la suya de 1.300 kilogramos, 7ˢ de período máximo útil y 160 veces de aumento (**), factor que en manera alguna se ha de olvidar en la elección de instrumentos.

Conforme se vé, estas combinaciones son análogas á la propuesta antes, debida al Profesor Rudolph, quien tuvo la

---

(*) *Report...* Publications, núm. 23, Tokyo 1907, pp. 5-6.

(**) *Haupstation für Erdbebenforschung in Göttingen... Beitraege zur Geophysik,* VIII Bd. 3 u. 4 Hft. SS 627-629.

bondad de indicárnosla al escribirnos acerca de las reformas proyectadas en esta estación sismológica de Cartuja: sólo la hemos modificado ligeramente con el fin de generalizarla.

Si se quisiese una combinación más económica y también completa, pudiera adoptarse el pequeño péndulo astático de Wiechert, atendiendo al moderado precio y gran aumento externo, unidos á su buen mecanismo de amortiguamiento, período bastante razonable (de 4 á 10^s el modelo de 80 kilogramos de masa y hasta 15^s los de 125 y 200 kilogramos), con más un par de péndulos horizontales, destinados especialmente á registrar los telesismos. Si fuesen buenos, y sobre todo, si se les añadiese un instrumento para la componente vertical, resultaría una instalación de primer orden.

Queriendo montar un solo sismógrafo, creemos hoy preferible el de Wiechert.

Un par de aparatos Omori-Bosch, asociados á un microsismógrafo de tres componentes Vicentini, constituirían una aceptable combinación, aunque más cara é inferior á un péndulo invertido y una componente vertical Wiechert, y aun á un Wiechert siquiera de solo 125 kilogramos.

Ultimamente, en vista de su excesiva baratura, y de que dan algunas veces resultados estimables, los péndulos Grablovitz pudieran servir para las estaciones de tercera clase, sobre todo proveyéndolos de un sencillo amortiguador y de pluma bien equilibrada.

Cuando llegue el día, ya no lejano, en que por parte de todos se preste á la Sismología el apoyo decidido que su utilidad merece, la mayoría de sus actuales instrumentos se conservarán sólo como glorioso recuerdo de los descubrimientos que con ellos realizaron sus inventores, mejor que por la utilidad futura de sus gráficos. Las masas colosales, los aumentos enormes, los potentes focos luminosos, los edificios expresamente construídos al abrigo de toda perturbación se imponen ahora, si se aspira á que la moderna Sis-

mología no se detenga en sus rápidos adelantos que revelan los misterios del interior de la tierra, lugar de nuestro destierro; pero al cabo obra admirable de *Aquel que todo lo puede*, y uno de los objetos más dignos de nuestro estudio.

Cartuja (Granada), 8 Enero 1908.

PUBLICACIONES RECIBIDAS DESDE 1.° DE JULIO DE 1907

(Continuación.)

Observatoire Royal de Belgique.—Service astronomique.—Les Observatoires astronomiques et les Astronomes par P. Stroobant, J. Delvosal, H. Philippot, E. Delporse et E. Merlin.—Bruxelles, 1907.

Observatoire Royal de Belgique.—Annales de l'...—Bulletin Climatologique de l'année 1899.—Première et deuxième partie.—Bruxelles, 1904, 1906.

Société Belge d'Astronomie.—Bulletin de la...—Deuxième année, nums. 9 y 10.—Septembre-Octobre. 1907.—Bruxelles.

Academy of Natural Sciences of Philadelphia.—Proceedings of the...—Volume LVIII. Part. 3. October, November, December, 1906.—Vol. LIX, Part. 1. Jannary, February, March, 1907.—The Academy .., 1907.

Sociedad Aragonesa de Ciencias Naturales.—Linneo en España.—Homenaje á Linneo en su segundo centenario (1707-1907).—Zaragoza, 1907.

Instituto General y Técnico de Teruel.—Memorias correspondientes á los cursos de 1902 á 1903, 1903 á 1904 y 1904 á 1905, redactadas por el Secretario D. Manuel Fernández y Marín.—Teruel.

Jordan (Camile).—Journal de Mathématiques pures et appliquées.—Sixième série, tome III, année 1907, Fascicule, núm. 4.—Paris.

Observatoire Royal de Belgique.—Annales de l'...—Nouvelle serie.—Annales Météorologiques, tomes I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XIII, XIV et XVII.—Bruxelles, 1901 á 1905.

Kungl. Svenska Vetenskapsakademiens Handhingar.—Band 42, núm. 5, 6, 7 y 9.—Upsala & Stockholm.

College of Science Imperial University of Tokyo, Japan—The Journal of the...—Vol. XXI, articles 2 al 6, vol. XXII.—Tokyo, Japan, 1906.

Observatory (The).—A monthly review of Astronomy, núm. 389, Novembre, 1907.—London.

VII.—Informes de la Academia acerca de la obra del Sr. Alves Magalhaes, titulada «Nova lei do sistema do Mundo».

I

Informe de la Sección de Ciencias Naturales

PONENTE: D. RAFAEL SÁNCHEZ LOZANO

Con el título de *Nova lei do sistema do Mundo, mudança periodica da posicao da Terra, Memoria apresentada á Academia das sciencias de Lisboa, por Alves de Magalhaes, advogado,* se ha publicado en Porto, en el año de 1905, un libro, cuyo autor ha remitido un ejemplar á nuestra Academia con el fin de que se sirva examinarlo y le participe el concepto que merezca.

Forma la obra del Sr. Magalhaes un tomo de 703 páginas en 8.° mayor, donde se tratan y discuten determinadas cuestiones geológicas, paleontológicas é históricas, así como ciertos problemas astronómicos que el autor estima necesario dilucidar para llegar metódicamente á la exposición de una teoría, donde se supone el cambio ó mudanza periódica de la posición de la Tierra, y, como consecuencia de la misma, deduce interesantes conclusiones aplicables á la historia de la humanidad.

Divídese el libro en seis grandes capítulos que denomina sucesivamente «Documentos geológicos», «Documentos paleontológicos», «Documentos históricos», «Fenómeno glaciario», «Problema astronómico» y «Conclusiones», si bien la teoría en cuestión no la formula concretamente el autor hasta que, bien pasada la mitad del libro, entra en la parte astronómica, y así procede deliberadamente, porque, según

él mismo afirma, no es matemático ni astrónomo, y, por consiguiente, entiende que le faltan los elementos indispensables para dominar el campo de la ciencia astronómica. En consecuencia, comienza su trabajo por la exposición y discusión de los documentos geológicos, paleontológicos é históricos, de donde, á su entender, se deduce la ley del sistema del Mundo y de la mudanza periódica de la posición de la Tierra.

Al estudiar el problema desde el punto de vista geológico, comienza por criticar la hipótesis de la inmutabilidad de la posición de la Tierra, consecuencia de los dos principios aceptados generalmente, del paralelismo del eje terrestre y de la inalterabilidad de la posición de la órbita; entra luego en el examen detenido de los fenómenos glaciarios desde el período numulítico hasta la época moderna, y pone de relieve la coincidencia de manifestaciones de temperatura tropical en las latitudes árticas, y de señales de la acción glaciaria en las más bajas de nuestro hemisferio durante un período del eoceno, inmediatamente precedido y seguido de indicaciones de climas cálidos. El mismo fenómeno se repite, con caracteres más definidos, en el período subsiguiente durante los últimos tiempos miocenos y principio del plioceno, y tales hechos constituyen, á su juicio, otros tantos enigmas de la ciencia, que no han descifrado los geólogos y que el autor explica considerándolos sencillamente como resultado de fases sucesivas de la acción glaciaria procedente de un punto muy próximo á la zona ecuatorial.

De la misma manera, sólo admitiendo el supuesto de la marcha gradual y lenta de la acción glaciaria, del S. al N. de nuestro hemisferio, puede explicarse, según el autor, la historia de la penúltima era glacial, así como también los fenómenos relativos á la época glacial moderna, y en definitiva deduce que, del conjunto de los hechos, resulta una conclusión general, y es que, en los sucesivos períodos, las señales de la acción glaciaria aparecen en todas las latitudes de los

dos hemisferios. Este fenómeno, que nos demuestra la transposición de las zonas polares y ecuatoriales, y la consecutiva transmutación de los climas del Globo, presupone, pues, necesariamente, á su juicio, la mudanza periódica de la posición de la Tierra.

Examina luego, en capítulo aparte, la cuestión, considerada desde el punto de vista de la Paleontología, y, al efecto, da por demostrado que, según los trabajos de Lartet, una doble corriente de emigración animal, que partió de regiones y climas radicalmente distintos, debió cruzar el continente europeo durante el período de transición de la edad terciaria á la cuaternaria. Y despues de discusión detenida del asunto, trata de comprobar que, en la misma época y obedeciendo á las mismas causas, el movimiento de imigración humana debió de coincidir con el animal.

Y para demostrarlo examina sucesivamente cuales debieron ser las emigraciones de las diferentes razas humanas á partir del final de la época terciaria, y se ocupa en dilucidar diferentes cuestiones de Protohistoria, con tal detenimiento, que difícilmente podrían consignarse sus interesantes observaciones sin resultar excesivamente prolijos; mas bastará hacer constar que, como resumen de las 136 páginas que constituyen el capítulo que nos ocupa, formula las conclusiones siguientes:

1.ª Que la invasión de la zona septentrional de Europa por la raza braquicéfala ó amarilla, y la del Sur por la dolicocéfala ó blanca, fueron dos fenómenos sincrónicos, que remontan á los últimos tiempos terciarios.

2.ª Que la emigración de estas razas terciarias, sólo puede explicarse por la transposición de las zonas polares y ecuatoriales.

3.ª Que el movimiento emigratorio de la raza hiperbórea y braquicéfala hacia el Mediodía de Europa, fué el resultado de la invasión glaciaria del Norte en la primera época de la edad cuaternaria.

Y 4.ª Que esta invasión glaciaria del Norte presupone una nueva transposición de las zonas polares y ecuatoriales en sentido opuesto al de la edad geológica precedente.

Para terminar el análisis paleontológico, pasa al estudio de la distribución de las formas orgánicas en las diversas latitudes del Globo, y hace ver que su teoría explica satisfactoriamente la repartición de las formas septentrionales, templadas y tropicales, por todas las regiones de la Tierra.

En el capítulo siguiente examina, con gran detenimiento, las tradiciones y documentos históricos que estima pertinentes á la confirmación de su teoría. Discute la tradición paradisíaca tal como se interpretaba hasta mediados del pasado siglo, y, después de esta fecha, cuando el descubrimiento de importantes documentos zendas y sanscritos, derramando preciosa luz sobre la historia antigua del Asia, produjo resultados admirables, entre los cuales debe contarse la comprobación de la identidad de las tradiciones paradisíacas en las grandes ramas de la humanidad.

Con erudición manifiesta discute el autor, en las 202 páginas del capítulo, cuestión tan obscura como la de determinar la región donde estuvo situado el Paraíso, y se inclina á aceptar la opinión del ilustre naturalista Haeckel, quien le supone en la Lemuria, continente intertropical sumergido hoy bajo el océano Indico. Analiza, además, las tradiciones relativas al período glaciario, así como también los más antiguos monumentos literarios de las grandes razas humanas, para demostrar que el último fenómeno glaciario, atacando á la zona tórrida y transformando radicalmente el clima del Paraíso, obligó á las razas humanas á expatriarse; y en definitiva, deduce de su estudio que, las indicaciones climatológicas relativas á la cuna del género humano, lejos de armonizarse, pugnan con todas las hipótesis hasta hoy inventadas para determinar la situación del Edén primitivo, y que, los intérpretes, dominados por las teorías astronómicas y geológicas existentes, no pueden, ni podrán nunca, encontrar una

región con ese carácter verdaderamente anormal y extraordinario de un clima tórrido seguido de otro glacial.

Como consecuencia de la discusión de estos problemas y otros no menos arduos y complicados, resultan de relieve tres grandes enigmas de la historia que la ciencia no ha resuelto todavía.

Es el primero, el averiguar por qué la tradición del diluvio es peculiar de las razas blancas de Asia y de la indígena del Nuevo Mundo, y por qué no aparece esa tradición en las razas negras, en las primitivas razas mongólicas de Asia y en las antiguas razas blancas del Norte y Occidente de África y del Mediodía y Occidente de Europa.

El segundo enigma estriba en la explicación del hecho de existir dos focos distintos de tradición diluviana, uno en Asia y otro en América.

Y el tercero consiste en determinar cuál es el diluvio á que se refieren las tradiciones asiáticas, y á cuál aluden las de los indígenas de América.

Y estos tres enigmas pueden explicarse satisfactoriamente, y los explica el autor, por medio de su teoría de la transposición de las zonas glaciares y ecuatoriales.

El nuevo capítulo, que ocupa 91 páginas del libro, entra en el examen de las teorías modernas relativas al fenómeno glaciario, teorías que explican sencillamente múltiples hechos observados; pero que dejan sin explicación otros muchos comprobados por la ciencia, y precisamente tal defecto, fué el que le condujo al descubrimiento de la nueva ley del sistema del Mundo.

Se da cuenta en este capítulo de los trabajos de Cuvier, relativos á las revoluciones del Globo; se formulan las hipótesis de Boucheron y Federico Klee, y se hace la exposición, bastante completa, de los notables estudios del ilustre matemático Adhemar, quien, en 1842, estableció los fundamentos de la teoría de los diluvios periódicos y del fenómeno glaciario. Expónense, además, los perfeccionamientos de esta teo-

ría debidos al sabio inglés Croll, y como consecuencia del examen de todas ellas, se inclina el autor á aceptar la del último, en la que se explican los cataclismos glaciares y diluviales por la acción combinada de los tres grandes movimientos de la Tierra, precisión de los equinoccios, revolución de los ábsides y desenvolvimiento de la excentricidad orbitaria.

Estos tres movimientos, combinados, produjeron alternativamente en los dos hemisferios períodos de enfriamiento intenso y excesiva acumulación de hielos, y, en consecuencia, la dislocación del centro de gravedad terrestre. Y á su modo de ver, durante los ciclos de excentricidad creciente de la órbita terrestre, ó eras astronómicas de frío, hubieron de producirse los fenómenos diluviales en gran escala, mientras que en los períodos de reducción de la excentricidad, ó eras astronómicas de calor, se ocasionaron los pequeños diluvios, radicalmente distintos de los primeros.

Pero la moderna teoría del fenómeno glaciario, dice después, está vaciada en los moldes de la actual ciencia astronómica, que no admite otros centros de hielos como no sean los dos polos ártico y antártico; y así no pueden explicarse ciertos hechos, tales como el de la distribución de las formas organizadas y la diseminación de las manifestaciones glaciarias por todas las latitudes del Globo, hechos que sólo pueden explicarse por medio de la teoría de la mudanza periódica de la posición de la Tierra, cuyo principio, á su modo de ver, viene á completar la relativa al fenómeno glaciario.

Pasa luego en nuevo capítulo al examen del problema considerado desde el punto de vista astronómico, bien que antes de entrar en materia reconoce, según se ha indicado anteriormente, que le falta la competencia indispensable para penetrar autorizadamente en el campo de la Astronomía; mas entiende, sin embargo, pertinente al caso el exponer algunas consideraciones que conducen á admitir como racional su hipótesis.

Comienza, pues, por poner de manifiesto la imposibilidad de determinar con precisión la figura de la Tierra, cuyas irregularidades de forma dan por resultado desviaciones y alteraciones en sus movimientos. Examina seguidamente las doctrinas relativas á la dislocación del eje terrestre según la ciencia astronómica, y concentrando la atención en lo esencial del asunto, deduce que, en el estado actual de las cosas, parece que no puede admitirse que la profunda metamórfosis de la corteza terrestre, durante los períodos glaciarios, no puede ser causa de mudanza importante en el eje de rotación de la Tierra.

Mas, no obstante, en su opinión, la ciencia no dispone todavía de los datos necesarios para que se pueda considerar como resuelto definitivamente el problema. El límite de desviación de 1° 21′ á uno y otro lado de la posición media de la eclíptica, calculado por Laplace para los cien mil últimos años, puede alcanzar, según Jhon Herschel, hasta tres ó cuatro grados en el transcurso de millones de años, y si con los datos imperfectos de la actual ciencia astronómica, relativos al probema, Herschel admite la posibilidad de tal desviación, no debe repugnar el creer que los matemáticos futuros, basándose en cálculos más exactos, comprueben que la oscilación de la eclíptica, ó la del plano del ecuador, pudiera haber alcanzado más amplios límites. Y para demostrar que tal supuesto es verosímil, expone, en las 53 páginas del capítulo, múltiples razonamientos encaminados á determinar la influencia que, durante los períodos glaciarios, debió ejercer en la posición del eje de rotación terrestre la masa de hielos acumulada periódicamente en los polos. De tales consideraciones, y de lo expuesto en los capítulos anteriores, deduce el autor lo fundamental de su teoría, que, en breves frases, formula al final del capítulo en la forma siguiente:

«Del numeroso conjunto de hechos geológicos, paleontológicos é históricos que se han expuesto, y del examen de

la teoría astronómica que acaba de hacerse, surgen indicaciones firmes y determinadas cuya combinación nos conduce á una resultante; y es que, por efecto de una inclinación mayor del eje de la Tierra sobre el plano de la eclíptica (cuyo límite no es posible determinar), el Globo muda periódicamente de posición, de modo tal, que se convierten alternativamente las regiones polares en zona tórrida, y la zona tórrida en regiones glaciarias. Nuestra hipótesis tiene carácter verdaderamente positivo, ya que, sin ocasionar contradicción á las leyes astronómicas establecidas, se reduce sencillamente á la ampliación de un hecho comprobado: la dislocación del eje de la Tierra.»

Para terminar su libro, el Sr. Alves de Magalhaes formula en un capítulo final, de 98 páginas, interesantes consideraciones encaminadas á explicar la historia entera de la evolución humana por sus verdaderas causas eficientes de naturaleza orgánica é inorgánica. Á la ciencia de la Sociología le falta, en su opinión, todavía mucho camino que recorrer hasta alcanzar su constitución definitiva; ignora por completo esta ciencia las relaciones existentes entre los fenómenos sociales y los fenómenos astronómicos, geológicos y orgánicos que constituyen sus causas eficientes, y fácil es ver que el estudio especializado, ó por partes, de los fenómenos sociales, no nos puede dar noción exacta de su existencia. Si se trata, por ejemplo, de indagar cual fué la génesis del establecimiento de la familia en la especie humana, la ciencia social no ha podido descubrirla, ni explicar tampoco la serie de transformaciones porque han pasado las diferentes formas de organización doméstica al través de las sucesivas edades de la civilización.

Y después de insistir en prolijas consideraciones sobre tal materia, deduce, en consecuencia, que la Sociología actual, por su carácter eminentemente analítico y abstracto, es impotente para desembrollar el complicado dédalo de los fenómenos sociales, y es indispensable, por consiguiente, el crear

una nueva ciencia de Sociología concreta, cuyo carácter debe ser esencialmente sintético.

Á tal propósito se dirigen las miras del autor en las últimas páginas del libro, proponiéndose así dejar sentadas las bases de esa nueva ciencia, que habrá de esclarecer con luz vivísima la historia de la humanidad, á partir de la época miocena, en que aparecen ya los primeros esbozos de la industria humana, bien que esta circunstancia le induzca á admitir que la variedad bípeda remontó á los tiempos eocenos, y fué obra, verosímilmente, del fenómeno glaciario numulítico que, aniquilando las forestas de la zona tórrida, obligó al antropoide á permanecer en pie.

Tal es, en suma, lo esencial de la obra en dictamen, y en la que, según acabamos de ver, no se propone el autor consignar hechos ni observaciones sugeridas por propia experiencia, sino más bien los resultados de meditados estudios que le llevan á exponer ideas y principios dignos de atención por parte de naturalistas y filósofos y, en definitiva, á formular una teoría por virtud de la cual se explica el fenómeno de la transmutación general y periódica de los climas del Globo, mediante el supuesto de que, periódicamente, ha cambiado la posición de su eje de rotación.

Resalta, en primer término, en el trabajo de que se trata, erudición indiscutible, que se manifiesta, no sólo por las múltiples y complejas cuestiones que se discuten, sino también por el desarrollo metódico, forma apropiada y claro lenguaje con que van expuestas.

Apórtanse al mismo, para fundamentar la teoría, documentos valiosos y de reconocida autoridad, ya que dimanan de doctrinas formuladas por naturalistas y filósofos de gran renombre, bien que tales doctrinas hayan sido objeto de empeñada controversia entre los hombres de ciencia y estén lejos todavía de encontrarse definitivamente resueltas.

No escapa á la sagacidad del autor el principal reparo que la Geología puede oponer á sus hipótesis; si, según su-

pone, en la región ecuatorial existieron antiguos heleros, debían encontrarse allí, como testimonio de la acción glaciaria, los cordones de cantos errantes que constantemente acompañan á las grandes acumulaciones de hielos; mas los geólogos no han comprobado, hasta el presente, la presencia de semejantes cantos en la zona ecuatorial, y, por consiguiente, queda aun en pie tan importante objección, bien que haciéndose cargo de ella, el autor de la hipótesis, firme en sus convicciones, se limita á contestar, en la pág. 175 del libro, que, más pronto ó más tarde, los geólogos encontrarán señales tan evidentes de la acción glaciaria en la referida zona, que habrá de ser imposible el negarla.

Mas las verdaderas dificultades á la teoría del Sr. Alves de Magalhaes, no han de ofrecerlas, ciertamente, la Geología, la Paleontología ni la Protohistoria, ciencias todas que admitirían de buen grado el supuesto de la mayor inclinación del eje terrestre para explicar los cambios de los climas durante los períodos geológicos, si los principios sentados por la Astronomía autorizaran la hipótesis. Es más, la idea no es realmente nueva, puesto que se formula y discute en las antiguas obras de Geología, como puede, por ejemplo, comprobarse en el *Prodrome de Geologie,* de Alejandro Vezian, publicado en 1862; y así dice este autor, en la página 127 del libro, hablando de la hipótesis de una lenta variación en el grado de oblicuidad del eje terrestre: «La Geología no suministra pruebas contra esta hipótesis, y si le fuera permitido el no tener en cuenta los datos de otras ciencias, le sería más bien favorable; pero la Astronomia nos demuestra que el eje terrestre de rotación no puede variar en su grado de inclinación más que 4°, y vuelve á su situación primera en un período de 26.000 años aproximadamente».

Dentro de los límites que abarcan las observaciones de los astrónomos, parece demostrado, en efecto, que las variaciones ofrecen carácter de periodicidad bien marcado. Mas como las zonas climatológicas comenzaron á manifestarse

desde la era mesozoica, cabe suponer que en tan remoto tiempo los diversos elementos astronómicos del Globo pudieron ser muy diferentes de lo que son en nuestros días. La estabilidad del sistema solar, tal como la admiten los astrónomos, se refiere exclusivamente á sus condiciones actuales, y, probablemente, no ha debido ser la misma en todos los tiempos, puesto que sus elementos determinantes son: las masas actuales de los planetas, sus distancias relativas y las velocidades en los movimientos; y, de ser cierta la hipótesis de la nebulosa primitiva, tales elementos han debido modificarse, en sus magnitudes, con el transcurso del tiempo.

Resulta de esto, que hay fundamento para admitir que en los antiguos períodos geológicos pudo alcanzar el eje terrestre mayor oblicuidad que la determinada por las observaciones de los astrónomos, y hasta cabe dentro del supuesto el aceptar la idea, sustentada por algunos, de que la situación de los polos fuera distinta que en la actualidad, ya que nuestro planeta, poco consolidado todavía, pudo haber experimentado en la distribución de sus materiales, cambios capaces de alterar la posición de su eje de inercia.

Así se explicarían, sin oposición insuperable por parte de Astronomía, las modificaciones de los climas durante los períodos antiguos; mas en la época moderna, cuando ya el hombre apareció sobre la Tierra, desde que nuestro planeta se encontró en condiciones casi idénticas á las actuales, es indispensable armonizar los hechos comprobados por la Geología, la Paleontología y la Protohistoria con los principios astronómicos, resultado de las observaciones ante el sistema planetario actual. Sin esto, carecerán de base firme y científica cuantas teorías se formulen para explicar los cambios de climas en los últimos períodos geológicos.

En definitiva, los documentos que figuran en la obra *Nova lei do sistema do Mundo*, se concretan al período geológico caracterizado por la presencia del hombre; tales documentos no se oponen manifiestamente, sino que, por lo general, con-

firman la teoría de la mudanza periódica de la posición de la Tierra; mas como la teoría en cuestión requiere la sanción de la ciencia astronómica, opina el que suscribe que, salvo mejor parecer de la Academia, debe pasar el libro á la Sección de Ciencias Exactas, donde habrá de dictaminarse con superior conocimiento, cuanto se consigna relacionado con la Astronomía.

II

Informe de la Sección de Exactas.

PONENTE: D. VICENTE VENTOSA.

Por acuerdo de esta Real Academia, reunida en pleno, pasó á la Sección de Exactas, con el fin de que ésta emitiese dictamen, en lo que fuera de su competencia, un libro, informado ya por la Sección de Naturales, titulado *Nova lei do Systema do Mundo, Mudança periodica da posiçao da Terra. Memoria apresentada á Academia Real das Sciencias de Lisboa por Alves de Magalhaes, advogado.*

Al honrar nuestra Sección con la ponencia al que subscribe, hallóse éste perplejo acerca de la manera de llevar á cabo tan delicado encargo, porque, después de leído el luminoso informe aprobado por la Academia, el examen que en él se hace de las doctrinas sustentadas en dicha obra es tan acabado, tan claramente expuesto el objeto que se propuso el autor al escribirla y tan acertadas las conclusiones á que en el citado informe se llega, que casi resulta superfluo cuanto añadir á él se pretenda.

Es más. Los problemas en que el Sr. Magalhaes se ocupa son de tal naturaleza, que los conocimientos geológicos y astronómicos, necesarios para resolver aquéllos, compenétranse íntimamente, siendo, por tanto, difícil tratarlos con la separación debida. Así, sólo por un laudable, aunque acaso

innecesario anhelo de esclarecer en lo posible un enigma de la historia geológica de la Tierra, pudo el ponente de la Sección de Naturales pedir á la misma y aprobar la Academia toda el parecer de que la Sección de Exactas diera dictamen de cuanto en el libro se consigna relacionado con la Astronomía.

Para formar clara idea de la espinosa misión encomendada al actual ponente, pongamos en primer término de manifiesto el problema capital que el Sr. Magalhaes cree haber resuelto, siquiera desenvuelva modestamente su teoría como mera hipótesis, aunque, á su juicio, con carácter de verosimilitud indubitable.

Trátase, en la obra que examinamos, de explicar completamente las causas y el origen de los fenómenos glaciarios, de los cuales en el suelo de nuestro Globo hay señales patentes, y que tan divididas traen hoy todavía las opiniones de los geólogos y astrónomos. Pone de relieve el autor la coincidencia de manifestaciones de temperatura tropical en las latitudes árticas, con indicios de la acción glaciaria en las más bajas de nuestro hemisferio, durante una parte del período eoceno, inmediatamente precedida y seguida de indicaciones de climas cálidos; repitiéndose el fenómeno, con caracteres más definidos, en el período subsiguiente, durante los últimos tiempos miocenos y principio del plioceno.

«De la teoría de la inmutabilidad de posición de nuestro Globo — dice el autor — hija de dos principios universalmente aceptados — el paralelismo del eje de la Tierra y la inalterabilidad de la posición de la órbita terrestre —, derívanse lógicamente dos ideas. La primera es la prioridad de la aparición del frío y de los hielos en los dos polos ártico y antártico; la segunda, la del predominio simultáneo del frío y de los hielos en los mismos centros polares.» «Hasta hoy — añade — nadie pudo concebir que el frío y el hielo pudieran aparecer en cualquier punto del Globo antes de haber hecho su primera aparición en los polos. Pero desde que la Paleon-

tología nos demostró las coincidencias señaladas más arriba, la acción glaciaria nunca podrá ser explicada por la teoría de la inmutabilidad de la posición de la Tierra, que hace irradiar invariablemente la acción glaciaria de los actuales centros polares».

Conviene quizás hacer notar aquí cierto paradogismo en el lenguaje del autor, al suponer perfectos el «paralelismo del eje de la Tierra y la inalterabilidad de la posición de la órbita terrestre». Porque, si así fuera, no podría producirse el fenómeno llamado *precesión de los equinoccios,* á que alude más adelante. El autor olvida, sin duda—porque de su evidente erudición no parece probable que lo desconozca—, que las llamadas *constantes* en Astronomía, como en otras ciencias de observación, son cantidades cuya variación es muy pequeña, ó que, por desenvolverse con suma lentitud, sólo se hace apreciable en el transcurso de mucho tiempo, circunstancia que permite á veces simplificar los cálculos.

Hecha esta salvedad, y continuando el examen del libro del Sr. Magalhaes, dice éste que, del conjunto de los hechos, resulta una conclusión general, y es que, en los sucesivos períodos, las señales de la acción glaciaria aparecen en todas las latitudes de los dos hemisferios, demostrando este fenómeno la transposición de las zonas polares y ecuatoriales, y la consecutiva transmutación de los climas del Globo, lo cual presupone necesariamente—siempre en opinión del autor—la mudanza periódica de la posición de la Tierra.

Antes de entrar éste en el examen científico de la ley que cree haber descubierto, propónese demostrarla mediante tres órdenes de pruebas, consultando los documentos geológicos, paleontológicos é históricos que acerca de ella pueden suministrar alguna luz. Cualquiera que sea el juicio que se forme sobre las ideas y conclusiones que en esta parte del libro, y aun en todo él, se exponen, no puede negarse la extraordinaria erudición del Sr. Magalhaes, ni la sagacidad y el método que le caracterizan al explanarlos. Adviértese que prin-

cipalmente le preocupa cuanto al origen y al sucesivo desenvolvimiento de la humanidad se refiere, y consultando las tradiciones y los documentos que hasta nosotros han llegado, discute cuestión tan ardua como la de determinar la región donde estuvo situado el Paraíso, y se inclina á aceptar la opinión del ilustre naturalista Haeckel, quien le supone en la Lemuria, continente intertropical hipotético sumergido hoy bajo las aguas del océano Indico. De este mismo estudio deduce, además, que el último fenómeno glaciario, *atacando* á la zona tórrida y transformando radicalmente el clima del Paraíso, obligó á las razas humanas á abandonar su patria y dispersarse.

Dejando á un lado estas y otras arduas cuestiones, que, por otra parte, no son de nuestra competencia, y que es probable no lleguen nunca á ser completamente esclarecidas, expone el autor con bastante amplitud en uno de los capítulos de su libro, los notables estudios del ilustre matemático Adhémar, quien en 1842 estableció—como se sabe—los fundamentos de la teoría de los diluvios periódicos y del fenómeno glaciario, haciendo intervenir la precesión de los equinoccios y la revolución de los ábsides de la órbita terrestre, movimientos que, por su combinación lenta, alteran periódimente la duración de las estaciones en los dos hemisferios, y, de consiguiente, las sumas de las horas de día y de noche que ambos tienen. Cree Adhémar que esta desigualdad ha de producir una diferencia en las temperaturas correspondientes, la cual, acumulándose, basta para desequilibrar el peso de las dos masas de hielo polares y producir, al cabo, una dislocación del centro de gravedad de la Tierra.

El sabio inglés Croll agregó, á las causas señaladas por su antecesor, la variación de la excentricidad de la órbita terrestre, que se desenvuelve en el transcurso de muchos millares de años, y que exagera los efectos del movimiento de la precesión. Pero Croll, para dar, sin duda, mayor carácter de verosimilitud á su hipótesis, mostró mucho ingenio tra-

tando de apoyarla en sólidas bases climatológicas, haciendo intervenir, por ejemplo, la gran influencia de las corrientes oceánicas calientes para hacer más templados los climas de las altas altitudes. En otros términos, quiso tener en cuenta la presencia de la atmósfera y de los mares, que pueden modificar, y en épocas remotas habrán probablemente modificado en gran manera, los climas llamados *solares*, deducidos puramente de los elementos astronómicos que gobiernan la distribución de la temperatura en la Tierra, considerando la superficie de ésta desprovista de agua y de envoltura gaseosa. Por estos motivos, la ingeniosa teoría de Croll, aunque muy discutida y objetada, cuenta todavía partidarios.

Insiste mucho el Sr. Alves en la apreciación de la importancia de los diversos factores astronómicos que intervienen en la formación de los climas terrestres, y principalmente en la necesidad de ampliar ó exagerar los límites de la variación que cada uno de ellos puede en la actualidad experimentar según los principios establecidos en la Mecánica celeste.

No es posible negar que en otras edades, separadas de la nuestra por muchos millares ó millones de años, pudieron alcanzar aquellos factores valores considerables, extremando las condiciones climatológicas de nuestro planeta y capaces de dar origen á las catástrofes que él, en la dilatada serie de los siglos, ha sufrido. Como acertadamente dice el Informe de la Sección de Naturales, «la estabilidad del sistema solar, tal como la admiten los astrónomos, se refiere exclusivamente á sus condiciones actuales, y, probablemente, no ha debido ser la misma en todos los tiempos, puesto que sus elementos determinantes son: las masas actuales de los planetas, sus distancias relativas y las velocidades en los movimientos; y de ser cierta la hipótesis de la nebulosa primitiva, tales elementos han debido modificarse, en sus magnitudes, con el transcurso del tiempo».

Quizás las variaciones de estos elementos hayan podido ser mayores, si, en vez de la teoría laplaciana, resultase

cierta otra recientemente ideada y desenvuelta por el astrónomo americano Chamberlin y por él llamada hipótesis *Planetesimal* ó *Espiral*, porque, á su juicio, el actual sistema solar ha debido originarse en la evolución de una nebulosa espiral, forma sorprendente de ciertas agregaciones de materia cósmica, á las que se concede ahora suma importancia en el proceso de la formación de los mundos, y de las cuales nos ofrece el Cielo numerosos y significativos ejemplos.

El Sr. Magalhaes formula como conclusión fundamental de su teoría «que, por efecto de una inclinación mayor del eje de la Tierra sobre el plano de la eclíptica (cuyo límite no es posiblé determinar), el Globo muda periódicamente de posición, de modo tal, que se convierten alternativamente las regiones polares en zona tórrida, y la zona tórrida en regiones glaciarias. Nuestra hipótesis—añade—tiene carácter verdaderamente positivo, ya que sin ocasionar contradicción á las leyes astronómicas establecidas, se reduce sencillamente á la ampliación de un hecho comprobado: *la dislocación del eje de la Tierra*».

Acerca de esta conclusión conviene advertir que el efecto general de un aumento en la oblicuidad de la eclíptica es originar variaciones en el clima de un lugar, cualquiera que sea su posición en la Tierra, y, al propio tiempo, disminuir las diferencias de clima en distintas latitudes. La superficie de un planeta, como Júpiter, cuyo ecuador coincide sensiblemente en el plano de su órbita, disfruta de clima constante en cada paralelo, ó carece de estaciones; pero el clima varía progresivamente de un paralelo á otro, desde el ecuador á los polos. Por el contrario, si el ecuador fuese perpendicular al plano de la órbita, ó, lo que es igual, si coincidiera con este plano el eje de rotación, los climas de todos los paralelos serían extremados, de suerte que no se concibe, en tal caso, la existencia de una zona tórrida, ni de regiones propiamente polares en ningún lugar de la superficie del planeta. La transmutación ó conversión alternativa de las regiones polares en

zona tórrida, y de la zona tórrida en regiones glaciarias, por efecto de una simple inclinación mayor del eje de la Tierra sobre el plano de la eclíptica, no le parece al académico que subscribe bien demostrada por el Sr. Magalhaes, mientras el eje de rotación de nuestro Globo conserve *dentro de él* una posición invariable.

La frase «dislocación del eje de la Tierra» es un tanto ambigua ó confusa, así como muchas de las premisas que, para llegar á la conclusión arriba formulada, se establecen en el capítulo titulado *Problema astronómico*. Así, por ejemplo, en la pág. 522 se lee: «Admitida la alternativa del exceso de hielo en los dos polos y la consiguiente *dislocación* del centro de gravedad de la Tierra y del océano, el resultado necesario de estos hechos parécenos que es una variación mayor de la inclinación del eje de la Tierra con relación al plano de la eclíptica, ó, lo que es lo mismo, una dislocación del eje del Globo mayor que la que hoy se admite».

Del conjunto de los razonamientos del autor parece desprenderse que adopta la idea de la fijeza del eje de rotación en lo interior del Globo; por lo que le parece insostenible la hipótesis de Evans, quien suponía que las antiguas transformaciones de clima pueden explicarse por el deslizamiento de la costra sólida sobre una masa flúida central. Pero al mismo tiempo, en la pág. 81 escribe:

«Suponemos que, en la transición de la edad terciaria á la cuaternaria, el polo ártico estaba situado en el punto más oriental de la línea ecuatorial que atraviesa el continente africano, lo que equivale á decir que el polo antártico de aquella misma época estaba situado en un punto correspondiente de la actual línea ecuatorial que pasa por el océano Pacífico». «El hielo de nuestro centro polar africano extendió probablemente su acción á un radio que, en ambos hemisferios, llegaba hasta las regiones hoy situadas en el grado 25 de latitud. La circunferencia trazada con este radio formaba verosímilmente el círculo polar de aquella época. La acción glacia-

ria de nuestro polo ártico abrazaba, por tanto, en Africa casi todo el continente, en Asia el sudoeste de Arabia y toda la zona occidental del continente lemuriano, hoy sumergido en el océano Indico. En Europa, la acción glaciaria del centro polar africano no traspasaba la parte oriental del Mediterráneo». Aquí indudablemente se afirma la no coincidencia del eje de rotación con el eje actual de figura.

La explicación más sencilla y obvia de estos hechos, si fueran ciertos, y de las grandes variaciones seculares de clima—ya que la teoría astronómica presenta tantas dificultades—, hay quien cree se hallaría en la hipótesis de que el eje de rotación de la Tierra no ha tenido siempre la misma posición dentro de ella, sino que debe de haber cambiado de lugar como resultado ó consecuencia de grandes trastornos geológicos.

Esta hipótesis ha sido sostenida por diversos sabios. Euler dedujo de sus estudios la existencia teórica de la desviación del polo instantáneo de rotación de la Tierra; mas como las observaciones hechas en su tiempo, por no ser suficientemente precisas, denotasen sólo que tal desviación era insensible, creyó que debía concluirse que el eje de rotación de la Tierra coincidía en absoluto prácticamente con su eje de figura, ó, mejor dicho, con el eje del máximo momento de inercia. Y de aquí, á su vez, tenía que deducirse que la Tierra, flúida primitivamente, había llegado á un estado de solidez y rigidez absolutas. En esta hipótesis, Euler demostró que el período de oscilación del eje, si es que éste oscilaba, debería ser igual á 305 días. La Tierra, considerada en conjunto, tendría en este caso una rigidez superior á la del acero. Quiso Newcomb comprobar esta teoría suponiendo que la Tierra, lejos de ser perfectamente rígida, era un cuerpo susceptible de deformarse elásticamente, y, estableciendo que su rigidez fuese igual á la del acero, obtuvo para la oscilación un período de 441 días.

Estas conclusiones teóricas, sabido es que han hallado

después plena confirmación en las observaciones astronómicas de extraordinaria precisión hechas por los años 1884 y 1885 por Chandler, de Cambridge, y Küstner, de Berlín. El primero, determinando las variaciones de la latitud de dichos lugares, y extendiendo su investigación á otros, pudo deducir de ellas que el polo del eje de rotación describe, alrededor del polo de figura, un movimiento muy complicado, resultante de la combinación de dos movimientos simples: uno, elíptico, de período anual, y otro circular, con período igual á 428 días, y cuya amplitud total no excede de 0″,6 ó de 18 metros medidos en el terreno. Ambos movimientos, cuya procedencia aun no está del todo averiguada, efectúanse en el mismo sentido, de Oeste á Este y experimentan, á su vez, ligeras variaciones.

Sácase, sí, la consecuencia de que la Tierra, siempre considerada en su conjunto, es algo más rígida que el acero, y varios sabios, en presencia de estos hechos, están acordes en suponer que nuestro Globo debe de estar constituído por una costra sólida que reposa sobre un núcleo igualmente sólido, de densidad parecida á la del hierro, pero mediante la interposición de una capa plástica, sobre la cual flota, en cierto modo, la cubierta exterior. Concíbese de esta manera que dicha costra puede llegar á *deslizarse* ó *resbalar*, digámoslo así, sobre el núcleo sólido central.

La desviación actual del polo, respecto del eje de figura, es, ciertamente, de amplitud pequeñísima; pero en épocas muy remotas, si las condiciones físicas de nuestro Globo hubieran sido muy diferentes de lo que son hoy, esta concepción, algo modificada, ¿no permitiría esclarecer la teoría de los períodos glaciarios, ese enigma de la historia geológica de la Tierra? Así lo estiman en la actualidad no pocos sabios.

Bien á pesar suyo ha tenido el ponente que extenderse en tantas minuciosidades — invadiendo, tal vez, un terreno que le está vedado — para hacer notar que el problema tratado

en el meritorio libro del Sr. Magalhaes (pues plácemes merece, siquiera por la grande erudición y la elevación de ideas que en él resaltan), está todavía pendiente de una interrogación, aunque se tenga ya, por lo menos, la consoladora esperanza de llegar algún día á la meta, por los nuevos horizontes que la ciencia experimental abre á la especulación.

Utiles son cuantos esfuerzos se hagan para ensanchar los límites del saber, porque todos, dirigidos con espíritu imparcial, pueden contribuir al esclarecimiento de la verdad. En este concepto merece ser leída y meditada la obra del señor Alves Magalhaes, uno de cuyos ejemplares tuvo él la galantería de dedicarlo y someterlo á examen de esta Real Academia, por cuya deferencia, al transmitirle los dos informes, merece le sean dadas las debidas gracias.

Tal es la impresión que del estudio de dicho trabajo ha sacado el ponente que subscribe, y tal su parecer que humildemente eleva á la Sección de Exactas, convencido de que ésta, con su superior criterio, y en su día la Academia en pleno, acordarán lo que estimen conveniente, que será sin duda lo más acertado.

VIII.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimatercera.

SEÑORES:

Lo hemos dicho en repetidas ocasiones, el problema de la Elasticidad comprende dos problemas fundamentales: *Primero*, expresar las componentes p, de las tensiones, en función de las deformaciones U, V, W; *Segundo*, establecer las

ecuaciones de equilibrio del sólido elemental del sistema de coordenadas que estamos considerando.

El primer problema ya lo hemos resuelto en la última conferencia, y tenemos expresadas las seis componentes p, en función de las derivadas parciales de U, V, W con relación á r, θ, z.

En esta conferencia vamos á resolver el segundo y obtendremos las tres ecuaciones de equilibrio relativas á las tres componentes de todas las fuerzas, paralelamente á los ejes t, r, z.

Cuando hayamos resuelto este problema, bastará substituir en las tres ecuaciones expresadas, los valores de las p, para obtener tres ecuaciones en diferenciales parciales de las componentes de los desplazamientos.

Esto para el equilibrio; para el movimiento no hay más que incluir entre las fuerzas exteriores, las de inercia del punto material que se considera, ó mejor dicho las del sólido material que le comprende.

***

Equilibrio del sólido elemental en coordenadas cilíndricas.— Sabemos que el sólido elemental, como puede verse en la figura 54 de la conferencia anterior, se compone de dos cilindros de revolución alrededor del eje Z, distantes dr, de dos planos meridianos formando el ángulo infinitamente pequeño $d\theta$, y de dos planos perpendiculares á Z, distantes dz.

Sobre todas las caras de este sólido actuarán tensiones cuyas componentes hemos designado, en general, por p. En el centro de gravedad, actuarán fuerzas exteriores cuyas componentes designaremos por R, T, Z.

Las p sabemos que se refieren á la unidad de superficie, y las tres últimas á la unidad de volumen.

Sabemos aún que los tres ejes auxiliares son r, t, z, según los hemos definido en la conferencia anterior.

Para obtener las ecuaciones de equilibrio no hay más que hallar las componentes de todas las fuerzas antes enumeradas paralelamente á dichos tres ejes é igualarlas á cero.

Con las otras tres ecuaciones, relativas á los pares, no hay

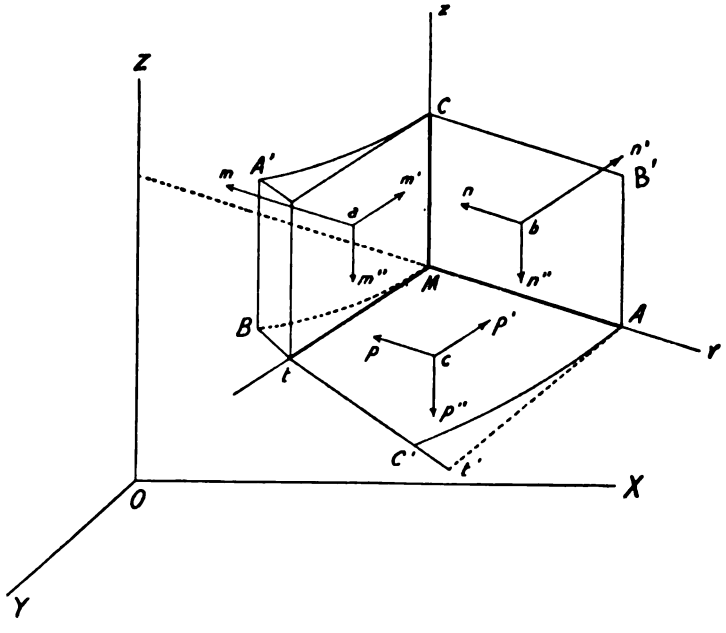


Figura 59.

que contar, porque se tienen en cuenta con sólo reducir las nueve componentes de p á seis, mediante las condiciones,

$$p_{rt} = p_{tr},\ p_{rz} = p_{zr},\ p_{zt} = p_{tz}.$$

Hemos representado en la figura 59 el sólido elemental ya definido; mas para evitar complicaciones en la figura, sólo hemos conservado las tres caras del ángulo triedro M (figura 59) que son: el cilindro de revolución $MCA'B$; el plano

meridiano $MCB'A$, que es un rectángulo; y la sección recta $MAC'B$, formado por un trapecio circular en el cual los dos arcos son MB y AC', ambos tienen su centro en el punto en que dicho plano corta al eje Z.

Las caras opuestas á estas tres se han suprimido en la figura; serían, el cilindro que pasase por AC' y por AB', el plano meridiano definido por BC' y BA', y el plano de sección recta determinado por $A'C$, que pasaría por CB'.

Estas tres caras, como hemos dicho tantas veces, forman un triedro trirrectángulo M: haciendo pasar por Mt tangente á MBy por MC un plano, éste sería tangente á lo largo de la generatriz MC al cilindro $BM\ CA'$.

Los tres ejes auxiliares serían, como siempre, Mr, Mt, Mz, y es claro que podríamos formar un paralelepípedo elemental cuyo triedro trirrectángulo M estaría formado por el meridiano MB', por el plano de sección recta MC' y por el plano tangente tC.

Este triedro ajusta por dos de sus caras con el anterior, y la última es tangente al cilindro.

Ya vimos que las tensiones pueden referirse á dichas tres caras planas: dos de ellas porque coinciden en ambos sistemas de coordenadas; la tercera porque es tangente al cilindro.

Supongamos que la tensión sobre la cara $A'BMC$, que es cilíndrica, tiene su punto de aplicación en a, pues lo mismo da suponer que a está en dicha cara cilíndrica que en la cara plana tMC.

Asimismo, tanto dará determinar el área plana tMC como el área cilíndrica $A'BMC$; los errores serían infinitamente pequeños, de segundo orden.

Supongamos que las componentes de la tensión, aplicada al punto a, son am paralela á r, am' paralela á t, y am'' paralela á z.

Pero fijémonos en cuanto á su dirección y á su signo.

Según la regla general que establecimos en el primer sis-

tema de coordenadas, y que aplicaremos también en este de coordenadas cilíndricas, las componentes de p representan la acción de la región positiva sobre la negativa, que en el último caso sería la de la región que contiene al sólido elemental sobre la región negativa de las r; pero como lo que nos interesa es, no la acción del sólido sobre lo que le rodea, sino, por el contrario, la acción de la región ambiente sobre dicho sólido elemental, las tres componentes á que nos hemos referido serán:

$$am = -\ p_{rr},\ am' = -p_{rt},\ am'' = -p_{rz}.$$

Estas son fuerzas por unidad de superficie sobre toda la cara tMC ó BMC, que da lo mismo. Las fuerzas efectivas que actúan se obtendrán multiplicando las anteriores por el área de $BMCA'$. Dicha cara puede considerarse como un rectángulo. El lado MC es igual á dz.

El lado BM es un arco de círculo cuyo lado es r, y cuyo ángulo es $d\theta$, luego su longitud será $rd\theta$.

Así, pues, tendremos

$$\text{área } BMCA' = rd\theta dz;$$

y las componentes de la tensión sobre el punto a del sólido elemental ó, mejor dicho, sobre la cara cilíndrica del sólido elemental serán:

Cara cilíndrica $MBA'C$,

componente paralela á r. . . . . $-rd\theta dzp_{rr}$

componente paralela á t. . . . . $-rd\theta dzp_{rt}$

componente paralela á z. . . . . $-rd\theta dzp_{rz}$.

Las componentes sobre la cara opuesta, y según los tres ejes r, t, z, serán las mismas que acabamos de obtener,

aumentadas en la parte que corresponde al incremento dr de la única variable que cambia al pasar de una á otra cara.

Pero en los componentes anteriores $d\theta$ y dz no varían de una á otra cara; lo único que cambia es para la primera componente rp_{rr}, para la segunda rp_{rt} y para la tercera rp_{rz}; por lo tanto, podemos escribir desde luego:

Cara cilíndrica $C'AB'$

componente paralela á r. . $+ d\theta dz\left(rp_{rr} + \frac{drp_{rr}}{dr}dr\right)$

componente paralela á t. . $+ d\theta dz\left(rp_{rt} + \frac{drp_{rt}}{dr}dr\right)$

componente paralela á z. . $+ d\theta dz\left(rp_{rz} + \frac{drp_{rz}}{dr}dr\right)$.

Ponemos el signo $+$ porque en este caso hay que considerar la acción sobre el sólido elemental de la región de la derecha, ó sea de la parte positiva del eje de las r.

Los componentes paralelos á los tres ejes que proceden de las dos caras cilíndricas, se obtendrán sumando algebraicamente los resultados anteriores y resultará:

$$-d\theta dzrp_{rr} + d\theta dzrp_{rr} + d\theta dz\frac{drp_{rr}}{dr}dr =$$

$$= d\theta dzdr\left(p_{rr} + r\frac{dp_{rr}}{dr}\right),$$

$$-d\theta dzrp_{rt} + d\theta dzrp_{rt} + d\theta dz\frac{drp_{rt}}{dr}dr =$$

$$= d\theta dzdr\left(p_{rt} + r\frac{dp_{rt}}{dr}\right),$$

$$-d\theta dzrp_{rz} + d\theta dzrp_{rz} + d\theta dz\frac{drp_{rz}}{dr}dr =$$

$$= d\theta dzdr\left(p_{rz} + r\frac{dp_{rz}}{dr}\right);$$

de modo que, en resumen, tendremos para las dos caras cilíndricas el resultado siguiente:

Caras BMC y $C'AB'$,

componente paralela á r. . . $+drd\theta dz\left(p_{rr}+r\frac{dp_{rr}}{dr}\right)$

componente paralela á t. . . $+drd\theta dz\left(p_{rt}+r\frac{dp_{rt}}{dr}\right)$ (1)

componente paralela á z. . . $+drd\theta dz\left(p_{rz}+r\frac{dp_{rz}}{dr}\right)$.

***

Determinemos ahora las componentes paralelas á los tres ejes r, t, z de la tensión que actúa sobre la sección recta $MAC't$.

El punto de aplicación suponemos que es el c; la componente paralela al eje de las r será cp; la componente paralela al eje de las t, cp', y la componente paralela al eje de las z las representaremos por cp'', todas ellas referidas á la unidad de superficie.

Según las notaciones establecidas tendremos:

$$cp = -p_{zr};\ cp' = -p_{zt};\ cp'' = -p_{zz}.$$

Ponemos el signo — porque se trata de la acción, no de la región positiva sobre la negativa, en que las componentes de la tensión las hemos representado por p_{zr}, p_{zt}, p_{zz}, sino al contrario de la acción de la parte negativa sobre el sólido elemental componente, que son iguales y de signo contrario á las anteriores.

El área del trapecio $MAC'B$, que es la misma que la del

trapecio $MAt't$ y que se confunde con un rectángulo cuyos lados sean MA y Mt será:

$$MA \times Mt = dr \,.\, rd\theta;$$

por lo tanto, pasando de las componentes por unidad de superficie á las componentes sobre la cara $AMtt'$, podremos escribir:

Cara $MAC'B$,

componente paralela á r. . . $-p_{zr} \,.\, dr \,.\, rd\theta = -rd\theta drp_{zr}$

componente paralela á t. . . $-rd\theta drp_{zt}$

componente paralela á z. . . $-rd\theta drp_{zz}$.

Para la cara opuesta, que será la definida por CB' y CA', el cálculo sería el mismo, el factor $rd\theta dr$ no cambiaría, únicamente las p sufrirían las variaciones que corresponden al incremento dz, que son:

$$\frac{dp_{zr}}{dz}\,dz, \quad \frac{dp_{zt}}{dz}\,dz, \quad \frac{dp_{zz}}{dz}\,dz.$$

De modo que podremos escribir:

Cara superior $B'CA'$,

componente paralela á r. . . $+rd\theta dr\left(p_{zr} + \frac{dp_{zr}}{dz}\,dz\right)$

componente paralela á t. . . $+rd\theta dr\left(p_{zt} + \frac{dp_{zt}}{dz}\,dz\right)$

componente paralela á z. . . $+rd\theta dr\left(p_{zz} + \frac{dp_{zz}}{dz}\,dz\right)$.

Para obtener las componentes paralelas á los ejes r, t, z, que resultan sobre ambas caras, la inferior y la superior, no

tenemos más que sumar dos á dos las componentes anteriores, como hemos hecho para las caras cilíndricas, y tendremos:

$$-rd\theta drp_{zr} + rd\theta dr\left(p_{zr} + \frac{dp_{zr}}{dz}dz\right) = rd\theta drdz\,\frac{dp_{zr}}{dz}$$

$$-rd\theta drp_{zt} + rd\theta dr\left(p_{zt} + \frac{dp_{zt}}{dz}dz\right) = rd\theta drdz\,\frac{dp_{zt}}{dz}$$

$$-rd\theta drp_{zz} + rd\theta dr\left(p_{zz} + \frac{dp_{zz}}{dz}dz\right) = rd\theta drdz\,\frac{dp_{zz}}{dz}.$$

En resumen, para el conjunto de las dos caras de sección recta, la superior y la inferior, tendremos:

Caras AMt y $B'CA'$,

componente paralela á r.... $+ rd\theta drdz\,\frac{dp_{zr}}{dz}$

componente paralela á t.... $+ rd\theta drdz\,\frac{dp_{zt}}{dz}$ (2)

componente paralela á z.... $+ rd\theta drdz\,\frac{dp_{zz}}{dz}$.

***

Sólo nos queda por hacer un cálculo análogo á los anteriores para la cara $CMAB'$ y la opuesta $A'BC'$, que son dos planos meridianos, formando el ángulo infinitamente pequeño $d\theta$.

Este cálculo es del mismo género que los anteriores, pero en él hay una pequeña variante; porque las dos superficies cilíndricas, ó los dos planos tangentes que las substituyen, son paralelos, y asimismo las dos secciones rectas, superior é inferior, son paralelas también, y en estas últimas dos ca-

ras, es decir, en los dos planos meridianos, no sucede lo propio: forman un ángulo $d\theta$, que aunque es infinitamente pequeño influye en los resultados, como vamos á ver.

Consideremos primero la cara $MAB'C$.

Sea b el punto de aplicación del esfuerzo, que la región de detrás, según está la figura, ejerce sobre la región de delante, ó sea sobre el sólido elemental.

Las tres componentes de la tensión las hemos representado por bn, bn', bn'', y según lo que hemos convenido respecto á los signos y según la notación general, tendremos:

$$bn = -p_{tr};\ bn' = -p_{tt};\ bn'' = -p_{tz}:$$

éstas serán las componentes por unidad de superficie.

La cara $MAB'C$ es un rectángulo y su área será el producto de sus dos lados; tendremos, pues,

$$\text{área } MAB' = MA \,.\, MC = dr \,.\, dz.$$

Por lo tanto, los esfuerzos totales sobre dicha cara, es decir, las componentes de la tensión serán,

Cara $MAB'C$,

componente paralela á r..... $-drdz \,.\, p_{tr}$

componente paralela á t..... $-drdz \,.\, p_{tt}$

componente paralela á z..... $-drdz \,.\, p_{tz}$.

Consideremos la cara opuesta, que es lo que pasa por las dos líneas $A'B$ y BC', es decir el plano meridiano que forma con el anterior el ángulo $d\theta$.

Para no complicar la figura, hemos representado aparte, en la figura 60, la proyección sobre el plano rt del sólido elemental.

Démonos cuenta de los elementos de esta última figura.

La recta MA representa la traza del primer plano meridiano, es decir, del $CMAB'$ de la figura 59. Pasa esta recta por la proyección O del eje Z.

El segundo plano meridiano $A'BC'$ de la figura 59 determina en la figura 60, como traza, la recta BC', que también pasa por el punto O.

El ángulo que forman estos dos planos es precisamente $d\theta$.

Los arcos de círculo MB y AC' son las trazas de las dos

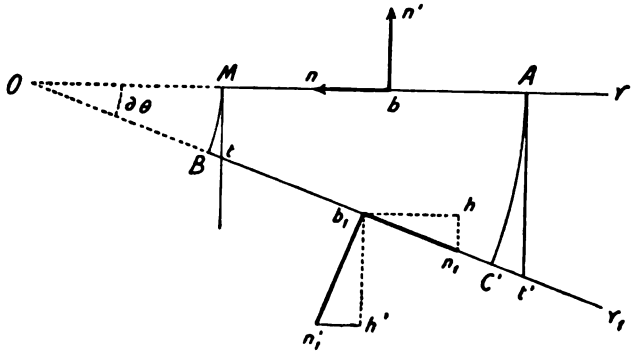


Figura 60.

caras cilíndricas y Mt, At' las trazas de los dos planos tangentes.

Los ejes trirrectangulares auxiliares á que constantemente nos venimos refiriendo para el punto M, están representados en la figura 60 de este modo:

Mr, es el eje de las r; Mt, el eje de las t, y el eje de las z, será una recta perpendicular al plano de la figura proyectada en M.

Hemos hecho ya el cálculo para la cara MA, en que las componentes de la tensión son bn que coincide con r; bn' que es perpendicular á r, y la tercera componente paralela

á z que es la bn'' de la figura 59, y que en la figura 60 se proyecta en b.

Pasemos ahora á la cara opuesta que se proyecta en BC'.

Sea b_1 el punto de aplicación del esfuerzo que ejerce sobre dicha cara la parte del sólido elástico que está inmediata á ella por la parte de delante. De modo que deberemos tomar las componentes de p con su signo positivo y no como en la cara MA, para la cual les dábamos signo contrario.

Representaremos, pues, las componentes de la tensión sobre la cara BC' por bn_1, y $b_1 n'_1$, las cuales estarán *próximamente* en sentido contrario que bn y bn'.

Decimos próximamente en dirección contraria, pero no exactamente, por que las caras BC' y MA (fig. 59) no son paralelas, sino que forman un ángulo $d\theta$.

Esta es una pequeña complicación, pues si las caras fueran paralelas, lo serían las componentes, y no tendríamos más que sumar algebraicamente bn' y $b_1 n'_1$ por una parte, y por otra, bn y $b_1 n_1$.

Pero no existe este paralelismo; luego tenemos que descomponer $b_1 n_1$ en dos componentes, que serán $b_1 h$ y $n_1 h$ paralela y perpendicularmente al eje de las r.

Otro tanto tendremos que hacer con $b_1 n'_1$: descomponiéndola paralela y perpendicularmente á r, nos dará dos componentes $n'_1 h'$, $b_1 h'$: una paralela al eje r, otra paralela al eje t.

De suerte, que las componentes paralelas al eje r serán bn, que ya hemos calculado; $b_1 h$ y $n'_1 h'$ que tenemos que calcular ahora.

Y paralelamente al eje de las t tendremos que sumar bn' que calculamos antes y hn_1 y $b_1 h'$ que debemos calcular ahora.

Es decir, que en la cara BC' obtenemos, no dos, sino cuatro componentes, que hay que sumar ordenadamente á las dos que hemos obtenido para la cara MA.

Empecemos por hallar $b_1 n_1$ y $b_1 n'_1$.

Aparte del signo las deduciremos de bn y bn', porque son los valores de estas dos componentes cuando la cara MA gira el ángulo $d\theta$ y coincide con BC'.

Luego son aquellas componentes con el incremento parcial que corresponde al incremento $d\theta$.

Los valores de bn, bn', hemos visto que eran:

$$bn = -p_{tr};\ bn' = -p_{tt}.$$

Nada decimos de bn'', de la figura 59, porque esta componente se encuentra en un caso más sencillo que las dos primeras componentes, como veremos bien pronto.

Pero las p se refieren á la unidad de superficie, las componentes, sobre todo la cara MA (fig. 60) ó $MAB'C$ (figura 59), hemos demostrado que son:

$$-drdz\,.\,p_{tr}$$

$$-drdz\,.\,p_{tt}.$$

Estas componentes, al pasar de MA á BC' variarán, porque la variable θ ha sufrido un incremento $d\theta$, de modo que tendremos:

$$\text{componente paralela á } r_1 = drdzp_{tr} + \frac{d(drdzp_{tr})}{d\theta}d\theta,$$

$$\text{componente perpendicular á } r_1 = drdzp_{tt} + \frac{d(drdzp_{tt})}{d\theta}d\theta,$$

ó bien, puesto que $drdz$ permanece constante al variar θ:

$$\text{1.ª componente paralela á } r_1 .\,.\ drdz\left(p_{tr} + \frac{dp_{tr}}{d\theta}\,d\theta\right),$$

$$\text{2.ª componente perpendicular á } r_1 .\,.\ drdz\left(p_{tt} + \frac{dp_{tt}}{d\theta}\,d\theta\right).$$

Ahora bien; los ejes elegidos para las componentes, que han de igualarse á cero, son los Mr, Mt, luego las dos componentes anteriores deberán descomponerse á su vez según dichos dos ejes Mr, Mt.

La *primera* dará la componente, según

$$b_1h \ldots\ldots \; drdz\left(p_{tr} + \frac{dp_{tr}}{d\theta}\, d\theta\right)\cos(hb_1n_1),$$

y como el ángulo $hb_1n = d\theta$ es muy pequeño, su coseno, con un error de segundo orden, puede suponerse igual á 1.

Así *componente*, según

$$b_1h \ldots\ldots \; drdz\left(p_{tr} + \frac{dp_{tr}}{d\theta}\, d\theta\right).$$

La *primera* da todavía, según

$$hn_1 \ldots\ldots \; drdz\left(p_{tr} + \frac{dp_{tr}}{d\theta}\, d\theta\right)\operatorname{sen} hb_1n;$$

pero $\operatorname{sen} hb_1n = \operatorname{sen}(d\theta) = d\theta$ próximamente.

Así componente, según

$$hn_1 \ldots\ldots \; drdz\left(p_{tr} + \frac{dp_{tr}}{d\theta}\, d\theta\right)d\theta = drdzp_{tr}d\theta,$$

despreciando el término que contiene $d\theta^2$ y es de segundo orden.

La *segunda* componente, según $b_1n'_1$ dará asimismo dos componentes: una, según n'_1h'; otra, según b_1h' respectivamente paralelas á Mr y Mt.

De modo que componente, según

$$n'_1h' \ldots\ldots \; drdz\left(p_{tt} + \frac{dp_{tt}}{d\theta}\, d\theta\right) \operatorname{sen}(n'_1 b_1 h'),$$

ó bien

$$drdz\left(p_{tt} + \frac{dp_{tt}}{d\theta}\, d\theta\right) \operatorname{sen}(d\theta) = drdz\left(p_{tt} + \frac{dp_{tt}}{d\theta}\, d\theta\right) d\theta,$$

y al fin

$$drdzp_{tt}d\theta.$$

La componente en la dirección b_1h' será
Componente, según

$$b_1h' \ldots\ldots \; drdz\left(p_{tt} + \frac{dp_{tt}}{d\theta}\, d\theta\right) \cos(n'_1 b_1 h') =$$

$$= drdz\left(p_{tt} + \frac{dp_{tt}}{d\theta}\, d\theta\right) \cos(d\theta),$$

y finalmente

$$drdz\left(p_{tt} + \frac{dp_{tt}}{d\theta}\, d\theta\right).$$

Las cuatro componentes, según b_1h, hn_1, n'_1h', b_1h'; y las dos según bn, bn', son las que debemos sumar ahora porque ya están en la dirección de los ejes Mr, Mt.

Es decir, sumaremos las paralelas á r y luego las paralelas á t.

Y no olvidemos que por ahora nos ocupamos tan sólo en las tensiones correspondientes á las caras MA, BC'.

Las componentes paralelas á r serán:

$$-\, drdzp_{tr} + drdz\left(p_{tr} + \frac{dp_{tr}}{d\theta}\, d\theta\right) + drdzp_{tt}d\theta =$$

$$= drdzd\theta\left(\frac{dp_{tr}}{d\theta} + p_{tt}\right).$$

Las componentes paralelas á t serán asimismo:

$$-drdzp_{tt} + drdzd\theta p_{tr} + drdz\left(p_{tt} + \frac{dr_{tt}}{d\theta}\right)d\theta =$$

$$= drdzd\theta\left(\frac{dp_{tt}}{d\theta} + p_{tr}\right).$$

En resumen:

Caras MA, BC',

componente paralela á r.. $drdzd\theta\left(\frac{dp_{tr}}{d\theta} + p_{tt}\right)$

componente paralela á t.. $drdzd\theta\left(\frac{dp_{tt}}{d\theta} + p_{tr}\right)$ (3)

componente paralela á z.. $drdzd\theta \frac{dp_{tz}}{d\theta}$.

De la última componente nada hemos dicho porque se obtiene inmediatamente.

La componente proyectada en b (fig. 60), que es la bn'' (figura 59), tiene por valor según hemos visto: $-p_{tz}$ por unidad de superficie. Por toda el área será: $-p_{tz}drdz$.

La componente proyectada en b_1 (fig. 60), por unidad de superficie, será la misma aumentada en su incremento $\frac{dp_{tz}}{d\theta}d\theta$, al pasar de b á b_1. Y multiplicando por el área, tendremos:

$$drdz\left(p_{tz} + \frac{dp_{tz}}{d\theta}\, d\theta\right).$$

Como las proyectadas en b y en b_1, son paralelas y paralelas á z darán en esta dirección una resultante:

$$-p_{tz}drdz + drdz\left(p_{tz} + \frac{dp_{tz}}{d\theta}\, d\theta\right) = drdzd\theta\, \frac{dp_{tz}}{d\theta}.$$

que es precisamente la última del grupo (3).

Hemos determinado ya todas las componentes de las tensiones sebre los tres pares de caras del sólido elemental de la figura 59, sólido que, como hemos dicho, substituye al paralelepípedo elemental de las coordenadas ordinarias.

Pero sobre este sólido elemental actúan no sólo las tensiones sobre las seis caras, sino las fuerzas exteriores en el caso general, y el punto de aplicación podremos suponer que es uno cualquiera de dicho sólido; por ejemplo su centro de gravedad que, á medida que el sólido disminuya, tenderá constantemente hacia el punto *M*.

Descompongamos esta fuerza exterior, lo mismo que hemos hecho para las tensiones, en tres componentes paralelamente á los ejes *Mr*, *Mt*, *Mz*.

Y por seguir cierta analogía en las notaciones, representemos las componentes de dicha fuerza referida á la unidad de masa por *R*, *T*, *Z*.

Respecto á la masa, claro es que será la densidad ρ multiplicada por el volumen, y dicho volumen podemos suponer que es, con errores infinitamente pequeños, de orden superior (fig. 59),

$$MA \times Mt \times MC = MA \times MB \times MC =$$
$$= MA \times rd\theta \times MC,$$

ó bien

$$r \,.\, dr \,.\, d\theta \,.\, dz.$$

La masa será, pues,

$$\rho r dr d\theta dz,$$

y las tres componentes de la fuerza exterior

$$\left.\begin{array}{ll} \text{componente paralela á } r \ldots & R\rho \,.\, rdrd\theta dz \\ \text{componente paralela á } t \ldots & T\rho \,.\, rdrd\theta dz \\ \text{componente paralela á } z \ldots & Z\rho \,.\, rdrd\theta dz \end{array}\right\} \quad (4)$$

Tenemos, pues, en los grupos (1), (2), (3), (4), todos los elementos necesarios para establecer el equilibrio del sólido elemental.

No hay más que tomar en estos cuatro grupos las componentes paralelas á r, sumar é igualar á cero.

Asimismo, tomar las componentes paralelas al eje t, é igualar á cero la suma.

Por último, sumar las componentes paralelas al eje z, é igualar la suma también á cero.

Efectuando estos cálculos tendremos:

$$drd\theta dz\left(p_{rr}+r\frac{dp_{rr}}{dr}\right)+rdrd\theta dz\frac{dp_{zr}}{dz}+$$
$$+drd\theta dz\left(\frac{dp_{tr}}{d\theta}+p_{tt}\right)+R\rho rdrd\theta dz=0,$$

$$drd\theta dz\left(p_{rt}+r\frac{dp_{rt}}{dr}\right)+rdrd\theta dz\frac{dp_{zt}}{dz}+$$
$$+drd\theta dz\left(\frac{dp_{tt}}{d\theta}+p_{tr}\right)+T\rho rdrd\theta dz=0,$$

$$drd\theta dz\left(p_{rz}+r\frac{dp_{rz}}{dr}\right)+rdrd\theta dz\frac{dp_{zz}}{dz}+$$
$$+drd\theta dz\frac{dp_{tz}}{d\theta}+Z\rho rdrd\theta dz=0,$$

dividiendo por $rdrd\theta dz$ y reduciendo se hallará:

$$\frac{dp_{rr}}{dr}+\frac{1}{r}\frac{dp_{rt}}{d\theta}+\frac{dp_{rz}}{dz}+\frac{p_{rr}+p_{tt}}{r}+\rho R=0,$$

$$\frac{1}{r}\frac{dp_{tt}}{d\theta}+\frac{dp_{tr}}{dr}+\frac{dp_{tz}}{dz}+\frac{2}{r}p_{tr}+\rho T=0,$$

$$\frac{dp_{zz}}{dz}+\frac{1}{r}\frac{dp_{zt}}{d\theta}+\frac{dp_{zr}}{dr}+\frac{1}{r}p_{rz}+\rho Z=0.$$

Tales son las ecuaciones que expresan el equilibrio de un elemento del sólido elástico.

Son análogas á las que obtuvimos en el sistema ordinario de coordenadas, aunque algo más complicadas.

Son, como aquéllas, ecuaciones en diferenciales parciales de primer orden de las seis tensiones p con relación á r, t, z; de igual suerte que aquéllas eran también ecuaciones en diferenciales parciales de primer orden de N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, con relación á las variables x, y, z.

Hemos resuelto, pues, los dos problemas fundamentales: expresar las tensiones en función de las deformaciones y establecer las ecuaciones de equilibrio.

***

Las tensiones en función de las deformaciones encontramos que se expresaban por las fórmulas siguientes:

$$\left.\begin{aligned}
p_{rr} &= \lambda\theta_c + 2\mu\frac{dU}{dr} \\
p_{tt} &= \lambda\theta_c + \frac{2\mu}{r}\left(U + \frac{dV}{d\theta}\right) \\
p_{zz} &= \lambda\theta_c + 2\mu\frac{dW}{dz} \\
p_{tz} &= \mu\left(\frac{dV}{dz} + \frac{1}{r}\frac{dW}{d\theta}\right) \\
p_{rz} &= \mu\left(\frac{dU}{dz} + \frac{dW}{dr}\right) \\
p_{rt} &= \mu\left(\frac{dV}{dr} + \frac{1}{r}\frac{dU}{d\theta} - \frac{V}{r}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

en que la dilatación cúbica era

$$\theta_c = \frac{dU}{dr} + \frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta} + \frac{dW}{dz} + \frac{U}{r}.$$

De suerte que en el segundo miembro de las seis ecuaciones anteriores no entrarán más que las seis derivadas parciales de U, V, W, con relación á r, t, z, y además estas variables.

A este grupo (I) hay que agregar el que hemos obtenido hace un momento como expresión del equilibrio del sólido elemental, á saber:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dp_{rr}}{dr}+\frac{1}{r}\frac{dp_{rt}}{d\theta}+\frac{dp_{rz}}{dz}+\frac{p_{rr}+p_{tt}}{r}+\rho R=0\\
&\frac{1}{r}\frac{dp_{tt}}{d\theta}+\frac{dp_{tr}}{dr}+\frac{dp_{tz}}{dz}+\frac{2}{r}p_{tr}+\rho T=0\\
&\frac{dp_{zz}}{dz}+\frac{1}{r}\frac{dp_{zt}}{d\theta}+\frac{dp_{zr}}{dr}+\frac{1}{r}p_{rz}+\rho Z=0
\end{aligned}\right\}\text{(II)}$$

Todo queda reducido á substituir en estas últimas ecuaciones (II) los valores de p del grupo (I), cálculo que no ofrece dificultad de ningún género, y por el cual se llega á las tres ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\left(\lambda\theta_c+2\mu\frac{dU}{dr}\right)}{dr}+\frac{1}{r}\mu\frac{d\left(\frac{dV}{dr}+\frac{1}{r}\frac{dU}{d\theta}-\frac{V}{r}\right)}{d\theta}+\\
&\qquad+\mu\frac{d\left(\frac{dU}{dz}+\frac{dW}{dr}\right)}{dz}+\\
&+\frac{1}{r}\left[\lambda\theta_c+2\mu\frac{dU}{dr}+\lambda\theta_c+\frac{2\mu}{r}\left(U+\frac{dV}{d\theta}\right)\right]+\rho R=0,\\
&\frac{1}{r}\frac{d\left(\lambda\theta_c+\frac{2\mu}{r}\left(U+\frac{dV}{d\theta}\right)\right)}{d\theta}+\frac{\mu d\left(\frac{dV}{dx}+\frac{1}{r}\frac{dU}{d\theta}-\frac{V}{r}\right)}{dr}+\\
&\qquad+\frac{\mu d\left(\frac{dV}{dz}+\frac{1}{r}\frac{dW}{d\theta}\right)}{dr}+\\
&\qquad+\frac{2\mu}{r}\left(\frac{dV}{dr}+\frac{1}{r}\frac{dU}{d\theta}-\frac{V}{r}\right)+\rho T=0,
\end{aligned}\right\}\text{(A)}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\left(\lambda\theta_c+2\mu\frac{dW}{dz}\right)}{dz}+\frac{\mu}{r}\frac{d\left(\frac{dV}{dz}+\frac{1}{r}\frac{dW}{d\theta}\right)}{d\theta}+\\&+\mu\frac{d\left(\frac{dU}{dz}+\frac{dW}{dr}\right)}{dr}+\frac{\mu}{r}\left(\frac{dU}{dz}+\frac{dW}{dr}\right)+\rho Z=0.\end{aligned}\right\}\text{(A)}$$

Estas son las tres fórmulas fundamentales del problema de la Elasticidad expresadas en coordenadas cilíndricas y para el interior del sólido elástico si está limitado, ó para todo el sistema si es indefinido.

Puede darse á dichas ecuaciones una forma más sencilla, pero como no hemos de hacer uso en estos cursos de dichas fórmulas, no insistiremos en este punto, que ninguna enseñanza nos traería, para las cuestiones de Física matemática que hemos de estudiar.

El que quiera mayores detalles y desarrollos, puede consultar, entre otras, las obras sobre Elasticidad de Resal y Mathieu.

***

Lo único que agregaremos sobre las tres fórmulas *A* obtenidas, es que representan, á pesar de su aparente complicación, ecuaciones en diferenciales parciales de segundo orden de las tres funciones U, V, W, con relación á las variables independientes r, θ, z.

Esto es evidente, y se ve, desde luego, sin necesidad de desarrollar los cálculos, puesto que se han de tomar las derivadas parciales con relación á r, θ, z, de expresiones que contienen coeficientes diferenciales parciales de primer orden respecto á estas mismas variables independientes.

Además, se observa inmediatamente que son funciones lineales con relación á dichos coeficientes diferenciales: ni

entran potencias, ni entran productos; pero también se ve que los coeficientes no son constantes.

En suma, son mucho más complicadas, al menos en general, que las que obtuvimos aplicando el sistema ordinario de coordenadas.

Que estas son las ecuaciones fundamentales es evidente, porque lo fundamental en la teoría de los sistemas elásticos es obtener las componentes del desplazamiento de cada punto en función de las coordenadas de este punto; todo lo demás, tensiones, dilataciones cúbicas, trabajo interno, todo, repetimos, se deduce como hemos visto de las fórmulas expresadas.

Pero son ecuaciones diferenciales, luego es preciso integrarlas, es decir, obtener en este caso de coordenadas cilíndricas tres funciones de U, V, W,

$$U = F\,(r, \theta, z),$$
$$V = F_1(r, \theta, z),$$
$$W = F_2(r, \theta, z),$$

que satisfagan á las ecuaciones diferenciales y que tengan bastante generalidad para satisfacer á las ecuaciones de los límites en este mismo sistema de coordenadas cilíndricas, condiciones de que hablaremos antes de terminar esta conferencia.

Conseguido esto, el problema estará resuelto, porque para cada punto del sistema, es decir, para los valores de r, θ, z que determinan dicho punto, substituyendo estos valores en F, F_1, F_2, conoceremos U, V, W, ó sea las componentes del desplazamiento y todos los elementos del problema elástico que antes enumerábamos para dicho punto y para todos los del sistema.

Por lo demás, el problema analítico, es decir, el de integración de estas ecuaciones diferenciales es inmensamente

difícil y no ha sido todavía resuelto con la debida generalidad.

Por eso hemos dicho en repetidas ocasiones que las grandes dificultades de los problemas de Física matemática, aparte de las que nacen de la naturaleza de las hipótesis que se hacen al principio, estas dificultades, repetimos, no están en plantear matemáticamente el problema, por más que á veces sea trabajo laborioso, sino en resolver las ecuaciones en que el problema queda planteado.

La dificultad está, pues, al principio y al fin.

***

Hemos obtenido las ecuaciones en coordenadas cilíndricas para un punto cualquiera del sistema; ahora debemos completar la solución teórica estableciendo las ecuaciones de equilibrio para un punto de la superficie que limite el cuerpo elástico.

Y esta superficie será, ó un cilindro de revolución, ó un plano de sección recta, porque de lo contrario, no hubiéramos escogido este sistema de coordenadas.

No es que no pueda aplicarse á cualquier sistema elástico limitado; es que no proporciona ventajas ni simplificaciones de ningún género, y crea complicaciones de todo punto inútiles.

Supongamos, pues, que el sólido está limitado por una superficie cilíndrica de revolución alrededor del eje Z y de radio R, y por dos planos ó bases perpendiculares á este eje.

Tenemos que establecer el equilibrio de un punto cualquiera de la superficie cilíndrica ó de las dos bases del cilindro.

Empecemos por la superficie cilíndrica: sea figura 61 un trozo de ésta, $ABCD$, proyectada en ab.

Imaginemos otro cilindro de revolución infinitamente próximo al primero $A'B'C'D'$.

Entre las dos quedará una capa cilíndrica, y terminaremos de definir el sólido elemental, que hemos de considerar, trazando las dos secciones rectas $AB\,A'B'$ y $CD\,C'D'$.

Además, los dos planos meridianos $AA'\,CC'$ y $BB'\,DD'$.

Resultará, pues, una capa infinitamente estrecha que realmente será un sólido compuesto, de la misma manera que el que imaginamos en la figura 59 para el interior del cuerpo.

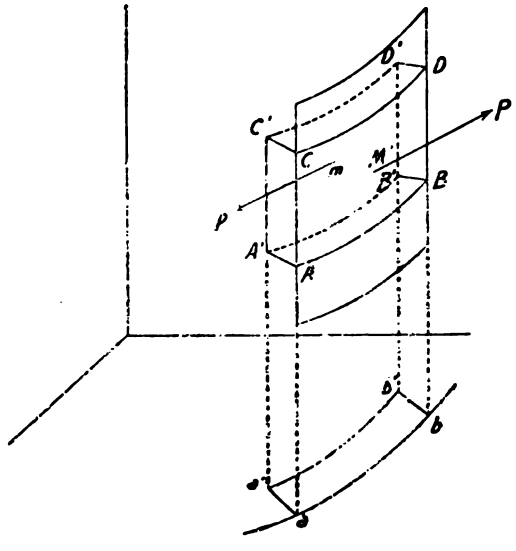


Figura 61.

Esta es, precisamente, la ventaja del sistema cilíndrico en el caso que estamos considerando; que la forma del sólido para la superficie es la misma que para el interior del cuerpo y los cálculos que hicimos para el uno nos sirven para el otro.

Dicho sólido, en la figura 61, se proyecta en el trapecio circular $aba'b'$.

Dicho sólido, que en rigor es una capa de espesor pequeñísimo, es tal, que una de sus dos caras, $ABCD$, coincide con la superficie exterior del cilindro, y contiene el punto M'

de la superficie, para el cual queremos establecer las ecuaciones de equilibrio.

Si suponemos que, realizadas ya las deformaciones, y llegando al equilibrio, la capa en cuestión es rígida, establecer las condiciones de equilibrio de dicha capa, será establecer las condiciones de equilibrio del punto M' que á ella pertenece.

Y cuando el sólido se aproxime cada vez más á M', desaparecerá ya dicho sólido como andamiaje geométrico, y no quedarán más que las ecuaciones de equilibrio del punto M' de que tratamos.

Pero podemos suponer las dimensiones de las caras $ABCD$, $A'B'C'D'$ son de primer orden, y que en cambio las aristas AA', BB', CC', DD' son de segundo orden ó de un orden superior, con lo cual las caras laterales serán tan pequeñas con respecto á las caras $ABCD$ y $A'B'C'D'$ como se quieran, y las tensiones sobre dichas caras laterales, que son proporcionales á las áreas de estas caras, serán también despreciables en orden de pequeñez; luego, en suma, para el equilibrio del sólido ó de la capa infinitamente estrecha, no hay que tener en cuenta más que dos fuerzas: la fuerza exterior P aplicada á la cara $ABCD$ en el punto M', y la fuerza p aplicada á la cara opuesta $A'B'C'D'$ en el punto m.

Representemos las componentes de P por P_r, P_t, P_z, y por ω el área de las caras $ABCD$ y su opuesta.

Las componentes de la fuerza exterior sobre la cara ω serán:

$$\omega P_r, \omega P_t, \omega P_z.$$

Hemos representado asimismo por p la tensión sobre cualquier cara del sólido elemental, en la unidad de superficie. Como la cara $A'B'C'D'$ es un elemento de superficie cilíndrica, será evidentemente normal al radio r que pasa por uno de sus puntos, por ejemplo m, de suerte que en este caso la

tensión que hemos de considerar será p_r y sus tres componentes serán p_{rr}, p_{rt}, p_{rz}.

Las componentes de la tensión sobre toda el área ω serán, por lo tanto,

$$\omega p_{rr},\ \omega p_{rt},\ \omega p_{rz}.$$

Y puesto que sólo hemos de considerar el equilibrio de las fuerzas P y p sobre las caras $ABCD$, $A'B'C'D'$, toda vez que la acción de las fuerzas sobre las otras caras es despreciable, las ecuaciones de equilibrio se obtienen, desde luego, sumando las componentes de P y de p_r é igualando á cero.

Pero no olvidemos que las p representan la acción de la parte situada del lado positivo sobre la región negativa, de manera que las ecuaciones de equilibrio serán:

$$-\omega p_{rr} + P_r\omega = 0,\ -\omega p_{rt} = P_t\omega,\ -\omega p_{rz} = P_z\omega,$$

ó bien:

$$p_{rr} = P_r,\ p_{rt} = P_t,\ p_{rz} = P_z.$$

Sólo falta escribir en vez de las p sus valores en función de las componentes de las deformaciones.

Tendremos, por lo tanto, para las tres ecuaciones de equilibrio del punto M' de la superficie cilíndrica:

$$\begin{aligned} &\lambda\theta_c + 2\mu\frac{dU}{dr} = P_r \\ &\mu\left(\frac{dV}{dr} + \frac{1}{r}\frac{dU}{d\theta} - \frac{V}{r}\right) = P_t \qquad \text{(B)} \\ &\mu\left(\frac{dU}{dz} + \frac{dW}{dr}\right) = P_z. \end{aligned}$$

en que P_r P_t, P_z, pueden ser constantes para todos los puntos de la supercie cilíndrica ó, en general, pueden ser varia-

bles, dependiendo cada una de ellas de las dos variables independientes θ, z. Ya hemos dicho que con la r no ha de contarse, porque ha de substituirse $r = R$, siendo el R el radio del cilindro exterior.

En suma, las tres ecuaciones anteriores son ecuaciones en diferenciales parciales de primer orden de las tres funciones U, V, W con relación á dos variables independientes θ, z.

A estas ecuaciones deben satisfacer convirtiéndolas en identidades los valores generales que obtengamos para U, V, W, integrando las tres ecuaciones (A) y poniendo en dichas funciones U, V, W en vez de r el valor R.

***

Pero el sólido no está aquí terminado por una superficie única, sino lateralmente por la superficie cilíndrica de radio R, cuyo equilibrio acabamos de establecer y en los extremos por dos secciones rectas cuyos planos son perpendiculares al eje Z.

Deberemos, pues, también establecer el equilibrio para estos planos.

Así, en este caso, las tres ecuaciones relativas á los límites, por decirlo de este modo, se desdoblan en seis, y aun pudiéramos decir en nueve, tres para la superficie cilíndrica, y para cada base otras tres.

Establecer el equilibrio de las bases es sumamente sencillo; es repetir lo que hemos dicho para la superficie cilíndrica.

Sea $A'B'$ una de las secciones rectas (fig. 62) y establezcamos el equilibrio de un punto cualquiera M' de dicha base.

Consideremos el sólido elemental $AB\ ab$, idéntico al que hemos considerando para un punto del interior, ó para la superficie cilíndrica que suponemos proyectado en $AB\,ab$, y que se compondrá siempre de dos secciones rectas $AB\ ab$

de dos superficies cilíndricas que suponemos que se proyectan en Aa, Bb, y para simplificar la figura, admitimos que ambas se confunden con los planos tangentes, y de dos planos meridianos que admitimos que se proyectan en el mismo rectángulo $ABab$.

En este sólido elemental se supone que, si las líneas AB, ab son infinitamente pequeñas de primer orden, las líneas Aa, Bb son de segundo orden, ó de un orden superior; de modo que, para el equilibrio de este sólido que en rigor es

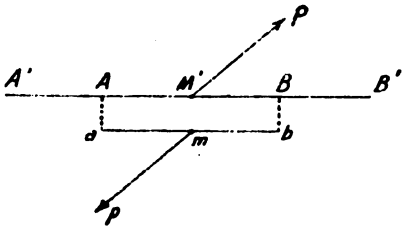


Figura 62.

una capa infinitamente estrecha, podemos prescindir de las tensiones sobre las caras laterales: es decir, los dos cilindros Aa, Bb y los dos planos meridianos $ABba$, porque las caras serán infinitamente pequeñas de orden superior.

Si suponemos que P es la fuerza exterior aplicada á M' referida á la unidad de superficie y p la tensión sobre ab aplicada en m también por unidad superficial, sólo tendremos que establecer el equilibrio de las fuerzas P y p.

Representando por P_r, P_t, P_z las componentes de P respecto á los ejes auxiliares r, t, z, y por ω el área AB, las tres componentes de la fuerza exterior sobre esta cara serán:

$$\omega P_r,\ \omega P_t,\ \omega P_z.$$

Análogamente, la fuerza p será en este caso la tensión sobre un plano ab perpendicular al eje de las z, es decir, p_z y sus componentes sobre toda el área ab

$$\omega p_{zr},\ \omega p_{zt},\ \omega p_{zz}.$$

Luego tendremos, análogamente á lo que resultaba para la superficie cilíndrica,

$$\omega P_r = \omega p_{zr}, \quad \omega P_t = \omega p_{zt}, \quad \omega P_z = \omega p_{zz}$$

y dividiendo por ω

$$P_r = p_{zr}, \quad P_t = p_{zt}, \quad P_z = p_{zz}.$$

Sólo falta substituir los valores de p en función de las componentes de las deformaciones, y tendremos:

$$\begin{aligned} &\mu\left(\frac{dU}{dz} + \frac{dW}{dr}\right) = P_r \\ &\mu\left(\frac{dV}{dz} + \frac{1}{r}\frac{dW}{d\theta}\right) = P_t \qquad \text{(B')} \\ &\lambda\theta_c + 2\mu\frac{dW}{dz} = P_z. \end{aligned}$$

Lo mismo que decíamos antes para la superficie cilíndrica, diremos ahora, que estas ecuaciones (B') son ecuaciones en diferenciales parciales de primer orden de las tres funciones U, V, W, con relación á dos variables independientes, que aquí serán r y θ; y al hacer la substitución de U, V, W para convertir en identidades el grupo (B'), en vez de z deberemos substituir el valor constante z_0 que corresponda á dicha cara $A'B'$ (fig. 62).

Y con esto queda terminado el estudio de las coordenadas cilíndricas aplicadas á la teoría de la Elasticidad, al menos en los límites elementales á que nos venimos ciñendo en estas conferencias.

IX. — Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimacuarta.

SEÑORES:

Hemos expuesto en las últimas conferencias el sistema de coordenadas cilíndricas con aplicación á la teoría de la Elasticidad.

Y dijimos también que, antes de concluir esta primera parte del curso, trataríamos de las coordenadas esféricas.

De ellas vamos á tratar en esta conferencia; pero no con el desarrollo ni con los pormenores en que hemos entrado al estudiar las coordenadas cilíndricas.

En primer lugar, porque sería repetir paso á paso, variando tan sólo términos, lo que allí dijimos.

En segundo lugar, porque ni de las coordenadas cilíndricas ni de las esféricas hemos de hacer aplicación inmediata.

En tercer lugar, porque son problemas, más bien que de Física matemática, de Geometría analítica, y en todo caso, de Mecánica elemental, que no ofrecen dificultad de ningún género.

Y en suma, porque nos robarían el tiempo que necesitamos para problemas de más actualidad y de interés más inmediato.

Además, el que quiera enterarse de estas teorías puede consultar, entre otras obras, los tratados de Elasticidad de Lamé, de Resal y de Mathieu.

Por todas la razones expuestas, sólo daremos un resumen muy sucinto de la teoría de las coordenadas esféricas, con aplicación al problema de la Elasticidad.

***

En dicho sistema de coordenadas, como en todos los demás, cada punto está definido por la intersección de tres superficies, que en este caso son: 1.° Una superficie esférica. 2.° Un cono de revolución cuyo vértice está en el centro de la esfera. 3.° Un plano meridiano común á ambas superficies. El eje es siempre el mismo para todas las esferas, para todos los conos y para todos los planos meridianos.

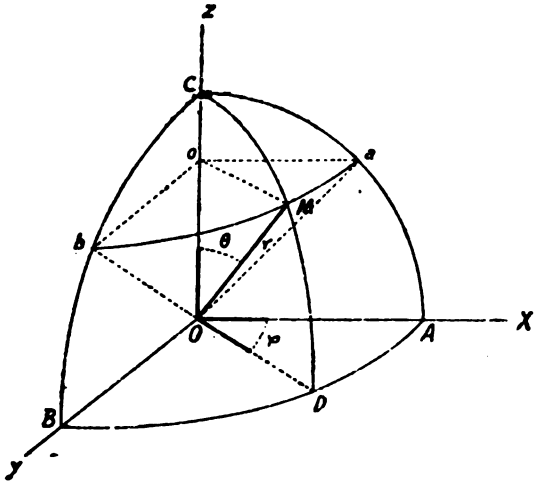


Figura 63.

En el sistema ordinario, las tres superficies eran tres planos.

En el sistema cilíndrico ó semipolar, dos de las superficies eran planas; la tercera, un cilindro de revolución.

En el sistema de coordenadas esféricas, una de las superficies es un plano; las otras dos superficies, son curvas.

Esto es lo que hemos representado en la figura 63.

Sean tres ejes fijos OX, OY, OZ, y consideremos un punto M, cuya posición en el espacio queremos fijar por medio de coordenadas esféricas.

1.° Con un radio $r = OM$ trazaremos una esfera que pase por el punto M. Sólo hemos representado de esta esfe-

ra la parte ABC comprendida en el primer ángulo triedro de los ejes XYZ. En el sistema de coordenadas esféricas, la ecuación de esta superficie será

$$r = a,$$

siendo r la variable, y a su valor para cada punto. Para el punto M, el valor de r será OM. Y haciendo variar a, tendremos todas las esferas, cuyo centro sea O, desde este punto hasta el infinito.

2.° Por M haremos pasar un cono de revolución cuyo eje sea OZ, y el semiángulo en el vértice será COM que representaremos por θ. La intersección de este cono con la esfera será en el paralelo aMb. Tampoco hemos representado más que una parte de dicho cono, la comprendida en el triedro XYZ.

El ángulo θ variará desde cero, cuando OM coincida con OC, hasta 180°.

La ecuación de todas estas superficies cónicas será evidentemente

$$\theta = b,$$

en que θ es la variable y b la constante que define cada cono.

Un punto del paralelo aMb estará definido por las dos ecuaciones

$$r = a, \theta = b.$$

Es decir, el cono y la esfera, según se sabe, por Geometría analítica.

El ángulo θ sabemos que en los cálculos no se mide por grados ordinariamente, sino por la longitud de un arco, cuyo radio sea 1 y que esté comprendido entre los lados OM, OC.

A este ángulo se le puede llamar *colatitud*, porque en el sistema geográfico de coordenadas, si OZ es la línea polar

y ADB el ecuador, MD es la latitud, de suerte que CM será el complemento de la latitud, es decir, la colatitud.

3.° Por último, por el mismo punto M que queremos determinar y por el cual hemos hecho que pasen la esfera y el cono de revolución, hagamos pasar el plano meridiano $OCMD$, y es claro que su intersección con las dos superficies anteriores, ó si se quiere con el paralelo aMb, determinará de una manera única el punto M.

Dicho plano meridiano $OCMD$ estará definido por el ángulo que forma con el plano coordenado XZ, ó si se quiere, por el ángulo φ que forma su traza OD sobre el plano XY con el eje X.

Este ángulo puede llamarse ángulo acimutal ó también puede decirse que es la longitud AD del punto M, como sería en un sistema geográfico.

La ecuación de tal plano en un sistema de coordenadas esféricas, sería evidentemente

$$\varphi = c$$

en que φ es la variable, y á cada valor de c correspondería un plano meridiano, el cual variaría desde 0 á 360°, ó sea de 0 á 2π.

En resumen, cada punto M del espacio estaría definido por

$$OM = r, \qquad MOC = \theta; \qquad AOD = \varphi.$$

De suerte que las tres ecuaciones que determinan el punto M serán

$$r = a; \qquad \theta = b; \qquad \varphi = c:$$

haciendo variar estas tres constantes, tendremos representados todos los puntos del espacio.

En la figura 64 hemos representado el punto M por analogía con el sistema ordinario por las tres coordenadas

MD, *DA*, *OA*, que equivalen, por decirlo así, en posición á *z*, *y*, *x*; sólo que las dos primeras, en vez de ser rectas, son arcos de círculo: *MD* es la latitud, *DA* es la longitud y *OA* es el radio de la esfera.

Claro es que estas tres coordenadas equivalen á las anteriores, que son las que generalmente se adoptan, y las que adoptaremos nosotros en lo que nos queda por decir.

Para concluir este punto, hagamos una observación importantísima, más que importante, fundamental.

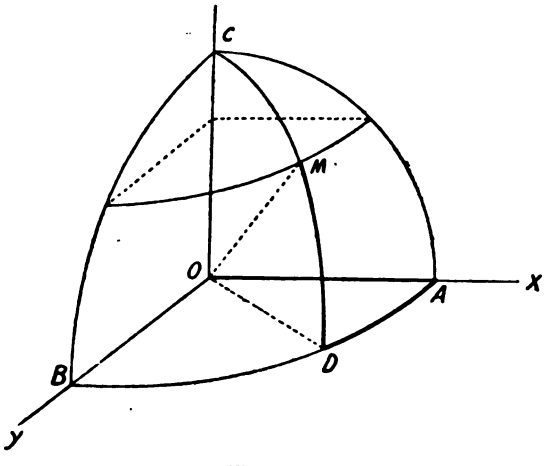


Figura 64.

Las tres superficies que hemos adoptado, á saber: la esfera, el cono y el plano meridiano, se cortan en ángulo recto.

En efecto; las generatrices del cono son radios de la esfera, de modo que cada uno de ellos, *OM*, por ejemplo (figura 63), será perpendicular al plano tangente á la esfera en *M*. Pero el plano tangente al cono en *M*, pasa por el radio *OM*, luego el plano tangente al cono y el plano tangente á la esfera se cortan normalmente en el punto *M*.

Además, el plano meridiano *OCMD*, pasa también por el radio *OM*, luego será también perpendicular al plano tangente en *M* á la esfera.

Por último, dicho plano meridiano lo es del cono de revolución, luego será perpendicular al plano tangente en M á la esfera.

En resumen; las tres superficies se cortan normalmente dos á dos en cada punto M, luego las tres superficies forman para cada punto M un triedro trirrectangular, cuyas tres caras serán un plano, una esfera y un cono; dos de ellas son curvas, la tercera es plana.

Esta circunstancia nos permite introducir en este caso todas las simplificaciones que introdujimos en el sistema de coordenadas cilíndricas.

Y si escogiésemos un sistema cualquiera de coordenadas curvilíneas, aun elegiríamos tres superficies que formasen constantemente triedros trirrectangulares.

***

Hemos definido la posición de un punto por las tres coordenadas r, φ, θ.

Supongamos que este punto es M (fig. 65).

Si este punto en la deformación elástica viene á parar á M', parece natural que la posición del punto M' se defina á su vez por los incrementos que experimentan las coordenadas de M al pasar de M á M', es decir, por

$$dr,\ d\varphi,\ d\theta.$$

Y en rigor esto se hace; pero con algunas pequeñas modificaciones que simplifican notablemente el problema.

Para ello, por el punto M, siguiendo la misma marcha que en las coordenadas cilíndricas, se hace pasar un sistema de ejes coordenados auxiliar que están representados por líneas gruesas en la figura 65.

Estos ejes son: Mr, prolongación del radio OM; Mt, que es tangente al paralelo que pasa por M, es decir, á $a'Mb'$,

intersección del cono con la esfera, y trazada en la dirección en que crece el ángulo φ; por último, Mm, tangente en M al meridiano CMD y en el sentido en que crece el ángulo θ.

Dichos tres ejes forman evidentemente un sistema trirrectangular, porque dos á dos determinan los planos tangentes á las tres superficies que pasan por M para definir este

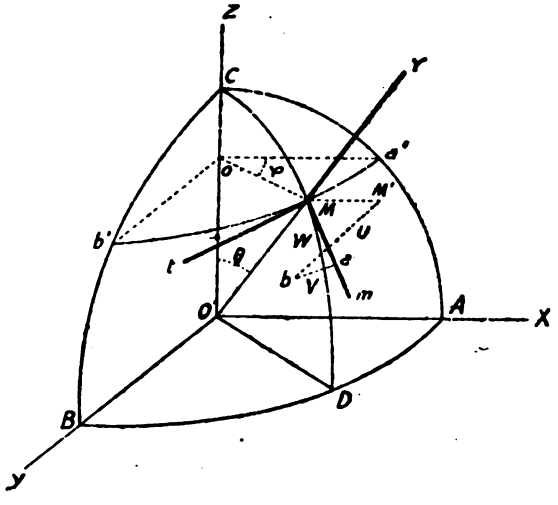


Figura 65.

punto, y hemos dicho que estas tres superficies se cortan normalmente.

En efecto; el plano tMm es tangente á la esfera, porque pasa por Mt tangente al paralelo y por Mm tangente al meridiano.

El plano tMr es tangente al cono porque pasa por la generatriz OMr y por Mt, que es tangente al paralelo, el cual está situado en el cono.

Por último, el plano mMr coincide evidentemente con el meridiano, puesto que pasa por dos rectas OMr, Mm que están situadas en él.

Este será el sistema auxiliar trirrectangular que conside-

raremos, porque en rigor, y alrededor del punto M á las tres superficies se pueden substituir los tres planos con errores infinitamente pequeños de orden superior.

Así el punto M', que es la posición que toma M por su desplazamiento, se define por tres coordenadas ordinarias referidas á este sistema de ejes. A saber: $U = M'b$ paralelamente al eje de las r.

$V = ba$ paralelamente al eje t. Y por fin $W = Ma$ paralelamente al eje m.

La U coincide con el incremento de r, porque r y U son paralelas, y como la distancia MM' es sumamente pequeña, con errores de orden superior puede considerarse que ambas cantidades son iguales.

$ba = V$ no coincide con $d\varphi$, pero contar V sobre t, ó contarla sobre el arco $a'Mb'$ sólo produce errores de orden superior, de modo que puede suponerse

$$V = oM \times d\varphi = r \operatorname{sen} \theta d\varphi.$$

Por último Ma, si se cuenta sobre el meridiano en vez de contarse sobre la tangente, podrá expresarse evidentemente de este modo:

$$Ma = W = rd\theta.$$

De suerte que las tres coordenadas U, V, W que determinan la posición del punto M', si no son precisamente las variaciones de las verdaderas coordenadas, se expresan con facilidad suma en función de ellas.

***

Pasemos á las tensiones.

Por consideraciones idénticas á las que hacíamos en las coordenadas cilíndricas vamos á substituir á las tensiones y á sus componentes en el punto M ó en puntos infinitamente

próximos á él, respecto á las tres superficies fundamentales, el plano meridiano, el cono y la esfera, las tensiones y las componentes respecto á los tres planos del triedro auxiliar *Mtmr*.

Los errores ya sabemos que son de orden superior.

Las notaciones serán idénticas á las que hemos seguido hasta aquí.

Siempre emplearemos la letra p y se sobreentiende que nos referimos á las tensiones por unidad de superficie.

Cuando se trate de la esfera, como su plano tangente es *tMm*, que es perpendicular á r, el primer subíndice será r, y los segundos subíndices expresarán las componentes de esta tensión con relación á los tres ejes r, t, m; de suerte que tendremos:

$$p_{rr}, \quad p_{rt}, \quad p_{rm},$$

para los tres componentes de la tensión sobre la superficie esférica ó sobre su plano tangente *tm* alrededor de *M*.

La tensión sobre el plano meridiano, como está definido por *mr*, y es perpendicular á t, se designará por p_t, y para designar las tres componentes se pondrán los tres subíndices r, t, m.

De modo que

$$P_{tr}, \quad P_{tt}, \quad P_{tm}$$

designarán las tres componentes paralelamente á los ejes r, t, m de la tensión que actúa sobre el plano meridiano en el punto M ó á pequeña distancia del mismo.

Por último, la tensión sobre el cono en el punto M y en su proximidad ó sea en el plano tangente, como está definido por t, r y es perpendicular á m, llevará m por primer subíndice, y las tres letras r, t, m por segundos subíndices para expresar las tres componentes.

Así

$$P_{mr}, \quad P_{mt}, \quad P_{mm}$$

serán las tres componentes de la tensión por unidad de superficie para el punto M sobre el cono ó sobre su plano tangente.

El siguiente cuadro expresa el conjunto de las nueve componentes que acabamos de definir.

$$\begin{array}{lll} p_{rr}, & p_{rt}, & p_{tm} \\ p_{tr}, & p_{tt}, & p_{tm} \\ p_{mr}, & p_{mt}, & p_{mm}. \end{array}$$

Como estas componentes se refieren á un sistema de ejes trirrectangulares, con errores de orden superior, podemos dar por demostrado para este caso, es decir, para las coordenadas esféricas, lo que demostramos para las coordenadas ordinarias: á saber, que no cambia el valor de una componente cuando cambia el orden de los subíndices.

De suerte que tendremos:

$$p_{rt} = p_{tr}; \quad p_{rm} = p_{mr}; \quad p_{tm} = p_{mt}$$

y las nueve cantidades del cuadro anterior se reducen como siempre á las seis siguientes:

$$\begin{array}{lll} p_{rr}, & p_{tt}, & p_{mm} \\ p_{rt}, & p_{rm}, & p_{mt} \end{array}$$

que equivalen á N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3.

***

Definido un punto cualquiera del espacio en coordenadas esféricas; definidas las componentes U, V, W de cada desplazamiento, y definidas las componentes de las tensiones para las tres superficies que pasan por un punto cualquiera M, ó sea para sus planos tangentes, que forman el sistema auxiliar r, t, m, debemos resolver los *dos problemas funda-*

mentales, que siempre hemos resuelto: expresión de las componentes de las tensiones en función de los desplazamientos y equilibrio de un sólido elemental en función de las tensiones.

Estudiemos el primero de estos dos problemas.

Expresión de las componentes de las tensiones p *en función de* U, V, W.—Este problema se simplifica mucho como en el caso de las coordenadas cilíndricas, porque en parte está ya resuelto.

En efecto; cuando estudiamos el sistema ordinario de coordenadas aplicado al problema de la Elasticidad, obtuvimos la expresión de las N, T, en función de las derivadas parciales de u, v, w con relación á x, y, z.

Luego si referimos u, v, w á los ejes r, t, m, puesto que las p son las mismas que las N, T, podremos escribir inmediatamente los valores de las componentes p en función de

$$\begin{array}{ccc} \frac{du}{dx}, & \frac{du}{dy}, & \frac{du}{dz} \\ \frac{dv}{dx}, & \frac{dv}{dy}, & \frac{dv}{dz} \\ \frac{dw}{dx}, & \frac{dw}{dy}, & \frac{dw}{dz}. \end{array}$$

Pero no son estas las derivadas que necesitamos, sino las de U, V, W, con relación á r, t, m; es decir, que hay que expresar las nueve cantidades del grupo anterior en función de estas otras nueve derivadas parciales:

$$\begin{array}{ccc} \frac{dU}{dr}, & \frac{dU}{dt}, & \frac{dU}{dm} \\ \frac{dV}{dr}, & \frac{dV}{dt}, & \frac{dV}{dm} \\ \frac{dW}{dr}, & \frac{dW}{dt}, & \frac{dW}{dm}. \end{array}$$

En resumen, el problema que estamos estudiando se reduce á este otro: expresar el primer grupo de nueve cantidades, que hemos escrito, en función del segundo, con lo cual, eliminando las primeras en los valores de p, tendremos expresadas las componentes de las tensiones en función de las derivadas del último cuadro.

Para obtener este resultado hay que seguir exactamente la misma marcha que cuando estudiamos las coordenadas cilíndricas.

Es decir, obtendremos los valores de las componentes du, dv, dw proyectando los desplazamientos de dos puntos M M_1 sobre los tres ejes r, t, m y tomando sus diferencias.

Este es un problema de Geometría analítica que no ofrece dificultad de ningún género.

Después dividiremos por dx, dy, dz ambos miembros; pero en el segundo expresaremos las diferenciales de x, y, z por las diferenciales de las nuevas variables.

Por último, lo mismo que hacíamos en el caso de las coordenadas cilíndricas, supondremos que el punto M, al pasar á la posición M_1, corre por el eje de las r, ó el de las t, ó el de las m, con lo cual el primer miembro siempre expresará una derivada parcial con relación á x, y, z que aquí se llaman r, t, m.

Pero hay esta circunstancia importantísima y que simplifica el problema, á saber: que al resultar derivadas parciales en el primer miembro, resultarán también derivadas parciales en el segundo, como se ve desde luego.

Supongamos para fijar las ideas que el punto recorre el eje t, esto supone que la r y la m no valían.

Pero recorrer el eje t es lo mismo que recorrer el arco $a'Mb'$ con errores infinitamente pequeños de orden superior, si el punto no se separa de su posición M más que infinitamente pequeños de primer orden.

Mas recorriendo dicho paralelo, r y θ son constantes, sólo queda variable la coordenada φ, luego si en el primer miem-

bro tenemos derivadas parciales con relación á t, en el segundo miembro tendremos derivadas parciales con relación á φ; así se expresarán las del primer grupo en función de las del segundo.

Lo mismo podríamos decir para todos los demás casos.

No entramos en más pormenores porque sería repetir lo que dijimos al tratar de las coordenadas cilíndricas.

Pasemos al segundo problema.

***

Condiciones de equilibrio del sólido elemental.—El sólido elemental se expresa como siempre, por seis superficies que lo limitan.

Dos de ellas son dos superficies esféricas distante una de otra la cantidad dr.

Las otras dos son dos superficies cónicas en que la diferencia de los semiángulos del vértice es $d\theta$.

Y por último, las otras dos son dos planos meridianos que forman entre sí el ángulo $d\varphi$.

Trazando por el punto M los dos planos tangentes al cono y á la esfera que pasan por este punto y el plano meridiano que pasa por él, tendremos los tres planos trirrectangulares que antes explicamos, y sus intersecciones serán los tres ejes auxiliares r, m, t.

Para expresar el equilibrio de este sólido elemental basta determinar las tensiones p que actúan sobre las seis caras y descomponerlas paralelamente á los ejes r, m, t que pasan por el punto M, igualando, por fin, las sumas de las componentes paralelas á cada uno de estos tres ejes y las de las componentes de las fuerzas exteriores á cero.

De este modo tendremos las tres ecuaciones de equilibrio del sólido elemental en coordenadas esféricas.

En este cálculo á las tensiones sobre las verdaderas caras del sólido se substituyen con errores infinitamente pequeños

de orden superior las tensiones sobre los planos tangentes, es decir, las tensiones p; y como las componentes de todas estas tensiones forman ángulos perfectamente conocidos con r, t, m, el problema es un problema sencillísimo de Geometría analítica.

***

Por último, substituyendo en estas ecuaciones de equilibrio del sólido elemental los valores de las tensiones p en función de las derivadas parciales de U, V, W, con relación á r, θ, φ que habíamos obtenido anteriormente, hallaremos las ecuaciones finales de la Elasticidad en coordenadas esféricas para el medio elástico indefinido.

No hacemos estos cálculos porque son elementales, aunque algo enojosos; pero el lector puede consultar las obras de Resal y Mathieu, en que están completamente desarrolladas.

Respecto al equilibrio de las superficies, como suponemos que el cuerpo está terminado por conos, esferas y planos meridianos, ó por alguno de estas superficies, no tendremos más que seguir la marcha que seguíamos para las coordenados cilíndricas; es decir, igualar las componentes de la tensión sobre alguna de estas superficies á las componentes de la fuerza exterior.

***

Las consideraciones que preceden se aplican sin ningún género de dificultad, aunque con mayor complicación en los cálculos á las coordenadas curvilíneas en general: sólo haremos á este propósito algunas breves observaciones.

Las tres familias de superficies que elijamos deben ser octogonales, y por un teorema bien conocido de cálculo sus intersecciones serán las líneas de curvatura.

En el punto M que escojamos habrá que trazar tres planos

tangentes á las tres superficies que pasan por dicho punto, planos que formarán un ángulo triedro trirrectangular.

Sus intersecciones formarán los ejes auxiliares.

El desplazamiento del punto se determinará con relación á estos ejes por coordenadas ordinarias infinitamente pequeñas.

A las tensiones sobre las superficies se substituirán las tensiones sobre los planos tangentes, y por métodos análogos á los expuestos se resolverán estos dos problemas.

1.° Expresar las p en función de las derivadas parciales de los desplazamientos con relación á las nuevas coordenadas.

Nos servirá para simplificar el problema esta consideración: que cuando el punto M recorre uno de los ejes coordenados, con errores infinitamente pequeños, puede suponerse que recorre la línea de curvatura á que es tangente, de modo que en el primer miembro y en el segundo de cada ecuación se obtendrán derivadas parciales.

2.° Se determinarán las ecuaciones de equilibrio del sólido elemental, el cual estará formado por seis superficies, á saber: dos consecutivas de cada familia.

A las tensiones sobre las superficies se podrán substituir las tensiones sobre los planos tangentes.

Por último, eliminando las p de estas últimas ecuaciones, obtendremos las ecuaciones diferenciales del equilibrio del sólido elástico elemental en un medio indefinido que siempre serán de segundo orden.

En cuanto al equilibrio de un punto de la superficie no hay más que generalizar lo que hemos explicado para las coordenadas ordinarias, para las coordenadas cilíndricas y para las coordenadas esféricas.

X.—Aplicación cómoda y sencilla de la orina á la investigación general de oxidantes.

POR JUAN FAGES VIRGILI.

Contiene siempre la orina normal, aunque en pequeñísima proporción é independientemente de los pigmentos que le dan su coloración ordinaria, varios cuerpos denominados genéricamente *cromógenos*, por ser capaces, en determinadas condiciones, de transformarse en materias colorantes. Muchos de estos cromógenos son incoloros, pues defecada la orina por los procedimientos usuales, resulta un líquido sin color, pero capaz de colorearse intensamente, y casi de igual modo que si no se hubiese defecado, al someterla á aquellas determinadas condiciones.

Ni la fórmula, ni la función química de estos cromógenos están bien definidas, y cuanto se ha dicho de su origen es hipotético, siendo lo más probable, según los estudios de Nenki, que proceden de los mismos pigmentos sanguíneos, que contienen un núcleo pirrólico, del que pueden derivar, además de la urobilina, el indol, que viene á ser el núcleo fundamental de los cromógenos de la orina.

Es el más conocido de estos cromógenos el *indoxilo*, que, eterificado en su mayor parte por el sulfato ácido de potasio, constituye el *indican* urinario, ó más excepcionalmente por el *ácido glucourónico* forma el *ácido indoxilglucourónico*. Las acciones oxidantes convierten el indican en la *hemiindigotina*, según Maillard, que polimerizada da la verdadera indigotina, azul, y la indirubina, roja, solubles ambas, con color púrpura en la mezcla, de la que puede extraerlas el cloroformo (fundándose en esto la investigación del indican urinario). Tal vez sea otro de los cromógenos el *metilindican* ó *ácido escatolsulfúrico*, no aceptado por todos en la orina,

y que por oxidación da un colorante rojo, así como la *uroroseina* que, convertida fácilmente en *uroeritrina*, tiñe de rojo la orina, de la que la separa el alcohol amílico. Pero seguramante son más los cromógenos, aunque su pequeña cantidad no ha permitido estudiarlos ni separarlos, pues sometida la orina á las acciones oxidantes convenientes, adquiere un intenso color rojo-purpúreo que no separa, sino parcialmente, la sucesiva agitación de la mezcla con cloroformo y con alcohol amílico.

Coinciden todos estos cromógenos en la facilidad de poder ser peroxidados convirtiéndose entonces, no en cuerpos de intenso color, sino en otros incoloros, ó amarillos, como la *isatina*, que es el producto de la peroxidación del indican. La peroxidación de estos cromógenos no sólo es función de la cantidad de oxidante, sino de su calidad, además de serlo de la temperatura, circunstancia esta última que no siempre se ha tenido en cuenta en los procedimientos de investigación del indican urinario. En frío se necesita bastante más oxidante que en caliente para producir la peroxidación, y así, la misma proporción de oxidante puede producir en una orina intensa coloración, por oxidación de sus cromógenos, ó dar una orina tal vez más pálida, por peroxidación, según se evite ó no la elevación de temperatura.

Como en todas las orinas que he ensayado, y han sido muchas, siempre he encontrado cromógenos, que en debidas condiciones colorean fuertemente la orina por la acción de oxidantes en mínimas proporciones, he estudiado dichas condiciones para utilizar el hecho en la investigación general de muchos de aquéllos, y teniendo presentes las consideraciones que preceden.

Modo de operar.—Se pone en un tubo desde un granito á un gramo del problema si es sólido, ó de una gota á 1 c. c. si es líquido, según su riqueza en oxidante. Se adiciona 1 c. c. de orina y cuatro veces, próximamente, el volumen resultante de ácido clorhídrico de 1.12: se mezcla y deja. Más ó menos

pronto, según el oxidante y su proporción, aparece una coloración purpúrea, parecida á la de las soluciones diluídas de permanganato, que persiste mucho tiempo.

Si la coloración era tardía y muy débil, podría confundirse con el color que toma siempre la orina simplemente adicionada de ácido clorhídrico en aquella proporción. En caso de duda, poco cuesta hacer el ensayo comparativo, es decir, practicando *simultáneamente* la reaccion en dos tubos; pero poniendo en uno de ellos sólo orina y ácido clorhídrico en las mismas proporciones que en el que además tiene el supuesto oxidante. Así no cabe duda alguna, pues por pequeñísima que sea la proporción de oxidante, aparecerá la coloración purpúrea mucho antes y más intensa que en el ensayo en blanco, en el que suele ser, además, amarillenta-parda y sólo mucho más tarde empieza á ser algo purpúrea.

Es innegable que la orina sola, mezclada con ácido clorhídrico, adquiere, muy á la larga, análogo color que mucho más pronto si tiene pequeñísima proporción de oxidante. He estudiado la coloración final en ambos casos y presenta sensiblemente los mismos caracteres con los disolventes y con los reactivos. Esto parece confirmar la opinión de los autores que creen que el color que las orinas clorhídricas adquieren con el tiempo se debe al oxígeno disuelto. Sin negar esta posibilidad, opino también que probablemente influye el cloro ó el cloruro férrico, que, sobre todo este último, contiene casi siempre el ácido clorhídrico, así sea en mínima proporción, pero ya suficiente para que la orina le revele como oxidante. El hecho es que la coloración es mucho más rápida é intensa empleando el ácido clorhídrico de 1.19, que igual volumen del de 1.12 obtenido diluyendo aquél, en consonancia con la mayor proporción de cloro ó de cloruro férrico que entonces contiene.

Si al practicar la reacción con el supuesto oxidante no aparece la coloración purpúrea, puede ser debido á la ausencia de oxidante ó á abundar lo suficiente para peroxidar los

cromógenos y dar la coloración amarilla. Repitiendo el ensayo empleando *mucho menos* problema se sale de dudas; pero, además, se aprende muy pronto la distinción. Si hay exceso de oxidante, es muy frecuente que se inicie el color purpúreo, que en lugar de aumentar palidece de nuevo, desaparece y queda el líquido francamente amarillo persistente, y más transparente que la misma orina ensayada en blanco que con el tiempo va coloreándose. Así, pues, la aparición del color amarillo claro, *limpio* y *persistente*, revela desde luego que hay oxidantes, y en proporción algo grande, así como la coloración purpúrea progresiva indica que no abundan.

Se puede también combinar la acción de la orina clorhídrica con el reactivo que he propuesto para muchos oxidantes en un trabajo anterior (*). La solución clorhídrica de clorhidrato de anilina acusa los oxidantes aunque abunden; la orina clorhídrica les descubre, con frecuencia, en proporciones tan mínimas que aquella disolución no revela. Se puede, pues, operar así: se pone en un tubo el problema y la orina como en la reacción anterior, y se adiciona luego cuatro volúmenes de la solución clorhídrica de clorhidrato de anilina. Si la proporción de oxidante es escasa, aparecerá la coloración purpúrea persistente debida á la oxidación de los cromógenos de la orina, sin intervenir la anilina en la reacción. Si sobra oxidante, después del color púrpura, que es siempre el primero en aparecer, reaccionará con la anilina y cambiará el púrpura en violado y tal vez en azul, y al fin verde, debido este último color, si aparece, á la presencia simultánea del colorante azul, debido á la anilina, y de los

---

(*) Acido clorhídrico de 1.12 ó de 1.145 = 1.000 c. c. Clorhidrato de anilina = 50 gr. Los detalles de su aplicación y caso en que conviene que el ácido sea de 1.12 ó de 1.145, puede verse en esta Revista, pág. 100, t. VII, *Investigación analítica de los cloratos...*

amarillos resultantes de la peroxidación de los cromógenos. En todo caso, una coloración púrpura, violada, azul ó verde, ó la sucesión de estos colores, acusa la existencia de oxidantes. No son, sin embargo, los mismos los oxidantes que descubren uno y otro reactivo, ni los cuerpos que estorban la reacción en cada caso. La orina clorhídrica es de aplicación más general, y son, en cambio, menos los cuerpos que impiden la coloración que origina.

Cuerpos que dan la reacción: Cloro, *bromo*, hipocloritos, hipobromitos, cloratos, bromatos, yodatos, peróxidos, *nitritos*, *ácido nítrico libre* y *nitratos*, que en las condiciones de la operación dejan ácido nítrico en libertad (el nitrato potásico no la da); *cloruro férrico*, cromatos y dicromatos, manganatos y permanganatos, vanadatos, *molibdatos* (lentamente), ferricianuros, persales. Es decir, los mismos cuerpos que dan la reacción con la solución de clorhidrato de anilina, y además los subrayados que no actúan con ésta.

Como el bromo da la reacción, los *bromuros*, que estorban siempre el empleo de la solución de anilina, no estorban el de la orina. Los *yoduros* estorban en ambos casos. Muchas sustancias orgánicas fuertemente reductoras ó clorables, que impiden la reacción de la anilina, no dificultan la de la orina. Esto me ha permitido descubrir mínimas cantidades de cloratos en mezclas complejas en las que no los revelaba ningún otro reactivo.

Sensibilidad.—Varía con el oxidante, pero es siempre grande. Reconoce cómodamente 0,000003 gr. de clorato potásico, y poco menos peróxido de hidrógeno. Aunque no es específico, como la mezcla de éter y ácido crómico, por ser más sensible, seguro y sencillo que ésta, presta muy buenos servicios la orina para investigar el agua oxigenada en muchos casos, reconociendo que no tiene la sensibilidad de otros reactivos de ella que es excepcionalmente grande. No resuelve este reactivo para el agua oxigenada problemas que, en cuanto á precisión y sensibilidad, no estén ya re-

sueltos, pero tiene en cambio la ventaja de la sencillez y de tenerle siempre preparado, lo que no siempre ocurre con los otros reactivos.

Es cómodamente aplicable á la investigación del agua oxigenada en la leche. Basta adicionar á 1 c. c. de leche, 1 c. c. de orina y 8 c. c. de ácido clorhídrico. La coloración rojo-purpúrea no tardará en aparecer.

En todos los casos se puede sustituir el ácido clorhídrico de 1.12 por el de 1.19. Sus ventajas son: más sensibilidad y más prontitud en la aparición del color; en consecuencia, es más útil con las soluciones diluídas de oxidantes, y con aquéllos de éstos que actúan lentamente (molibdatos). Aunque muy lentamente, el nitrato potásico también da la reacción con el ácido de 1.19. Los inconvenientes del empleo de ácido concentrado son: que la elevación de temperatura que hay al hacer la mezcla facilita la peroxidación de los cromógenos y la decoloración del púrpura á igual proporción de oxidante, y que la orina *sola* adquiere mucho más pronto color más ó menos purpúreo. Por esta segunda razón se impone operar comparativamente si se usa el ácido de 1.19.

XI.—Investigación y determinación cuantitativa del clorato potásico en la orina.

POR JUAN FAGES VIRGILI.

Los procedimientos propuestos hasta ahora para la investigación de los cloratos en la orina son de resultados dudosos cuando la proporción de aquéllos es escasa. La orina contiene siempre substancias reductoras del ácido clórico ó de sus derivados (Cl, ClO_2, etc.); en consecuencia, si se investiga el clorato potásico con la anilina y ácido sulfúrico

(reacción de Böttger y de Vitali), serán dichos reductores los que preferentemente recibirán la acción oxidante, y no alcanzará á la anilina sino con un sobrante de clorato si le hay. Con poco clorato no habrá, pues, coloración.

Lo mismo ocurre si se utiliza el sulfato de indigotina, en solución sulfúrica de la orina, para caracterizar el clorato, por la decoloración del líquido al añadir después, gota á gota, solución de ácido sulfuroso. Antes de la adición de éste, el ácido clórico oxidará á aquellos reductores, y el ácido sulfuroso ya no encontrará nada que reducir, ni habrá decoloración del líquido si había poco clorato.

La proporción de reductores en la orina es variable. Como promedio, equivale á 0,5 gr. de clorato potásico por litro. Es decir, que en una orina que contenga 0,5 gr. ó menos de clorato potásico por litro, los reactivos anteriores no lo descubrirán probablemente. Defecando la orina se quitan algunos reductores, pero la mayoría persisten.

La medición del cloro-ion de la orina, y la siguiente medición del mismo en otro volumen de orina, previa reducción del clorato á cloruro, permite, por la diferencia, deducir si hay ó no clorato y valorarlo al mismo tiempo. Este procedimiento es independiente de la presencia de los reductores, y teóricamente nada tiene que objetar; pero todos sabemos que, en la práctica, las determinaciones por diferencia son poco precisas y tanto menos cuanto menor es ésta.

La orina tiene normalmente unos 10 gr. de cloruro sódico por litro, ó sea próximamente 6 gr. de cloro-ion. Si la orina contiene 0,5 gr. de clorato potásico, por su reducción, dará próximamente 0,29 gr. del mismo ion cloro. Tendremos en total, en la segunda medición, 6,29 gr. de cloro-ion, y la diferencia $6,29 - 6 = 0,29$ no es demasiado pequeña si se refiere á dos soluciones puras de cloruro sódico, pues los procedimientos de medición del cloro-ion son bastante exactos. Pero no es este el caso actual siendo tan compleja la orina, exigiendo operaciones y reactivos la reducción del clorato á

cloruro, que pueden introducir impurezas, y no estando bien definido cuándo la reducción ha terminado. En consecuencia, la investigación y, sobre todo, la medición del clorato en una orina por este procedimiento, está expuesta á graves errores si la proporción de aquella sal es igual ó menor á 0,5 gr. por litro.

De nada sirve concentrar la orina, como algunos proponen, porque se concentra en todos sus componentes. Los reductores seguirán estorbando la aplicación de los primeros procedimientos, y la razón entre los dos cloros, en que se basa el último, no se modifica.

La investigación de cloratos en la orina es, sin embargo, sencillísima, atendiendo lo que he expuesto en dos notas anteriores. Según la primera (*), se reconocen los cloratos y otros oxidantes muy fácilmente con cualquiera de los reactivos siguientes:

A	Ac. clorhídrico 1.12 p. e.....	1.000 c. c.
	Clorhidrato de anilina	50 gr.
B.	Ac. clorhídrico 1.145 p. e.....	1.000 c. c.
	Clorhidrato de anilina.....	50 gr.

Adicionando al clorato ó á su solución (de una gota á 1 c. c.) cuatro veces su volumen del reactivo *A* ó del *B*, aparece en seguida ó pronto una coloración azul. En consecuencia, ensayada una orina de este modo, tomará este color si tiene cloratos en relativa abundancia, pero no si tiene 0,5 gr. ó menos por litro, por la presencia de los reductores que también estorban esta reacción.

Según la segunda nota (**), la mayor parte de los reductores de la orina con los cloratos, en solución fuertemente

---

(*) Esta Revista, pág. 100, tomo VII, *Investigación analítica de los cloratos.*

(**) Esta Revista, pág. 209, tomo VII, *Aplicación cómoda y sencilla de la orina á la investigación general de oxidantes.*

clorhídrica, son cromógenos, pues originan intensas coloraciones, y, por lo tanto, la misma orina lleva el reactivo necesario para reconocer los cloratos. Tales cromógenos sólo sirven para el caso en que el oxidante esté en pequeña proporción, pues un exceso les peroxida, decolorándose el líquido. Pero precisamente con escasa proporción de clorato es cuando falla el reactivo *A* ó el *B*; en consecuencia, combinando la acción de los cromógenos con la de la anilina, se descubren los cloratos fácilmente con aquellos reactivos en todos los casos.

Modo de operar.—Á 1 c. c. de orina se adicionan 4 c. c. del reactivo *A* ó del *B*. Si no hay cloratos, no aparece coloración ninguna ó muy tardía y escasa amarillo-parda. Si hay cloratos en pequeña proporción, aparece pronto un color purpúreo, que persiste y va aumentando en intensidad, debido exclusivamente á la acción del clorato y ácido clorhídrico sobre los cromógenos de la orina, sin que intervenga en la reacción el clorhidrato de anilina. Si los cloratos son más abundantes, aparece primero el color purpúreo debido á los cromógenos, y, ya oxidados, actúa el exceso de clorato con la anilina, produciendo, ó un color azul franco ó intermedio con el púrpura, según abunde más ó menos el oxidante. Á la larga puede ser verde, mezcla del azul citado y del amarillo debido á la peroxidación de los cromógenos. En conclusión, la aparición del color purpúreo, del morado, del azul ó del verde, ó de toda la serie, afirma la presencia de cloratos.

Se deduce de lo anterior que en muchos casos, y con costumbre adquirida, basta el ácido clorhídrico de 1.12, adicionado en cuádruple volumen sobre la orina, para saber si tiene ó no cloratos. Si hay poco, se verá la coloración purpúrea; si abundan, tal vez se verá también, pero acabará por adquirir el líquido un color amarillo claro *persistente*, no confundible con el de una orina sin clorato, que es de otro matiz y obscurece y tiende al rojo con el tiempo. Pero es pre-

ferible suprimir vacilaciones y practicar los dos ensayos, y se tiene además con el primero una medida aproximada de la proporción de clorato. La coloración purpúrea *persistente* supone 0,5 gr. ó menos de clorato potásico por litro; la azul franca, más de un gramo, y las intermedias, proporciones asimismo intermedias. Insisto en que esto es sólo aproximado y que varía con las orinas.

Sensibilidad y cuerpos que estorban. —No apareciendo la coloración azul ó la mixta sino con cantidades relativamente grandes de clorato, la sensibilidad en el caso actual se refiere al empleo exclusivo del ácido clorhídrico. Una orina que contenga 0,005 gr. de clorato potásico por litro, da francamente la coloración purpúrea, aunque algo lenta, cuando se la mezcla con cuatro veces su volumen del ácido clorhídrico de 1.12 p. e. La sensibilidad es todavía mayor, pero resulta el ensayo dudoso, si no se tiene costumbre, porque á la larga toda orina adicionada de aquella proporción de ácido adquiere coloración. En casos dudosos se puede operar por comparación con una orina sin clorato.

Estorban la reacción de la anilina los oxidantes que se conducen de igual modo y que he consignado en la primera nota aludida, pero ninguno de ellos se encuentra normalmente en la orina y aun creo que ni anormalmente. Recordaré que los nitratos y los nitritos no dan la reacción.

La coloración purpúrea de los cromógenos también la dan los nitritos y el cloruro férrico, pero tampoco los he encontrado en las orinas ensayadas.

Impiden ambas coloraciones los yoduros, y sólo la de la anilina, los bromuros; cuerpos que eventualmente pueden tener las orinas, y hay que tenerlo en cuenta.

Determinación cuantitativa. — Los procedimientos propuestos son defectuosos: ya he juzgado los basados en la reducción de los cloratos á cloruros, sea cual fuere el reductor empleado.

El procedimiento yodométrico, que en primer término

consigna el Dr. Schmidt en su excelente libro (*), da forzosamente números cortos porque los reductores de la orina consumen parte del cloro puesto en libertad, ó todo si hay poco, antes de añadir el yoduro. Además, éste y los anteriores procedimientos carecen de la sencillez que se requiere en en esta clase de determinaciones.

Realmente, la abundancia de cloruros y la presencia de reductores, hace muy difícil la determinación *rigurosa* de los cloratos en la orina.

He aplicado la colorimetría basada en el empleo de los reactivos *A* y *B*, que expuse en la primera nota aludida, y he tropezado también con los reductores que, como presumía, originan números menores de los verdaderos. Traté de eliminar, ó de destruir, ó de peroxidar previamente dichos reductores; pero no lo he conseguido: los defecadores usuales no los quitan, y los oxidantes que los destruyen ó peroxidan, destruyen también el clorato ó su exceso es nocivo.

Después de muchos ensayos, me he fijado en una forma de la indicada colorimetría que conduce á resultados tanto ó más aproximados que cualquiera de los métodos usuales; pero de práctica mucho más sencilla. Hay que distinguir dos casos: 1.° El reactivo *A* ó el *B*, en las condiciones de la colorimetría, produce la coloración azul franca, aunque luego pase á verde. 2.° El reactivo da coloración purpúrea ó mixta en iguales condiciones. El primer caso supone generalmente 2 gr. ó más de clorato potásico por litro, y menor proporción el segundo caso. En ambos se necesita, para operar, además de *A* y *B*, una

Solución acuosa de 0,5 gr. justos de ClO_3K por litro. *C.*

(*) *Química Farmacéutica*, edic. española, tomo I, pág. 609. Dice así: «Se mezclan 10 á 20 c. c. (de orina) con una y medio veces su volumen de ácido clorhídrico fumante; se hace pasar por el líquido anhídrido carbónico, durante diez minutos, para expulsar el aire; se añade algo de yoduro potásico *exento de ácido yódico*...», etc.

Primer caso. Conviene saber próximamente la concentración de la orina en clorato: los ensayos cualitativos instruyen pronto en este sentido.

Modo de operar.—En un tubo de colorimetrías se pone 1 c. c. de orina que no contenga más de 0,0025 gr. de clorato (si fuera más concentrada se diluye un volumen conocido en la proporción de agua necesaria y se opera con 1 c. c. de la mezcla), ni menos de 0,002 gr., y se añaden 5 c. c. exactamente medidos de agua. En otros tubos iguales se ponen 5-4,75-4,50-4,25-4 c. c. respectivamente de la solución *C*; 1 c. c. de una orina normal pura (ó la fracción de c. c. igual al volumen efectivo de orina puesta en el primer tubo, si hubo que diluirla) y el agua necesaria para que el volumen final del líquido en todos los tubos sea de 6 c. c. justos. Se adiciona finalmente á cada uno 25 c. c. de *A* ó 20 c. c. de *B*, pero *el mismo* en cada determinación en todos los tubos, exactamente medidos y lo más rápidamente posible, para que la reacción empiece casi al mismo tiempo en todos los tubos. Se mezcla, y pasados veinticinco minutos, si *A*, ó 10-15 si *B*, se verá bien la escala de intensidades que ya no se modifica, y si acaso lentamente y por igual. Se hace la comparación en la forma usual y se determina el clorato de la porción de orina ensayada.

$$x = ClO_3K \text{ por litro} = \frac{1.000\,P}{V}$$

$P = ClO_3K$ del volumen $= V$ de orina ensayada.

Resultados.—Si la orina ensayada se ha preparado con la misma que ha servido para hacer la escala, se obtienen muy buenos números; ejemplos: 2,10; 2,12; 2,09 en lugar de 2,10; 2,28 en lugar de 2,30. Pero este no es el caso de la práctica, en que la orina tiene otro origen. Con orinas diferentes, los resultados dependen de la diferencia en la proporción de reductores que una y otra tengan. En general, esta diferen-

cia es pequeña y se obtienen números muy aceptables, pero también ocurre alguna vez que orinas anómalas tengan más reductores ó menos de lo ordinario, y entonces los números no son tan buenos. Aun así, para este caso, que supone orinas ricas en clorato, se pueden aceptar los números obtenidos mucho mejor que los que dan otros procedimientos. Ejemplos:

ClO_3K por litro.		ClO_3K por litro.	
Puesto.	Encontrado.	Puesto.	Encontrado.
2,14 gr.	2,12 gr.	2,18 gr.	1,94 gr.
2,14 »	2,11 »	2,49 »	2,45 »
2,40 »	2,37 »	2,29 »	2,04 »
2,40 »	2,40 »	2,29 »	2,02 »
2,36 »	2,40 »	2,57 »	2,15 »
2,36 »	2,42 »	2,05 »	1,99 »
2,36 »	2,45 »	2,20 »	2,38 »

Los números más inexactos corresponden á orinas anormales, y, en general, con exceso de reductores con relación á la que sirvió para hacer los tipos que fué siempre del mismo origen. Por esto los errores son en ellos casi siempre por defecto.

Segundo caso. También en éste conviene saber aproximadamente la proporción de clorato por litro, que acusa el examen cualitativo más fácilmente todavía que en el caso anterior. La colorimetría directa es ahora imposible; los colores no son comparables. Para conseguir números aceptables, lo que me ha dado mejor resultado ha sido: añadir á la orina cantidad conocida y suficiente de clorato y deducir por diferencia la existente, determinando la total como en el caso anterior. El camino más práctico para ello es el siguiente:

Modo de operar.—Se adicionan á 10 c. c. de la orina, V c. c. de la solución C; siendo $V = 40$ si la orina tiene 0,5 gr. ó menos de clorato potásico por litro, y $V < 40$, si la proporción de clorato es mayor y en razón inversa de

ella. Se añade después agua para que el volumen final de la mezcla sea de 50 c. c. justos. La concentración en clorato de este líquido debe estar entre 0,5 y 0,4 gr. por litro. Hecha homogénea la mezcla, se ponen 5 c. c. de ella (equivalentes á 1 c. c. de orina primitiva) en el tubo colorimétrico, y 1 c. c. de agua. En los tubos de la escala se ponen los mismos volúmenes de la solución *C* que en el caso primero, 1 c. c. de orina normal pura y agua hasta completar los 6 c. c. justos. Se continúa luego como en el caso anterior. La fórmula para el cálculo es ahora:

$$ClO_3K \text{ por litro} = x = 1.000P - 0{,}05\,V$$

siendo $P = ClO_3K$ hallado en el ensayo, y V los c. c. de solución *C* añadidos á los 10 c. c. de orina primitiva.

Resultados.—Los números así deducidos se resienten de los errores de todos los procedimientos por diferencia, que se acumulan á ellas y son tanto mayores cuanto menor es. En consecuencia, es la inexactitud mayor en las orinas más pobres en clorato. Además, también ahora influye la diferencia en la proporción de reductores de las dos orinas que figuran en el ensayo, y más que en el caso anterior por ser menor la proporción de clorato. Aun así, se obtienen, en general, números bastante buenos, eventualmente muy buenos; pero también posiblemente muy malos si hay muy poco clorato y es grande la diferencia entre los reductores de las dos orinas.

ClO_3K por litro.		ClO_3K por litro.	
Puesto.	Encontrado.	Puesto.	Encontrado.
0,500 gr.	0,50 gr.	1,94 gr.	1,90 gr.
0,500 »	0,52 »	0,99 »	1,05 »
0,500 »	0,49 »	0,29 »	0,03 »
0,135 »	0,11 »	0,29 »	0,15 »
0,135 »	0,12 »	0,20 »	0,27 »

Observaciones generales. — Lo expuesto supone que la orina ensayada no ha sido defecada. En general es innecesario defecarla, pues la mayor parte de reductores normales de la orina persisten en ella después de la defecación. En el caso de orinas muy anormales es preferible defecarlas; pero *defecando también la orina con que se preparan los tipos.* Las fórmulas anteriores darán el clorato por litro de la orina *defecada* y habrá que calcular luego el de la orina primitiva.

El reactivo *B*, á igualdad de condiciones, produce coloraciones finales, que son las comparables, mucho menos intensas que el reactivo *A*. Con el *B*, tratándose de orinas, no pueden compararse, colorimétricamente y en la forma dicha, cantidades de clorato menores de 0,002 gr., pues aun con ella apenas se percibe la coloraclón azul ó verde. En cambio, el reactivo *A* origina con 0,0025 gr. de clorato, intensidades finales tal vez excesivas. En consecuencia, se operará con aquel de estos reactivos que resulte más cómodo para el caso concreto. Como es la concentración en ácido clorhídrico de la mezcla la causante de la coloración final, está en nuestra mano lograr la intensidad más conveniente á cada caso, no sólo empleando uno ú otro reactivo, sino el volumen más oportuno; pero atendiendo á estas precisas condiciones: *a*) en calidad y en cantidad debe ser el mismo para todos los tubos el reactivo añadido; *b*) debe añadirse el reactivo *todo* de una vez; *c*) del reactivo *A* no debe añadirse menos de cuatro veces el volumen de la solución que se ensaya, y del *B* tampoco menos de tres veces el dicho volumen.

En lugar de practicar la colorimetría comparando con una escala de tubos tipos, puede usarse el procedimiento de las diluciones sucesivas; pero con estas condiciones: *a*) No empezar las diluciones sino cuando haya transcurrido el tiempo necesario para tener colores estables, que es tanto menor cuanto mayor sea la concentración en *ClH* de la mezcla final: con cuatro volúmenes del reactivo *A* no puede diluirse antes de 25 minutos; con el *B* de 10 minutos; con volúmenes que

supongan concentraciones intermedias, los tiempos serán también intermedios. *b*) La dilución se hará con agua. Como en todas las colorimetrías, el método de la escala es más exacto; el de dilución, más sencillo.

XII. — Una reacción coloreada de las sales de Cinc.

(Nota preliminar.)

POR ÁNGEL DEL CAMPO CERDÁN.

La reacción propuesta por M. Carrobbio (*) para investigar la resorcina, nos ha inducido á pensar si este difenol podría ser utilizado como reactivo de las sales cíncicas, que, como es sabido, son poco ricas en reacciones coloreadas.

Como consecuencia de esta idea, hemos efectuado varios ensayos con diferentes compuestos de cinc, y, como resultado de ellos, puede deducirse lo siguiente:

Si á la disolución acuosa de una sal de cinc se añade amoníaco en cantidad suficiente para redisolver el precipitado de hidrato que al principio se forma, y al líquido transparente que resulta, colocado en un tubo de ensayo, se adiciona próximamente 1 c. c. de una solución etérea de resorcina, se ve aparecer bien pronto, en la superficie de contacto de ambos líquidos, una coloración, al principio amarillenta, después color hoja seca y verdoso sucio y, por fin, como dice Carrobbio, azul de azur intenso; desde este instante la zona coloreada va creciendo á medida que el líquido etéreo

---

(*) *Annales de Chimie Analytique*, 1906, pág. 468, y *Bolletino Chimico-Farmaceutico*, 1906, pág. 365.

situado encima va disminuyendo de volumen por evaporación espontánea; y cuando éste ha desaparecido del todo, el color azul se ha difundido por toda la masa líquida; á veces, si la cantidad de cinc contenida en el ensayo es suficiente, esta coloración es tan intensa que es necesario mover el tubo para poder apreciar el color en los bordes del menisco, pues el resto del líquido más parece negro; acaso el líquido en aquellas condiciones esté enturbiado por un fino precipicado mantenido en suspensión á modo de una falsa-solución; pero basta la adición de agua en cantidad conveniente para que, disolviendo á aquél, se obtenga un líquido claro en el que muy bien puede observarse por transparencia el hermoso color azul propio de esta reacción.

La concentración de la solución de resorcina puede ser muy variable, pero da muy buenos resultados la de 0,5 por 100, que es la que hemos empleado preferentemente.

Si se tiene cuidado de emplear en todos los ensayos la misma cantidad de reactivo, es fácil observar que la aparición del color azul (instante que se percibe muy bien, con buena *luz natural*, colocando el tubo sobre un fondo blanco) se verifica tanto más pronto cuanto mayor es la riqueza en cinc del problema; esta observación, hecha solamente *grosso modo*, hace pensar en algo así como una posible valoración *cronométrica* del cinc, al menos en soluciones muy diluídas; igualmente es fácil observar, si se opera en debidas condiciones, que la intensidad de la coloración final, bien en sí misma ó diluída siempre en un volumen constante de agua, guarda una cierta relación directa con la concentración en cinc del problema; y este hecho hace pensar también en la posibilidad de una valoración *colorimétrica* de este metal por medio de esta reacción: ambas cosas no pueden, sin em-

bargo, afirmarse más que en la categoría de cosas posibles, mientras no las confirmen plenamente experiencias posteriores que habremos de realizar.

Por lo que respecta á la sensibilidad y límite de esta reacción, hemos efectuado dos medidas que se detallan á continuación:

Primera experiencia: tomamos seis tubos de ensayo que contienen cada uno en 1 c. c. de líquido:

1.° = 0,005 g. de *Zn*.	4.° = 0,000005 g. de *Zn*.
2.° = 0,0005 —	5.° = 0,0000001 —
3.° = 0,00005 —	6.° = 0,000000 —

El 6.° tubo actúa como testigo: sólo contiene agua; añadimos á los seis tubos iguales cantidades de amoníaco y reactivo; el resultado al cabo de cinco minutos es el siguiente:

1.° = azul intenso.	4.° = } amarillos.
2.° = — más claro.	5.° = }
3.° = — verdoso.	6.° = nada.

Á los diez minutos:

1.° = } azul intenso.	4.° = azul verdoso.
2.° = }	5.° = amarillo-verdoso.
3.° = — claro.	6.° = amarillento.

(Es de advertir que el reactivo da con el amoníaco que usamos una débil coloración amarillo-parda, que después de algunos días se convierte en roja.)

Después de una hora:

1.° }	4.° = verde azulado.
2.° } = azul intenso.	5.° = verdoso.
3.° }	6.° = amarillento.

Una hora después no han variado sensiblemente las últimas coloraciones.

Resulta de aquí que en los tubos 4.° y 5.° no aparece francamente el color azul, porque la escasa cantidad que de él se ha producido ha reaccionado físicamente (según hemos podido comprobar) con el amarillento que muestra el tubo 6.°, y da por resultado el tono verdoso que en ellos se observa; este tono justifica, pues, la existencia del azul; pero renunciando al tubo 5.° y aceptando el 4.°, donde tal color aún resulta algo patente, vemos que el reactivo empleado ha reconocido 0,000005 g. de *Zn* por 1 c. c., ó sea de 0,005 × 1.000.

Segunda experiencia: en análogas condiciones á los anteriores ponemos en varios tubos:

1.° = 0,009 g. de *Zn*.	4.° = 0,000043 g. de *Zn*.
2.° = 0,0009 —	5.° = 0,000009 —
3.° = 0,00009 —	6.° = 0,0000043 —

y además el tubo testigo; hemos abandonado algunas horas estos tubos, y al volverlos á observar vimos desde luego gran diferencia entre cualquiera de ellos y el tubo testigo, que estaba, como antes, amarillento; los demás eran:

1.°, 2.°, 3.°, 4.° = azul intenso.	5.° = azul claro algo verdoso.
	6.° = verdoso algo azulado.

Aceptado el 6.° tubo por su gran diferencia con el testigo, resulta reconocida en este caso la cantidad de 0,0000043 g. de *Zn* × 1 c. c., ó bien 0,0043 × 1.000, resultado concordante con el de la primera experiencia. Podemos, pues, afirmar, sin pecar de exagerados, á nuestro juicio, que la reacción que nos ocupa permite caracterizar de un modo franco cantidades de *Zn* superiores á 0,01 g. × 1.000; y que

cantidades comprendidas entre 0,01 y 0,005 $\times$ 1.000, y acaso inferiores, se reconocen también cómodamente haciendo simultáneamente una reacción en blanco y comparando los resultados.

Examinando el espectro de absorción de la coloración obtenida en el tubo 4.° de la segunda experiencia, y añadiendo, á cada centímetro cúbico de colorante, 20 c. c. H_2O para poder observar en cuba de 10 mm. de espesor, y aumentando después progresivamente la diluición, se observa en todos los casos un espectro en que sensiblemente no se percibe banda alguna, estrechado por ambos bordes y donde no se perciben el amarillo ni el índigo y violeta; en efecto, los límites de este espectro quedan, por el lado del rojo, en la división que corresponde á una onda de 680 μm, y por el extremo opuesto, en la correspondiente á $\lambda = 447$ μm, se han absorbido, por tanto, todo el violeta, casi todo el índigo y una buena parte del rojo; si examinamos el color sin diluir con un expesor de 3 mm., entonces el espectro, teniendo los mismos extremos anteriores, presenta muy claramente una banda central, cuyos extremos coinciden con las divisiones del micrómetro que corresponden á las longitudes de onda 575 y 640 μm, y los bordes de la parte central de máxima absorción, á las de $\lambda = 602$ y $\lambda = 620$ μm; límites que comprenden precisamente todo el amarillo y una porción del naranjado; con lo dicho queda suficientemente fijada la naturaleza del color analizado.

Siendo de capital interés para el estudio de esta reacción saber cómo otras sales metálicas se comportan con ella ó las variaciones que la presencia de otros cuerpos puede introducir en los resultados expuestos hasta aquí, hemos em-

pezado este estudio del que sólo podemos dar algunas indicaciones preliminares.

El *cadmio* produce, en vez de la coloración azul que el *Zn*, otra verde fácilmente distinguible de la anterior: el caso en que se hallen juntos *Zn* y *Cd* es asunto á estudiar y no podemos dar detalles de él.

Las sales *cúpricas*, además de dar ya una solución amoniacal intensamente azul, como es sabido, producen con este reactivo una materia negra insoluble en el agua; y siendo muy interesante el problema de investigar muy poco *Zn* en presencia de mucho *Cu*, cosa que á veces presenta bastantes dificultades por los procedimientos ordinarios de análisis, hemos intentado utilizar la sensibilidad de esta reacción para conseguirlo, venciendo primero la seria dificultad de buscar un color azul en el seno de un líquido intensamente azul y en presencia de una substancia intensamente negra: propuesto así el problema, hemos conseguido vencer esta primera dificultad por varios caminos que á continuación explicamos, si bien hemos de advertir que la cantidad de *Zn* buscada no ha sido escasa, y que hemos empleado, por lo general, soluciones de SO_4Cu saturadas á la temperatura ordinaria.

Primer método. La solución amoniacal azul se decolora con la cantidad necesaria de *CyK*: se añade un exceso de amoníaco y el reactivo. Si tenemos tres tubos, uno con H_2O, *CyK* y reactivo; otro con solución amoniacal de SO_4Cu, *CyK* y reactivo, y otro que además de esto último tenga *Zn*, veremos al poco tiempo: el primero, amarillo; el segundo, amarillo-pardo; el tercero, *azul*. Si el *Zn* es escaso, en vez de azul resulta *verde*; un exceso de cianuro perjudica.

Segundo método. La coloración azul producida por el *Zn*, se convierte en roja añadiéndole una cantidad suficiente de *ClH*, y esta materia roja, que á la larga se deposita en el fondo del tubo, es, en cambio, muy soluble en alcohol amílico, al que comunica su bello color; separando el extracto alcohólico por embudo de llave ú otro medio análogo, y agi-

tado de nuevo con amoníaco, recobra su primitivo color *azul*. Operando de un modo análogo con el resultante de la acción del reactivo sobre la solución amoniacal de SO_4Cu, resulta un extracto de color *pardo*, y separado del resto, y agitado con $(NH_4)OH$, produce un líquido *incoloro* por transparencia, y una ligera fluorescencia rosada por reflexión. Estando juntos Zu y Cn se comprende cual será el resultado.

Tercer método. En un tubo de ensayo ancho se coloca amoníaco hasta su mitad próximamente, y sobre él una capa de unos dos centímetros de petróleo ó parafina líquida; en un vaso aparte se decolora el SO_4Cu, ligeramente ácido con cloruro estannoso en cantidad extrictamente suficiente; viértese este segundo líquido sobre el primero con todo cuidado: al contacto con el $(NH_4)OH$ se produce un precipitado, blanco en unas porciones y amarillento en otras, de composición fácilmente explicable y que forma á modo de un tapón en el tercio inferior del tubo; sobre este tapón queda un líquido amoniacal que contendrá el Zn; con una pipeta se introduce el reactivo debajo del petróleo ó la parafina, con cuya substancia se mezcla pronto; operando así, el líquido amoniacal que hay bajo el petróleo se colorea muy débilmente de azul por el aire, y si no había Zn no sucede nada más; pero si había Zn, aparecerá en seguida bajo el petróleo el anillo con la consabida coloración azul intensa.

Como, á pesar de las precauciones descritas, el aire acaba por azulear el líquido amoniacal y con más intensidad por la parte superior, aunque esto tarda bastante, podría sospecharse de la coloración anterior, y para evitar esto, hemos modificado el método en la siguiente forma: en vez de agregar el reactivo con una pipeta, se disuelve en su volumen de cloroformo, y aumentada así su densidad, cae hasta colocarse sobre el tapón á que antes nos referimos, y en este caso, si hay Zn, el anillo azul se forma en el borde superior del cloroformo inferior de la columna amoniacal, en tanto que el

resto de ésta permanece incolora ó muy ligeramente teñida de azul pálido.

Demostrada, por de pronto, con estas experiencias la *posibilidad* de reconocer el *Zn* en presencia del *Cu* por medio de esta reacción, nos queda afinar esta labor, para que sean los números quienes digan, en definitiva, si puede ser útil alguno de los métodos descritos para resolver el problema antes aludido, ó si es preferible seguir los caminos que se emplean hasta aquí.

No terminaremos estas notas sin hacer constar las dificultades que á veces se presentan con reacciones tan sensibles, por la relativa impureza de los reactivos, que á veces contienen ya el cuerpo que buscamos en proporciones que caen dentro de los limites de sensibilidad de la reacción, siendo muy conveniente operar siempre con una reacción en blanco que nos sirva de guía; nosotros hemos encontrado el *Zn* en sulfatos de *Cu* tenidos por puros, y sólo operando con uno purísimo de Merck pudimos vencer las dificultades presentadas; también hemos sospechado el *Zn* en algunos cadmios metálicos que el comercio da como puros, y hemos encontrado la diferencia entre el *Cd* y el *Zn* operando con sales de *Cd* de la casa Kahlbaum.

Laboratorio de Análisis Química general
de la Facultad de Ciencias en la Universidad Central.

PUBLICACIONES RECIBIDAS

(Continuación.)

University of New-Mexico.—Bulletin of the...—Whole. núm. 43.—Catalogue series, March, 1907, volume 16 —Catalogue 1906-1907, announcements for 1907-1908.—Albuquerque, New-Mexico.

Haverman (Emil).—Sveriges Offentliga Bibliotek Stockolm, Upsala, Lund, Göteborg. — Accessions, katalog, 20, 1905.—Utgifvet af kungl. Biblioteket, Genom...—Stockholm, 1906-1907.

K. Svenska Vetenskapsakademien i Stockholm. — Arkiv för Botanik Utgifvet af...—Band, 6, Häfte, 3-4.— Upsala & Stockholm-Berlin-London-Paris, 1907.

Field Columbian Museum.—Publication num. 115.—Zoölogical Series, Volume VIII.—A Catalogue of the Collection of Mamsnals in the Field Columbian Museum, By Daniel Giraud Elliot, Sc. D., F. R. S. E., &.—Chicago, U. S. A, 1907.

Field Columbian Museum.—Publication 120.—Geological series, Vol. III, num. 5.—Analyses of Yron Meteorites Compiled and classifield By Oliver Cunmmings Farrington.—Chicago, U. S. A.

Real Academia de Bellas Artes de San Fernando. — Boletín.—Segunda época, núms. 4, 5 y 6.—Madrid, 1907 y 1908.

Real Academia de Bellas Artes de San Fernando. — Memoria acerca de los fines que persigue la..., leída por su Secretario general Ilmo. Sr. D. Enrique Serrano Fatigati, en la sesión pública celebrada el 26 de Abril de 1908.—Discurso inaugural sobre el tema «El Dragón y la Serpiente en el capitel románico», leído en la misma sesión por el Exmo. Sr. D. Ricardo Velázquez Bosco.—Madrid, 1908.

Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona. — Memorias de la...—Volumen VI, núms. 27 á 35.—Idem VII, núms. 1 á 5.—Barcelona, 1907.

Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona.— Boletín de la...—Volumen II, núm. 10.—Barcelona, 1908.

Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona.—Año académico de 1907 á 1908.—Nómina del personal académico.—Barcelona, 1908.

Real Academia de Ciencias Morales y Políticas.—Discursos de recepción y de contestación leídos ante la... (1894-1905), tomo VII.—Madrid, 1908.

Real Academia de Ciencias Morales y Políticas.—Extracto de discusiones habidas en las sesiones ordinarias de dicha Corporación sobre temas de su instituto.—Tomo III, parte 2.ª.—Madrid, 1907.

Real Academia de Ciencias Morales y Políticas.—Concursos pendientes y Catálogo alfabético de sus publicaciones.—Madrid, 1908.

Real Academia Española. – Discursos leídos ante la Real Academia Española en la recepción pública del Ilmo. Sr. D. José Rodríguez Carracido el día 14 de Junio de 1908.—Contestación del Excmo. Sr. D. Alejandro Pidal y Món. – Madrid, 1908.

Real Academia Española —Discurso leído ante Sus Majestades y Altezas Reales por el Excmo. Sr. D. Alejandro Pidal en Junta pública celebrada por la Real..., el día 17 de Mayo de 1908, con motivo del centenario del Dos de Mayo.—Varias poesías patrióticas de autores que vivieron durante la guerra de la Independencia.—Madrid, 1908.

Academia Heráldica. – Revista, tomo III.—Marzo y Abril, 1908.

Real Academia de la Historia.—Cortes de los antiguos reinos de Aragón y de Valencia y Principado de Cataluña, publicadas por...—Tomo XII.—Cortes de Cataluña, XII.—Madrid, 1908.

(Continuará.)

XIII. — Elementos de la teoría de la Elasticidad.

TERCERA PARTE

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia primera.

SEÑORES:

Es éste el cuarto año en que tengo la honra de explicar en la Universidad Central la asignatura de Física matemática.

Desde el primero indiqué el programa y el método, que me proponía seguir, y á ellos he procurado atenerme en los tres años anteriores; pero antes de entrar en materia, en la propia de este curso, expondré algunas ideas generales que no creo haber expuesto hasta aquí.

Al encargarme de la clase de Física matemática, pude escoger dos sistemas distintos.

1.° Comprender en cada curso todas las materias, ó al menos las materias fundamentales de dicha ciencia. Dedicar algunas lecciones, que no podrían ser muchas, á la teoría de *la Elasticidad;* algunas también á la *Acústica;* otro grupo de lecciones á la *Teoría matemática de la luz;* á continuación hubiera procurado condensar, todo lo posible, la *Electricidad estática* y la *Electricidad dinámica;* continuando en esta tarea, y en el mismo afán de compendiar y reducir, habría consagrado algún tiempo del curso á la *Termodinámica* y á sus *aplicaciones;* otro período de tiempo á la *Teoría analítica del calor,* como movimiento de un flúido en un medio conductor; concluyendo mi tarea con la *teoría de la Capilaridad* y con alguna otra complementaria de las anteriores. De este modo resultaría un curso, que hubiera podido titular de *Física matemática,* y que hubiera podido dar á la im-

prenta y publicar en uno ó dos tomos, los cuales sirvieran de texto á mis alumnos, y en que estuviera condensada toda la Física matemática, por lo menos la Física matemática clásica del pasado siglo.

Esto me sería sumamente fácil, porque en cada rama de las señaladas, por el escaso número de lecciones, que á ella hubiera podido consagrar, no habría pasado seguramente de los primeros elementos.

Muy fácil para mí, repito, y de gran comodidad; pues en todos los años habría repetido las mismas explicaciones, con arreglo al mismo texto impreso y publicado, de una vez para todas, y repetido periódicamente en uno y otro año con escasa variación.

Pero siguiendo este sistema no creería cumplir los deberes á que me obliga el puesto que ocupo, y la enseñanza resultaría tan elemental, que ni el nombre de *Nociones de Física matemática* podría llevar en justicia.

La ciencia á que voy refiriéndome es inmensa; además de las ramas que voy explicando, hay otras muchas, por ejemplo, la teoría de los *torbellinos* y la *aplicación de la Termodinámica á la Química,* sin contar todos aquellos problemas y teorías que la Física moderna ha planteado y que hoy desarrollan sin descanso sabios eminentes.

De suerte que la Física matemática explicada por aquel método y con aquella extensión, mejor dicho, con tan escasísima extensión, hubiera sido, si se me permite el recuerdo, como las célebres monteras de Sancho.

Renuncié, pues, en absoluto á compendiar de tal modo la ciencia; á encerrarla en cuarenta ó sesenta lecciones, en las que de seguro no cabe, y en uno ó dos volúmenes, dedicando en cada volumen cincuenta ó sesenta hojas á cada una de las ciencias parciales que antes he reseñado.

***

El segundo sistema ó programa de enseñanza, que es el que he elegido, después de mucho pensarlo, es enteramente opuesto al anterior.

En este último, todos los cursos serían *iguales;* en el sistema seguido, y que he de seguir, todos los cursos son *distintos:* cada curso es una materia nueva, y así en una serie de años vengo desarrollando y seguiré desarrollando, mientras los míos duren y las fuerzas me alcancen, la Física matemática clásica y la Física matemática moderna, con sus nuevas teorías, con sus grandes atrevimientos, con sus constantes renovaciones.

En vez de publicar un libro de texto en uno ó dos volúmenes, pienso publicar una serie de tomos, mientras pueda, que constituyan, ó que tiendan á constituir, una enciclopedia de Física matemática, con los admirables trabajos de los grandes matemáticos que han creado esta colosal disciplina científica, y que no cesan en su prodigiosa labor.

Empresa ambiciosa es esta que señalo, pero llegaré hasta donde pueda; por el pronto llevo publicados, gracias á la cariñosa protección de la Academia de Ciencias, tres tomos, correspondientes á los tres cursos anteriores, del 1905 al 1906, del 1906 al 1907, del 1907 al 1908, y ésta es la primera conferencia del cuarto tomo, si es que el cuarto tomo se completa.

Tal sistema, por decirlo así, enciclopédico, es trabajoso para mí, porque cada año la materia es nueva; pero tengo el deber de trabajar, y al trabajo jamás le he vuelto la espalda.

No se me oculta que al método y procedimiento de enseñanza que he escogido se le puede hacer una objeción: la de que cada curso no es un curso total de Física matemática, sino de una de sus ramas, y que los alumnos estudiarán Elasticidad, ó Electricidad, ú Óptica, pongo por caso, pero no abarcarán la ciencia en su conjunto.

Dicha objeción, sin embargo, no me parece seria; porque

pretender que un alumno estudie en un curso de sesenta lecciones, sin repetición ni repaso alguno, toda la Física matemática, sería un empeño, no sólo imposible, sino hasta ridículo, según antes indiqué.

Y á lo imposible nadie está obligado; y á lo ridículo nadie se resigna.

Además el enlace entre las diversas ramas de la Física matemática es grande; yo procuro siempre, en mis explicaciones, dar á las teorías gran generalidad; el alumno que estudie uno de mis cursos sólo con él tiene ya cierta idea de los demás; y en fin, y esto es muy importante, cada uno de los cursos que voy explicando, y de los tomos en que publico el extracto de mis lecciones, constituye por sí *una unidad completa,* para cuya comprensión no hace falta haber estudiado los demás años de la asignatura.

Otra aclaración es todavía necesaria.

Al renunciar al primer sistema de enseñanza, de los dos que he indicado, porque como queda dicho, es absolutamente imposible explicar en un solo año la Física matemática clásica, sobre todo con los desarrollos que últimamente ha recibido, y al substituir este sistema por el de una serie de cursos de materias diversas, que darán lugar á una serie de tomos á modo de enciclopedia, no se crea que tengo la pretensión insensata de agotar la ciencia, explicando la totalidad ó al menos lo más importante, que en el estado actual de su desarrollo comprende.

Mis lecciones serán *lecciones elementales* y nada más que *elementales;* pero servirán *como preparación* para el estudio, que ya será fácil, de las obras originales de los grandes maestros.

Es, pues, mi trabajo, un trabajo de propaganda, de preparación, pudiera decir; pero de *preparación* y *vulgarización de la alta ciencia.*

A esto aspiro en la serie de mis conferencias: no aspiro á más. Claro es que á lo largo de esta labor iré sembrando

algunas ideas propias; pero de las que no vale la pena de hablar.

***

Tres cursos llevo explicados en esta asignatura: las lecciones del primero revisten una forma general, y, en rigor, comprenden toda la Física matemática; ó, mejor dicho, á todos los problemas de la Física matemática se aplican las consideraciones que allí expusimos sobre el carácter de esta ciencia.

Decíamos en aquella ocasión, y voy á condensarlo en breves frases, lo siguiente:

La Física experimental parte de los hechos, de la naturaleza, de la realidad misma; ó, si se quiere, de los fenómenos en que la realidad aparece. Los estudia, los clasifica, los ordena. La experiencia le muestra aquellas magnitudes ó parámetros de que depende principalmente cada fenómeno, prescindiendo de influencias secundarias, como en un primer estudio del movimiento de los cuerpos celestes se prescinde de las perturbaciones.

Después, y éste es, por decirlo así, el segundo grado, se buscan experimentalmente las relaciones matemáticas que ligan á estos parámetros.

Y, por último, encontradas estas relaciones, se considera que ellas expresan *leyes empíricas* del fenómeno, y, por lo tanto, *leyes empíricas* de la Naturaleza.

Al fin no queda más que *deducir* de dichas fórmulas consecuencias prácticas y tomarlas como base de estudios posteriores, para ir penetrando cada vez más en el seno de los fenómenos.

Tal es en líneas generales el carácter de la Física experimental en toda su pureza, y prescindiendo de ciertas desviaciones de este método y del empleo de ciertas hipótesis á que la misma Física experimental acude, lo cual constituye cierta invasión de la Física experimental en la Física matemática;

y esta invasión se realiza y desarrolla bajo el amparo de un nombre, el de *teorías de la Física.*

La Física matemática presenta un carácter completamente distinto. Claro es que se propone estudiar fenómenos de la Naturaleza, no fenómenos creados á capricho por la imaginación de un matemático. Claro es que parte de los resultados de la Física experimental, y hasta de sus fórmulas empíricas á veces, y por de contado de sus resultados prácticos, para ver si puede explicar aquéllas y éstos racionalmente.

Y aquí empleamos dos palabras: *explicar* es una de ellas, y el adverbio *racionalmente* es otra, y sobre ambas palabras hemos dicho ya lo suficiente en los años anteriores.

Dijimos, y repetimos de paso, que *para nosotros, explicar un fenómeno* no es penetrar en su esencia íntima, en lo que Kant llamaba el Numena, en lo que otros llaman *la cosa en sí*, conceptos ambos de que abominan, no diré si con razón ó sin ella, ciertas escuelas filosóficas modernas.

Tampoco entendemos *por explicar*, hacer ver cómo *el hecho particular* está comprendido *en la ley;* esto es otra cosa, á mi entender, distinta.

Explicar, para nosotros, insisto sobre ello, era reducir un fenómeno y sus apariencias á otro fenómeno vulgar y conocido, y así sucesivamente. Por ejemplo, en todo el siglo pasado, reducir todos los fenómenos á materia y movimiento. En suma, reducir lo que *no se conoce* á lo que se *conoce algo*, y se *conoce mejor*, aunque no se conoce del todo.

Conseguir esto, y conseguirlo por medio de la aplicación de las Matemáticas, y más principalmente por los principios de la Mecánica, era *explicar racionalmente* todos los fenómenos que comprendía la Física matemática.

Así es que esta ciencia seguía, por regla general, un sistema que difiere esencialmente del de la Física experimental; que en todo caso le sirve de complemento para la constitución de las teorías.

Comienza la Física matemática por *establecer* ciertas *hipó-*

tesis, claro es que inspiradas por los fenómenos mismos, y *por el estudio de la realidad* más ó menos idealizada.

Estas hipótesis, en la Física matemática clásica, en rigor, eran una sola, que podemos llamar la *hipótesis mecánica.*

De este modo, mediante dicha hipótesis, el problema en cuestión se reducía á un problema de Mecánica; es decir, al movimiento de una serie de masas ó de una serie de flúidos sometidos á determinadas fuerzas, fuerzas que constituían, en cierto modo, el complemento de la hipótesis.

Establecidos estos sistemas materiales é hipotéticos, forjados en la mente del matemático, aunque bajo el estímulo de la realidad, como representación real, ó por lo menos simbólica, y ésta es una concesión de última hora, á dichos sistemas se aplicaban las leyes de la Mecánica, escribiendo sus ecuaciones de equilibrio ó de movimiento, que resultaban ser casi siempre ecuaciones diferenciales. Y no faltaba más que integrar estas últimas ecuaciones, para obtener las leyes que se consideraban como leyes racionales del fenómeno.

La experiencia comprobaba ó no comprobaba las fórmulas finales; mas era preciso que dichas fórmulas explicasen todos los accidentes del fenómeno en cuestión, y que, determinando experimentalmente las constantes de las expresadas fórmulas, éstas se aplicasen con suficiente exactitud á todos los casos de la práctica, á todos los accidentes del fenómeno, á la infinita variedad de los hechos, como casi siempre sucedía; y que hasta indicasen hechos nuevos, verdaderas profecías, de las que hay más de un ejemplo, como el de la refracción cónica de Hamilton.

Cuando esto se había conseguido, la Física matemática había realizado la verdadera maravilla, aspiración suprema de la razón humana, triunfo inmenso del hombre moderno: encerrar la *variedad* inacabable de los hechos en la *unidad* ó en la fórmula matemática. Tal es, á su vez, el proceso de la Física matemática clásica en casi todos sus problemas: la

hipótesis, la mecánica, él cálculo, la fórmula final, mejor dicho, la ley racional de cada grupo de fenómenos.

***

Todo lo dicho lo desarrollamos ampliamente en el primer curso, que fué el de 1905 á 1906, y para concretar las ideas hicimos una serie de aplicaciones; ó de otro modo, presentamos una serie de ejemplos, tomados de las diferentes ramas de la Física matemática: ejemplos de Termodinámica, ejemplos de la teoría de la Elasticidad, de la teoría de la Luz, de la Electroestática y de la Electrodinámica; y así puede decirse que pasamos revista á todas estas ramas especiales, marcando el carácter de cada uno de los problemas que estudiábamos. En todos ellos repetíamos el método establecido: una hipótesis al principio, que, en rigor, era la hipótesis mecánica; aplicación de esta ciencia al caso particular que examinábamos; fórmulas que expresaban el equilibrio ó el movimiento; integración de dichas ecuaciones diferenciales. Y hasta hicimos aplicación de los resultados obtenidos para explicar algunos fenómenos vulgares, como, por ejemplo, en Termodinámica, la explicación teórica de la dilatación de los cuerpos por el calor.

***

Dijimos al empezar esta conferencia que era imposible comprender en un curso la basta extensión de la Física matemática, y, sin embargo, en este primer curso toda la recorrimos, ó casi toda, pero como se recorre una comarca extensísima: haciendo pasar un *itinerario único* y aislado por unos cuantos pueblos principales. Cierta idea, es verdad, se adquiere de este modo del conjunto de los diversos distritos en que la comarca se divide, cuando el itinerario se ha escogido de modo que pase en cada distrito por una de sus poblaciones.

Pero de todas maneras, *una línea no agota una superficie;* y esta observación armoniza en cierto modo nuestra afirmación primera y el procedimiento seguido en aquel primer curso de la asignatura.

Pero aún hay más, y esto, á primera vista, exagera la aparente contradicción.

Yo digo, ante todo, que ni en uno ni en muchos cursos se abarca toda la Física matemática; y agrego después, que no ya en un curso, en una conferencia sola, menos aún, en breves momentos ó en breves páginas, puede condensarse la Física matemática clásica.

Fijemos las ideas y expliquemos la contradicción.

La Física matemática del pasado siglo, la de Poisson, Navier, Cauchy, Fresnel, Gauss, Carnot, Briot, Ampère y otros sabios, cuya lista sería interminable, puede explicarse en compendio brevísimamente.

Todos ellos, ó casi todos, y de intento dejaba aparte á Fourier, partían de esta hipótesis, *la hipótesis mecánica,* que comprendía como elementos:

1.° La masa.

2.° Las fuerzas centrales y á distancia, dos á dos iguales y opuestas.

3.° El éter, como flúido material, cuyos caracteres, á decir lo cierto, no siempre se fijaban con claridad y precisión suficientes.

4.° El movimiento y, como caso particular, el equilibrio.

Con estos elementos, repetimos, aplicaban á cada problema la hipótesis mecánica.

Concretemos más; un sistema material cualquiera puede suponerse compuesto de una serie de puntos materiales en número inmenso y á distancia, M, M', M''.....

Cada uno de dichos puntos materiales, M por ejemplo, se suponía formado de un núcleo ponderable m, y de una atmósfera de éter μ.

Entre cada dos puntos, M y M', por ejemplo, se admitían

hipótesis, la mecánica [illegible] stancia, que dependían
dicho, la ley racion[illegible] [illegible]ia ponderable y de las

[illegible] análoga á la atracción New-

Todo [illegible]
curso, [illegible] de un punto y la atmósfera de
hicin[illegible] también central y también á distan-
ta[illegible] los puntos M, M' tendremos otras

[illegible]

$$\frac{[illegible]}{r^n} + B\frac{m'\mu}{r^n} = B\frac{m\mu' + m'\mu}{r^n}:$$

[illegible], como ejemplo, que dicha atracción depende de [illegible] inversa de r^n.

[illegible] último, entre las dos atmósferas, μ, μ', una repul-[illegible] $C\frac{\mu\mu'}{r^p}$ proporcional al producto de las cantidades de éter, é inversa de la potencia r^p de la distancia, que siempre es la misma: r.

Como estas tres fuerzas parciales actúan en la línea MM', se podrán sumar, y tendremos, para la acción que solicita ambos puntos M, M', la expresión:

$$A\frac{mm'}{r^2} + B\frac{m\mu' + m'\mu}{r^n} - C\frac{\mu\mu'}{r^p}$$

en que A, B, C son constantes y dependen, naturalmente, de las unidades que se elijan para la atracción de las masas ponderables, para la atracción entre las masas ponderables y el éter, y para las repulsiones de este último entre sus elementos.

Expresión que abreviadamente y en general puede expresarse de este modo:

$$F(m, m', \mu, \mu', r).$$

Así, en resumen, todo sistema material, en la hipótesis mecánica, podía suponerse compuesto de puntos materiales M, M'....., constituídos como hemos explicado y sujetos cada dos á fuerzas F..... dependientes de las masas, del éter y las distancias.

Si además se conocen las condiciones iniciales del problema, á saber: posiciones geométricas y velocidades, y se conocen las fuerzas exteriores, dado que existan, para cada instante, el problema de Física matemática, y hasta *nos atrevemos* á decir, todos los problemas de Química se reducirán á un problema perfectamente definido de Mecánica racional, que podrá plantearse con facilidad suma.

En efecto; para cada punto M, cuyas coordenadas sean x, y, z, tendremos tres ecuaciones, á saber:

$$(\text{punto } M \text{ de masa } m) \quad \begin{cases} m \dfrac{d^2x}{dt^2} = \Sigma F_x, \\ m \dfrac{d^2y}{dt^2} = \Sigma F_y, \\ m \dfrac{d^2z}{dt^2} = \Sigma F_z. \end{cases}$$

Y como para los demás puntos del sistema puede repetirse lo mismo, obtendremos tantas ecuaciones como incógnitas x, y, z.....: si N es el número de puntos materiales, el número de incógnitas será $3N$, y el número de ecuaciones, $3N$ también.

Claro es que F_x, F_y, F_z representan las componentes según los ejes coordenados de F.

Que las Σ representan ó se refieren á las acciones de los $N - 1$ puntos restantes del sistema sobre el punto M, para el grupo que hemos escrito; sobre M', para el segundo grupo, y así sucesivamente.

Claro es, por lo demás, que como el segundo miembro contiene las F; como éstas contienen

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2};$$

y, por fin, como los cosenos de los ángulos de cada recta $M M'$, son á su vez

$$\frac{x - x'}{r}, \quad \frac{y - y'}{r}, \quad \frac{z - z'}{r},$$

dichos segundos miembros serán funciones de todas las coordenadas de todos los puntos.

Si además existen fuerzas exteriores P, ya en los puntos del interior del cuerpo, ya en la superficie, las ecuaciones generales del problema de Física matemática que estemos considerando, tendrán esta forma general:

$$m \frac{d^2 x}{dtz} = \Sigma F_x (x, y, z, x', y', z' \ldots\ldots) + P_x,$$

$$m \frac{d^2 y}{dtz} = \Sigma F_y (x, y, z, x', y', z' \ldots\ldots) + P_y,$$

$$m \frac{d^2 z}{dtz} = \Sigma F_z (x, y, z, x', y', z' \ldots\ldots) + P_z,$$

. . . . . .

Su número será $3N$.

Y tendremos, por lo tanto, $3N$ ecuaciones *diferenciales simultáneas*, con $3N$ variables x, y, z, x', y', z'....., y t como variable independiente.

El problema de Física matemática, sea el que fuere, trátese de un problema de Elasticidad, ó de Acústica, ó de Optica, y hasta de Equilibrio eléctrico, aunque de este último problema algo diremos más adelante, estará escrito en las ecuaciones anteriores y todo quedará reducido á integrar dicho sistema de ecuaciones, viendo cuál es, en cada caso, la forma del segundo miembro.

De manera que como hemos afirmado hace un momento, casi todos los problemas de la Física matemática, y aun diré más, todos los de la Astronomía, están expresados en las ecuaciones diferenciales que preceden, que son del tipo de las de Cauchy para la elasticidad y la luz.

***

Pero algunas observaciones son todavía necesarias.

1.ª Hemos tomado como variables las coordenadas x, y z..... de cada punto.

Como en la mayor parte de los problemas, las variaciones de estas coordenadas, con relación á sus valores iniciales, se considera que son infinitamente pequeñas, pueden substituirse á dichas variables dependientes, ó funciones, sus incrementos u, v, w...., es decir, á los valores de x, y, z..... en cualquier instante, los valores $x + u$, $y + v$, $z + w$....., y las verdaderas variables que tenemos que determinar en función del tiempo serán u, v, w.....

Esto nos conducirá, como hemos visto en años anteriores, y después de los desarrollos convenientes, á substituir las ecuaciones en diferenciales simultáneas, que son inmensas en número, por tres ecuaciones en diferenciales parciales respecto á las funciones u, v, w y á las variables independientes x, y, z, t: mero artificio analítico.

2.ª Ahora bien; sobre el movimiento ó el equilibrio de cada punto, la experiencia y una hipótesis bastante natu-

ral, en ella fundada, nos da que sólo influyen los puntos inmediatamente próximos, comprendidos en la esfera de actividad molecular; de donde resulta que las fórmulas precedentes pueden simplificarse, desarrollándolas por la serie de Taylor, despreciando potencias superiores de u, v, w, y no extendiendo las Σ más que á pares de moléculas comprendidas en dicha esfera de actividad.

3.ª Estas fórmulas no determinan más que el equilibrio ó el movimiento de los puntos M, como puntos matemáticos; es decir, del centro de las masas m y de las esferas etéreas μ.

El movimiento que puedan tener estas esferas de éter ó de electricidad, ó, por decirlo así, las mareas eléctricas, quedan fuera del método. Cada punto se considera reducido á su centro, según acabamos de suponer.

4.ª Por último: las mismas ecuaciones se aplican cuando los puntos M son *átomos de éter*. Pero esto requiere otras explicaciones.

Por el pronto hemos planteado el problema general de la Física matemática para un gran número de sus ramas: para la teoría de la Elasticidad, para la Acústica, y hemos dicho que para la Optica, aunque con restricciones.

Lo que resta pertenece al orden de las Matemáticas puras, al cálculo, á los métodos de integración, que han dado lugar á trabajos inmensos y á inmensos desarrollos realizados por los primeros matemáticos del siglo anterior.

Y esto explica la aparente contradicción que señalábamos antes, al decir al principio *que no podía explicarse la Física matemática* en un curso, y al explicarla como acabamos de hacer, por lo menos para muchas ramas de esta ciencia, en breves momentos de una sola lección. Prescindiendo por de contado del problema de Matemáticas puras.

***

Mas al tratar de la Optica, cuyas ecuaciones, según el método de Cauchy y de sus discípulos, por ejemplo, monsieur Briot, hicimos algunas salvedades.

Salvedades justificadas y que se enlazan con los problemas más difíciles de la Física moderna.

Porque, en efecto, cuando se trata del movimiento de masas ponderables *m*, el tipo de las ecuaciones que se deducen de los principios de la Mecánica es éste:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X,$$

en que *m* es la masa del punto. Pero si los puntos son átomos de éter, ¿cuál será la ecuación de su movimiento?

¿Es que las masas de éter obedecen á las mismas leyes que las masas ponderables? ¿Es que domina el principio de inercia? ¿Es que consumen cierta cantidad de fuerza para adquirir cierto incremento en la velocidad; de modo que la *cantidad* μ de éter, como si fuera una masa ponderable, aumenta durante el tiempo dt su velocidad en dv, cuando la fuerza es X? ¿Es que puede escribirse

$$\mu\, dv = X dt,$$

y, por lo tanto,

$$\mu d \frac{dx}{dt} = X dt,$$

ó, por fin,

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = X,$$

como si μ fuese una masa ponderable? ¿Es que tal substitución ó generalización puede aceptarse?

Punto muy discutible y que está en contradicción con otras teorías modernas.

Sin embargo, Cauchy, sus discípulos, Briot entre ellos, esto hacen sin escrúpulo, aplicando las mismas ecuaciones de la Mecánica, que sirven para los movimientos de las masas ponderables á las moléculas de éter; suponiéndolas dotadas de inercia y obedeciendo á la fuerza del mismo modo que la materia ordinaria. Lo único que suponen es que la masa eléctrica μ es, como una masa ponderable sumamente pequeña, pero esto es cambiar su esencia.

De aquí resulta, que aplicar las ecuaciones, que antes hemos establecido para el caso en que los puntos son ponderables, al caso en que estos puntos son elementos de éter, como sucede en la teoría de la Luz, es una extensión arbitraria de las ecuaciones generales de la Dinámica. Completamente arbitraria, y formando, en cierto modo, un postulado de la teoría de la Luz. Por eso, sólo por eso, pudiera estar seriamente en peligro, como algunos suponen, tan admirable teoría.

Y, sin embargo, esto hacían todos los físicos de la pasada centuria. Lamé, en su obra de Elasticidad, trata como ejemplo y aplicación de dicha teoría, el de los movimientos elásticos del éter.

Briot hace otro tanto, y, sin embargo, la mayor parte de los autores no hacen notar, ¡silencio extraño!, que es atrevimiento extraordinario esto de tratar los átomos de éter como átomos de materia ponderable.

Mas en fin, admitido tal postulado, es un hecho que las ecuaciones generales, que hemos establecido, comprenden en sí éstas ramas de la Física matemática: la Elasticidad, la Acústica y la Optica.

***

En rigor, reduciendo las ecuaciones del movimiento á ecuaciones de equilibrio, es decir, igualando á cero los primeros miembros, pueden servir los segundos, conveniente-

mente interpretados, para la teoría de la Electricidad estática, por lo cual resulta que las ecuaciones establecidas tienen suma generalidad. Porque además, en rigor, á la misma Termodinámica debían aplicarse, aunque no ha sido éste el camino seguido por los fundadores de esta ciencia.

Así considerada, la Física matemática se reduce á bien poco: una hipótesis, generalmente, la hipótesis mecánica; y la aplicación de las ecuaciones generales del equilibrio y del movimiento á dicho sistema.

Todo lo demás pertenece á las Matemáticas puras, á la integración de las ecuaciones diferenciales: es decir, á un problema inmenso de análisis; pero de análisis, no de Física.

Por eso todos los tratados de Física matemática están materialmente cuajados de fórmulas, que expresan esfuerzos gigantescos para satisfacer á las ecuaciones diferenciales del problema, tanto en el interior del sistema, como en su superficie, si determinadas superficies lo limitan.

Sin embargo, cuando se obtiene este resultado, lo que resta *vuelve á ser del dominio de la Física matemática*, porque es necesario *interpretar* lo que dicen ó pueden decir las fórmulas, para explicar todos los accidentes y circunstancias del fenómeno que se estudia.

Por ejemplo, para no citar más que uno.

Se dice en Física elemental, al explicar el fenómeno de las interferencias, y hablando en términos sintéticos, que *luz agregada á luz, á veces da obscuridad.*

Pues esto lo interpretan las fórmulas del modo más natural. Si dos movimientos vibratorios iguales y contrarios llegan á un punto de éter, claro es que este punto no vibrará; y como la luz resulta, según la hipótesis, de la vibración de dicho flúido, y el punto está inmóvil, tendremos un punto en sombra.

Lo que hemos dicho en este caso pudiéramos repetir para todos los accidentes, circunstancias y modalidades de cada fenómeno de los que estudia la Física matemática: es pre-

ciso que en sus fórmulas estén *escritos* todos los fenómenos de la Naturaleza. No serán, no son dichas fórmulas el fenómeno en sí, pero serán un simbolismo matemático de la infinita variedad de los hechos físicos; una manera de determinar, no sólo el hecho en globo cualitativamente, sino su verdadera medida.

Sobre esto tendremos que insistir más de una vez.

***

En resumen, y completando lo que hemos expuesto otras veces: la Física matemática, claro es que con la Física general se enlaza, que es, en cierto modo, su prolongación y su complemento, que á veces se confunden, y que á veces suelen concurrir, como fuerzas paralelas unas y otras convergentes, al descubrimiento de la verdad, que es su resultante; pero esto no quita, dada la inmensa división del trabajo, propia de la moderna civilización, para que pueda considerarse como una ciencia perfectamente limitada, con sus medios, con sus procedimientos, con sus tendencias y con su carácter propio, que siempre en estas conferencias hemos procurado determinar.

Considerada, pues, como una ciencia en sí, se desarrolla en el siguiente cuadro, que una vez más la sintetiza, siguiendo esta marcha constante.

1.° Una hipótesis; que en el siglo pasado ha sido la hipótesis mecánica, que á veces se completa por otras hipótesis auxiliares.

2.° Aplicación al sistema ya definido de las ecuaciones generales de la Mecánica general; y aquí termina, en rigor, la primera parte de la Física matemática

3.° Integración de las ecuaciones diferenciales obtenidas por el método anterior.

Esta es la parte eminentemente matemática de la ciencia

que consideramos; es en la que han ejercitado su talento y su inventiva los grandes matemáticos del siglo precedente, como Poisson, Cauchy, etc.

4.º Por último, la verdadera Física matemática vuelve á entrar en juego para explicar los fenómenos de la Naturaleza y todos los accidentes de estos fenómenos, en su infinita variedad; y, en efecto, por las propiedades analíticas de las integrales obtenidas, son ó han de ser interpretadas y representadas aquellas modalidades para que la Teoría sea satisfactoria: en suma, ha de resultar una correspondencia exacta y nunca contradictoria entre los hechos y las fórmulas.

La serie de hechos físicos de una clase determinada forman lo que, según el lenguaje moderno, se llama un *conjunto.*

Las propiedades de las ecuaciones obtenidas, ordenadas de cierto modo, forman otro *conjunto.* Y es forzoso que ambos se correspondan, término, á término; que cada hecho tenga su representación analítica; que cada propiedad analítica corresponda á un hecho físico. Las fórmulas son en cierto modo la imagen de la realidad ó, si se quiere, el símbolo: un símbolo especialísimo y fecundo.

Cuando esto se consigue, el fenómeno de la Naturaleza ha caído dentro del cálculo matemático. El cálculo matemático lo explica y además descubre, prevé hechos nuevos que la teoría exige que existan.

En este caso la ciencia ha llegado á su grado supremo: domina el espacio y el tiempo, las masas, las fuezas y los movimientos; y en los signos matemáticos están escritos el pasado, el presente y el porvenir, como quería Laplace.

Al menos éstas eran las aspiraciones de la Ciencia, sus esperanzas, sus legítimas ambiciones: es claro que no las realiza en forma absoluta; pero cada vez las va realizando en mayor y en mejor parte.

Esta primera conferencia es, en cierto modo, un resu-

men muy sintético y muy condensado de los cursos anteriores.

En la conferencia próxima todavía tendremos que insistir en algunas de estas ideas, sobre todo desde el punto de vista crítico, y á ser posible, empezaremos á exponer la teoría de la Elasticidad por el método de Poincaré.

XIV.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia segunda.

SEÑORES:

Decíamos en la conferencia anterior, y es una idea que hemos repetido ya muchas veces, que la hipótesis en que se funda casi toda la Física matemática de la última centuria es *la hipótesis mecánica,* que consiste en crear, para cada fenómeno, ciertos elementos materiales ó flúidos especialísimos; en suponer que están ligados entre sí por fuerzas cuyas condiciones se fijan en la misma hipótesis; en aplicar á este sistema hipotético las leyes de la mecánica, y en deducir de la aplicación de estas leyes *las ecuaciones fundamentales del problema.*

En suma, se pretende explicarlo todo por la materia y el movimiento, y á lo sumo por la creación hipotética de nuevas substancias materiales.

Así la Física matemática se reduce á la Mecánica.

Todos los fenómenos, ó grupo de fenómenos, de la Física natural: la elasticidad, la acústica, la óptica, la capilaridad, la electricidad, el magnetismo y aun una buena parte de la Química—y ¿por qué no toda?, dirán algunos—se su-

pone que son *apariencias diversas de un fenómeno único*, es decir, de un fenómeno de mecánica; fenómenos físicos, repito, que por sus formas especiales, por la naturaleza de su complicación, afectan á nuestros sentidos de distinta manera. Y así, unas veces decimos *que es luz* y otras *sonido*, ya *chispa eléctrica*, ya *corriente eléctrica*, ya *magnetismo*, ya *combinación química;* cuando todo ello en el fondo no es más que la agrupación, la complicación, á veces inmensa, mejor dijéramos siempre infinita, de estos cuatro elementos que ya señalábamos en nuestra última conferencia: *masa, éter, fuerza, movimiento.*

Con estos cuatro elementos aspiraba la Física matemática á explicarlo todo.

Y en rigor, y á pesar de cuanto lo que se dice, á pesar de la hostilidad de la crítica, ó de sus escrúpulos; por más que se busquen combinaciones y se inventen nuevos nombres y se asegure que se ha de renovar la ciencia, lo cierto es que en la Física matemática moderna se agitan también estos cuatro elementos: *masa, éter, fuerza, movimiento.* Cierto es que la forma va cambiando.

Quiero decir, que la Mecánica sigue prevaleciendo: una mecánica ampliada, porque la mecánica primitiva *era la de las masas ponderables,* y ahora es preciso fabricar *la mecánica del éter,* pero sin que desaparezca la primera.

Sobre esto mucho tendremos que explicar en nuestras conferencias.

***

Se sabe que la Física general comprende varios grupos de fenómenos que, á primera vista, ninguna relación tienen unos con otros, y que, en el origen de la ciencia, pudieron creerse distintos é irreducibles.

¿En qué se parecen un rayo de luz y un sonido?

¿En qué la dilatación de un cuerpo por el calor y la oscilación de una aguja imantada?

¿En qué la chispa eléctrica y la acción de la capilaridad?

La Física general, repito, comprende grupos aparentemente diversos de fenómenos.

Su trabajo inmenso, su gloria, consiste en ponerlos en relación, en demostrar que son parte de un todo, en hacer que la experiencia haga resaltar la unidad, ó al menos vaya dibujándola, condensando en menores grupos esta variedad inmensa y al parecer discordante. Como es triunfo de la Física matemática *el pretender* encontrar por sus medios propios esta unidad, aunque no la encuentre del todo, que los esfuerzos nobles son siempre gloriosos.

Precisemos aún más estas ideas, dándoles en cierto modo forma material.

***

Formemos una lista de los principales fenómenos que constituyen la Física, y cuyas apariencias son tan diversas, que dijérase que son irreducibles unos á otros y que dependen de *cualidades diversas:* grupos, por decirlo así, de la Naturaleza, sin ningún factor común; verdaderos cantones físicos, como suponen ciertos defensores modernos de la Energética.

Dicha lista incompleta, pero suficiente para explicar nuestro pensamiento, podría ser ésta:

La Mecánica, es decir, la que comprende el equilibrio, ó el movimiento de las masas ponderables, y el estudio de las fuerzas que entre unas y otras masas actúan. En este grupo están comprendidos naturalmente los gases, los sólidos y los líquidos, que no son más que formas diversas de la materia.

El Calor, como movimiento de un flúido especial á través de los cuerpos conductores.

La Termodinámica, que también estudia los fenómenos caloríficos, pero desde el punto de vista *del trabajo* y de la energía.

La Acústica, estudio de ciertos movimientos vibratorios de los diferentes sistemas materiales.

La Optica, que comprende dos partes: la *Optica física* y la *Optica geométrica*, aunque esta última, como lo indica su nombre, es un estudio especial en que domina casi en absoluto el elemento geométrico.

La Electricidad estática ó equilibrio de la electricidad sobre los cuerpos en general y en los dieléctricos también.

La Electricidad dinámica, que considera todos los movimientos del flúido eléctrico en la superficie de los cuerpos conductores, en el interior de los mismos, en los dieléctricos, y casi nos atreveríamos á decir en el éter.

El Magnetismo, que comprende fenómenos especiales y que se creyó que eran debidos á un flúido también especial ó á dos flúidos de signo contrario.

La Capilaridad, que constituía especiales acciones moleculares.

Y para no hacer interminable la lista, la *Físicoquímica*.

Concretando estas ideas, repitamos la lista anterior, designando cada grupo con *un solo nombre*, y, para simplificar el lenguaje, pongamos un número de orden á cada grupo.

Podremos decir, que la *Física* comprende el estudio de los siguientes fenómenos, que, al parecer, son completamente distintos entre si, al menos la mayor parte de ellos, é irreducibles unos á otros. A saber:

1.° Mecánica.
2.° Calor.
3.° Acústica.
4.° Optica.
5.° Electricidad estática.
6.° Electricidad dinámica.
7.° Magnetismo.

El físico que cultiva la llamada Física experimental, y el que estudia ó crea la Física matemática, ambos tienen un mismo fin: penetrar todo lo posible *en la verdad*, ó bajo otra forma: *llegar á la unidad* de los fenómenos y hacer ver que en esa unidad está la variedad infinita de los hechos, sin que la unidad suprema que los abarca, los aminore ni destruya; pues, al contrario, la unidad los enriquece y afirma, al ponerlos en relación unos con otros, y al iluminarlos, esta unidad superior; mas aun se descubren en los elementos varias propiedades que antes, cuando formaban cantones separados, no se conocían.

¿Serán tales tendencias unitarias restos de la antigua Metafísica?

¿Serán necesidades de toda filosofía, la filosofía científica inclusive?

¿Serán *formas de orden* cómodas para la clasificación de los hechos aislados?

¿Será, por el contrario, tal teoría la expresión más profunda de la realidad?

Será lo que fuere; pero esta necesidad, este anhelo, esta tendencia, existe en la mayor parte de los hombres, y este sí que es un hecho indiscutible.

Así, repito, la tendencia del físico y del matemático es la misma, sobre todo fué la misma en el siglo pasado: reducir aquellos *siete grupos* (decimos siete como pudiéramos decir veinte) antes enumerados, al menor número posible, y si á tanto se llegara, á *uno solo*.

Demostrar que las apariencias son diversas, muy diversas, mundos distintos, como antes indicábamos; pero que el fondo es el mismo. Sólo que el físico, y el matemático completando por otra parte su labor, siguen distinto camino.

El físico, acudiendo á la realidad, trabajando en su laboratorio, poniendo en relación experimental unos fenómenos con otros, el Magnetismo con la Electricidad, el Magnetismo con la Luz, el Calor con la Mecánica, la Óptica con la Acús-

tica, y todos, unos con otros, multiplicando y descubriendo hechos complejos, que pongan en relación aquellos siete cantones, *prueba prácticamente*, de una manera material é indiscutible, las relaciones que entre dichos siete grupos existen, y así se revela la identidad de fondo de todos ellos ó su dependencia de algo más general.

Desarrollar ésto sería hacer la historia de toda la Física experimental. Sin embargo, insistamos algo más en estas ideas.

De este modo, repetimos, por la experiencia, se ponen en relación práctica y evidente la Electricidad estática y la dinámica; la Electrodinámica y el Magnetismo; la Optica y la Electricidad; la Termodinámica y la Mecánica.

Y éstas no son teorías, no son hipótesis, son hechos experimentales.

***

El matemático que cultiva la Física matemática, *procura esto mismo;* pero pretende llegar al fin de una vez, reduciendo los siete grupos á un factor común, no por una serie de experiencias, aunque en ellas se apoya y de ellas se sirve, sino por medio *de hipótesis.*

En el siglo anterior la Física matemática procuró reducir los seis últimos grupos de nuestra lista al primero: *la Mecánica.*

Y la hipótesis era esta: la Mecánica explica toda la Física, es decir, los seis grupos restantes, y aun algunos que hemos suprimido.

Los siete grupos, dada dicha hipótesis, son idénticos en el fondo; repetición del grupo primero, pero en condiciones tales, que las apariencias son diversas; lo cual significa, que afectan de diverso modo á nuestros diferentes sentidos, y por eso nosotros, teniendo conciencia de sensaciones diferentes, les damos nombres distintos también, y decimos;

Calor, Luz, Magnetismo, Elasticidad, Acústica cuando debiéramos decir, *Mecánica*, ó sea masas, fuerzas y movimiento.

La idea es grandiosa, el intento soberano, gigantesco el esfuerzo para llegar á la unidad; pero claro es que la victoria, aunque muy grande, no fué absoluta ni definitiva.

Y aquí se hacen necesarias, aunque de paso, algunas reflexiones que será repetir una parte de lo que dijimos en la conferencia anterior.

***

Pretender explicar los seis últimos grupos por el primero sin ampliar este último, es empresa sobradamente ambiciosa.

Podrá la Mecánica explicar, por ejemplo, la Elasticidad y la Acústica, salvo las críticas que hemos apuntado en ocasión oportuna.

Pero no se olvide que la Mecánica clásica es la de las *masas ponderables*. Que para aplicar la ecuación fundamental

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X$$

del movimiento de un punto de masa m, es preciso que exista *dicha masa*, y que sea una masa ponderable á la cual se aplique *la ley de inercia*.

¿Mas cómo se ha de aplicar á una masa eléctrica, ó etérea, μ, distinta en absoluto por su naturaleza de las masas ponderables, á menos de nuevas hipótesis?

Esto no es legítimo, y, sin embargo, esto se ha hecho con gran atrevimiento, gracias á lo cual se ha creado la Optica mecánica, que es uno de los mayores triunfos de la Física matemática del siglo anterior.

Circunstancia que hace pensar; y cuenta que no es caso único en la Física matemática.

¿Consistirá en que las ecuaciones diferenciales de todos

estos fenómenos son de la misma forma, y por eso todas las hipótesis que conduzcan á esta forma general han de dar resultado satisfactorio, con tal que se determinen las constantes experimentalmente, en cuyo caso la experiencia vendrá á *corregir sin decirlo* el atrevimiento de la teoría?

De todas maneras la mecánica clásica, para aplicarse á toda la Física matemática, *debe duplicarse de un golpe.*

La que hoy se llama Mecánica racional es, como hemos dicho varias veces, la Mecánica de las masas ponderables; y será preciso inventar ó construir *otra mecánica* más para el Eter ó para la Electricidad ó fundir las dos en una mecánica más general. En todo caso la Mecánica clásica subsiste.

Esto es precisamente lo que pretenden realizar todas las teorías de la Física matemática moderna.

Pero ya llegarán á su punto estas teorías. No anticicipemos las ideas.

***

Hemos dicho que en la Física matemática del siglo anterior se procuraba reducir los seis últimos grupos al primero.

Se comprende, en términos abstractos, que hubiera quien pretendiese explicarlos todos por otro término cualquiera de la lista, entre los que se creyeran más á propósito para la gran empresa.

Por ejemplo, podría intentarse la explicación de todos los fenómenos por *la Electricidad,* sustituyendo á *la hipótesis mecánica, la hipótesis eléctrica,* aunque á decir verdad no sé, aun en este caso, cómo podría prescindirse de la Mecánica generalizada en las condidiones que antes indicábamos.

Podría aún intentarse reducir los siete grupos y los restantes á un concepto más general que el de fuerza y masa; por ejemplo, *el de la energía,* y tendríamos *la Energética,*

Esto es precisamente lo que defienden y proponen algunos físicos eminentes. Sin embargo, esta sería una *Energética* distinta de la que cierto modernismo moderno defiende, y que nosotros creemos inaceptable, porque sería un lamentable retroceso á la Física de las cualidades.

Pero de esto ya hablaremos en otra ocasión.

Como se ve por lo dicho, el problema de la Física matemática se ha agrandado enormemente en estos últimos años; pero hoy no podemos entrar de lleno en el estudio de las nuevas teorías que para otros cursos quedan reservadas.

Contentémonos por el momento con estos primeros avances ó con estas ligeras miradas de exploración, ante un horizonte infinito que alrededor de nosotros se dilata.

***

Ocupémonos, por ahora, en seguir discutiendo la hipótesis mecánica como preparación ó introducción al nuevo curso.

Lo hemos dicho: en la Mecánica clásica encontramos estos cuatro conceptos fundamentales: *masa, éter, fuerza, movimiento.*

Y aun en rigor, estos cuatro elementos se reducen á tres: masa, fuerza, movimiento, porque el éter es una adición á los tres elementos anteriores, para poder comprender, en la ciencia fundamental del movimiento, los fenómenos de la Electricidad.

De todas maneras, fijémonos en dichos cuatro conceptos generales.

La crítica moderna los estudia, los analiza, los tritura y hace pesar sobre ellos una triste sombra de excepticismo, ó una gran severidad, análoga á la de la crítica de la razón pura de Kant.

Sin que pretendamos extendernos en una materia, que

sería muy suficiente para todo un curso, en la cual más adelante hemos de insistir todavía, nos limitaremos por el momento á las objecciones más fundamentales que la crítica moderna ha formulado contra estos cuatro conceptos de la Mecánica clásica: la masa, la fuerza, el movimiento y el éter.

1.° *La masa.* No hemos de repetir ni las definiciones ni las explicaciones que de este concepto se dan en la Física general y en la Mecánica. La masa está íntimamente enlazada á la fuerza en la Mecánica clásica, así es que, al tratar de expresar una masa en números, y al tratar de expresar también en números una fuerza, fijando unidades para una y otra magnitud, ó se puede definir la masa por la fuerza, ó se puede definir la fuerza por la masa.

De todas maneras, dígase ó se sobreentienda, la masa representa la cantidad de materia.

Se funda, pues, en lo más vulgar, en lo más familiar para todos, en aquello que, por decirlo de este modo, más se impone á los sentidos: la materia.

Podremos no saber lo que la materia es: nadie ha penetrado en su esencia; pero hasta que la Filosofía y la crítica nos asaltan con sus dudas, para nosotros, *la materia*, es lo más claro que existe en el Universo: los objetos que nos rodean, los materiales que forman los edificios que habitamos, la costra sólida del globo, con sus tierras y sus montañas, el agua del mar, la misma atmósfera, todo esto decimos que es materia, y aun creemos conocerla bien, hasta que nos advierten, como decíamos antes, que no la conocemos ni poco ni mucho; hasta que nos aseguran que es una hipótesis más; hasta que al someterla al análisis, ella, que tan firme es, se nos desvanece como neblina.

Pero realidad ó fantasma, la materia es el objeto fundamental de los que se dedican al estudio del mundo inorgánico: la materia, su variedad, sus relaciones y sus leyes.

Y lo primero que tenemos que hacer para que pueda someterse al cálculo, es medirla, buscar una unidad para toda

clase de materia y reducir á número cualquier porción de ésta: un pedazo de madera, una piedra, un mineral, un volumen de agua, un volumen de aire.

De aquí resulta, por consideraciones que ahora no podemos desarrollar, *la masa* ó vulgarmente, cantidad de materia: la materia queda así expresada por un número.

Y aquí se parte de un postulado atrevidísimo de la Mecánica, á saber: que toda clase de materia, entre las que hemos señalado, y en la inmensa variedad que hemos dejado de enumerar, tienen un factor común, que puede servir de medida á todas ellas; de modo que podrá decirse, que *tanta masa* tendrá una cantidad de aire, como determinada cantidad de agua, como determinada cantidad de hierro ó de plomo: la masa va resultando un coeficiente de la Física.

Y sin que nos demos cuenta de ello acaso, esto supone la unidad de materia, la materia única, aunque se nos presenta bajo múltiples apariencias.

No quiero decir que explícitamente se afirme que es idéntico el fondo de toda clase de materia; pero la verdad es, que en la masa, se las identifica, aún sin pretenderlo.

Por lo menos, se supone que toda clase de materia presenta, respecto al movimiento, un carácter común que puede representarse por números y que se llama masa.

Así es, que si de antemano se definiese la fuerza, se diría: que unidad de masa es aquélla que, reconcentrada en un punto y bajo la acción durante la unidad de tiempo de una fuerza constante en magnitud y dirección é igual á la unidad, adquiere, al fin de este tiempo, la unidad de velocidad.

Y cuando para cada clase de materia de las contenidas en el Universo, se ha hecho esto, resultan *números fijos*, con relaciones fijas también, entre los cuales nunca hay contradicción, y que dan resultados concordantes en toda suma ó resta de materia y en todas las sumas y restas de fuerza.

Desarrollar esto, nos llevaría muy lejos: supongo conocidas estas nociones elementales.

Ello es que, de este modo, introducimos en el mundo inorgánico un gran principio de unidad. Tenemos un pedazo de hierro, y al lado un volumen de agua: parecen cosas completamente distintas; pues si tienen la misma masa, calculada como antes decíamos, y cada una de ambas masas se reconcentran en un punto por el pensamiento, y decimos *en un punto*, para evitar otra clase de complicaciones, ambos elementos materiales representarán el mismo papel, por decirlo de este modo, en el movimiento.

Para la Mecánica serán la misma cosa, si tienen la misma masa M.

Ni la Estática ni la Dinámica preguntarán si una de las materias es agua y la otra hierro, ni si son plomo, ni si son aire, ni si son montón de paja, carga de tierra ó barra de platino.

Son masas iguales, que en igualdad de condiciones, bajo la acción de las mismas fuerzas, en igual tiempo, adquirirán igual velocidad.

Claro es que en el fondo de nuestro pensamiento, ya de una manera vaga, ya de una manera consciente y clara, se agita esta idea que ya indiqué antes y que voy á expresar de nuevo: ya luchando con nuestras dudas, ya venciéndolas ya siguiendo á la crítica, ya oponiéndose á ella, pensamos, que si tienen la misma masa, es porque tienen la misma cantidad de materia, de la materia única.

Pero entiéndase que la Mecánica es superior á esta hipótesis, sin ella puede subsistir: considerando á la masa, según antes indicamos, como un parámetro numérico que influye en el movimiento de los sistemas, mejor dicho, como un *coeficiente numérico*.

***

Siguiendo en este orden de ideas, se ha llegado en la Física, y sobre todo en la Química, á este gran principio, postulado de todas las ciencias inorgánicas, de la Física por de contado, y sobre todo de la Química: á saber, el principio de la constancia de la materia, y, por lo tanto, de las masas, y substituyendo unos números por otros proporcionales, á la constancia de los pesos en cada localidad.

Supongamos que en cualquier reacción se suman los pesos de los elementos, se suman los pesos de los cuerpos resultantes, sin prescindir de ninguno por de contado, sea sólido, líquido ó gaseoso.

Pues ambas sumas deben ser iguales.

Este era el gran principio de la Química.

Y bien, la crítica moderna, y aun eminentes experimentadores, lo ponen en duda.

Algunos lo niegan.

Resultado estupendo, que hubiera hecho sonreir hace algunos años, que hoy casi causa espanto, aunque á mi entender, no hay motivo para tanta alarma, por lo que luego explicaré, y por lo que seguiré explicando en otras conferencias.

Mas por ahora, fijémonos en los hechos y en las doctrinas.

Como estas cuestiones hemos de tratarlas ampliamente en otros cursos, y por hoy sólo queremos dar una idea anticipada de los nuevos puntos de vista de la Física matemática, antes de exponer la teoría de la Elasticidad de Mr. Poincaré, que es el objeto fundamental de este curso, he de valerme de ejemplos elementales, y hasta cierto punto caprichosos, que en otra ocasión se convertirán en teorías serias de unos y otros autores.

Estos ejemplos servirán para fijar mi pensamiento, y que mis oyentes ó lectores, comprendan el sentido de ciertas críticas modernas.

Supongamos que de una substancia cualquiera S se sepa-

ra una cantidad, cuya masa m se desea obtener experimentalmente.

Por las definiciones de la masa y de la fuerza, se tiene la ecuación

$$mv = Ft,$$

la cual significa que cuando una fuerza constante F está actuando durante el tiempo t sobre una masa m, al cabo de este tiempo, le ha comunicado una velocidad v, determinada por la ecuación anterior.

De la cual, ó de esta otra

$$v = \frac{Ft}{m}$$

se deduce que, cuanto la masa es mayor, es más pequeña la velocidad comunicada. Esto trae consigo el principio de inercia.

Una masa, para adquirir cierta velocidad en un tiempo dado, consume fuerza, por decirlo así: absorbe fuerza en cierto modo.

Cuanto mayor es la masa, para obtener la misma velocidad, se consume más fuerza, y si la fuerza es la misma, se obtiene menor velocidad: como se ve en la última ecuación, en que si el denominador m crece, el cociente v disminuye.

La masa es en cierta manera el regulador, el volante de la acción de la fuerza. Si no existiera la ley de inercia, una fuerza muy pequeña comunicaría una velocidad inmensa á cualquier masa, y la materia se dispersaría en el espacio.

Al valor $m = o$, en la ecuación anterior, corresponde $v = \infty$.

Estos puede decirse que son resultados experimentales; quiero decir que la ecuación anterior lo es.

Por eso, por su inercia, si la masa m está inmóvil y no actúa sobre ella ninguna fuerza, inmóvil se queda.

Si camina en línea recta con cierta velocidad, y no actúa ninguna fuerza, con la misma velocidad continúa caminando. Antes, en tiempos metafísicos, se diría que *el principio de la razón suficiente* explica estos efectos.

Todas estas son consecuencias, harto sabidas, del principio ó de la hipótesis de la inercia de la materia. Por lo menos, admitida la ecuación anterior, de ella se desprenden.

De la ecuación $mv = Ft$ se deduce, como es sabido, la general de la Dinámica para el movimiento de un punto sobre una línea recta.

En efecto: suponiendo t y v infinitamente pequeños, y recordando que $v = \frac{dx}{dt}$, siendo x la distancia del punto móvil á un origen cualquiera sobre la recta, tendremoe sucesivamente:

$$mdv = Fdt,$$

$$md\frac{dx}{dt} = Fdt,$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F,$$

que es, como hemos dicho repetidamente, la ecuación fundamental de la Dinámica.

De ella se pasa al movimiento de un punto en el espacio y después al movimiento de un sistema de puntos.

Por ahora, y para nuestro ejemplo, nos basta con la última de las ecuaciones anteriores.

A ésta, multiplicando los dos miembros por dx é integrando para pasar á la ecuación de los trabajos y de las fuerzas vivas, se puede subtituir la siguiente:

$$m\frac{dxd^2x}{dt^2} = Fdx,$$

ó bien

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \int F dx + C$$

y, por fin,

$$\frac{mv^2}{2} = T + C,$$

representando por T el trabajo desarrollado entre los dos puntos extremos al principio y al fin del tiempo t, y por C la constante de la integración.

Si para el instante *cero*, la velocidad es *nula*, la constante también lo será, y llamando V la velocidad final, tendremos, por último,

$$\frac{1}{2} m V^2 = T.$$

Esta ecuación nos podrá servir para determinar la masa desconocida m. Mediremos el trabajo T desarrollado por la fuerza; mediremos la velocidad V adquirida por la masa; ambos serán dos números obtenidos experimentalmente, y de la ecuación deduciremos el valor de la masa

$$m = \frac{2T}{V^2},$$

puesto que son cantidades conocidas las del segundo miembro.

Supongamos que esta experiencia se repite dos, tres, cien veces por diferentes experimentadores, en diferentes condiciones, orientando el movimiento en todos sentidos, y que siempre obtenemos el mismo valor numérico para m, sin más diferencias que las que sean del mismo orden que las de los errores de experimentación.

Pues diremos con toda la seguridad, que puede alcanzarse dentro de la imperfección humana: la porción de substancia *S* que hemos tomado, tiene la misma masa hoy que ayer, en un punto del globo que en otro, y por los siglos de los siglos tendrá la misma masa. Al menos esto se daba á entender en tiempos pasados, y sobre todo en el siglo XIX.

La conclusión no negamos que es atrevida, pero sin estos atrevimientos no existe la ciencia. Si nos equivocamos, en un grado mayor de progreso, la misma ciencia nos corregirá.

Y lo que en el orden experimental es una probabilidad mayor ó menor, en el orden de las hipótesis, y para el mundo ideal que forja el matemático, como símbolo ideal también del mundo físico, la afirmación es absoluta, ó, por lo menos, nos asaltan tentaciones de darla por tal.

Pero he aquí que la ciencia moderna y la crítica moderna ponen límites á este absolutismo.

Para hacer comprender la idea, es para lo que presentamos el ejemplo siguiente:

La figura 1.ª representa el experimento indicado. La

Figura 1.ª

masa *m* ocupa el punto *A*; bajo la acción de la fuerza constante *F* la masa *m*, durante el tiempo *T*, pasa de *A* á *A'*, y al llegar á este último punto tiene la velocidad *V*.

Por eso establecimos la ecuación

$$m = \frac{2\,T}{V^2} \qquad (1)$$

que nos daba el valor de *m*.

Supongamos ahora que se va á repetir la misma experien-

cia (fig. 2.ª), pero en condiciones distintas, que el experimentador ignora.

Admitamos que en la recta Ax existe un sistema *invisible* para el experimentador, y formado del siguiente modo:

Una especie de tubo ideal Br. En la boca del tubo una cantidad de éter μ', unida por un resorte ideal al fondo del tubo.

Y, por último, alrededor de la masa m, que pretendemos determinar, admitamos que existe cierta cantidad de éter, una

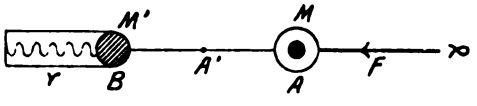


Figura 2.ª

especie de atmósfera μ, circunstancia que también se ignora.

Todo esto es caprichoso, ideal; cuando más, simbólico; pero yo creo que es un símbolo exacto en la cuestión que voy discutiendo.

El experimentador repite su experiencia como siempre, y somete la masa m al mismo trabajo T que antes.

El punto A pasa á otro punto A' al acabar el tiempo t, y el experimentador mide, como siempre, la velocidad de la masa en A'.

¿Obtendrá la misma velocidad de antes?

De ninguna manera; obtendrá una velocidad menor, y esto es evidente.

La ecuación de las fuerzas vivas, en este caso, no es la misma que en el caso precedente, aunque el físico que realiza el experimento lo ignora.

Un matemático invisible, para el que realiza la experiencia, pero que conociese las circunstancias del experimento, tendría en cuenta el trabajo T de la fuerza F; y además observaría que las esferas etéreas ó eléctricas μ y μ' se rechazan; que el resorte r se contrae, almacenando cierto trabajo,

y que, si prescindimos de la acción de la masa m sobre la esfera μ' para simplificar, y representamos por T_e el trabajo resultante de la acción entre μ y μ', la ecuación fundamental deberá ser

$$\frac{1}{2} m v^2 = T - T_e \qquad (2)$$

y no la (1) que emplea en todas sus experiencias el físico.

Esta última ecuación (2) es la que establecería nuestro invisible matemático, y de ella deduciría una velocidad v y un dalor v^2 por esta fórmula:

$$v^2 = 2 \frac{T - T_e}{m}.$$

Dicho valor de v^2 es evidentemente menor que en el primer caso.

Basta, para convencerse de ello, comparar estas dos fórmulas:

$$V^2 = \frac{2T}{m}$$

$$v^2 = 2\left(\frac{T - T_e}{m}\right).$$

Pero la experiencia, sin necesidad de fórmulas, da el verdadero valor para cada caso, de suerte que el físico que está realizando el experimento no obtendría V^2 como en los demás experimentos, sino v^2, y al substituir en la fórmula (1) tendría para determinar la masa

$$M = \frac{2T}{v^2}$$

es decir, una masa M mayor, evidentemente, que m; lo cual,

en la serie de los anteriores experimentos, venía dada por la fórmula

$$m = \frac{2T}{V^2}.$$

En resumen y aun con más claridad: existe un trabajo oculto é invisible, que el físico no sospecha; este trabajo T_e se resta del trabajo efectivo T y disminuye la velocidad, lo

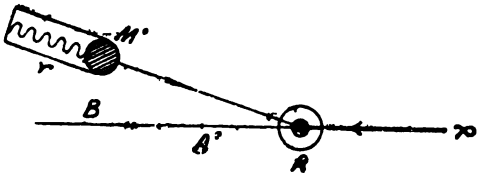


Figura 3.ª

cual hace suponer equivocadamente que la masa es mayor de lo que realmente es.

De suerte que el físico ve con sorpresa que hay experimentos en que la masa disminuye.

Todavía más: si variamos la posición del sistema invisible (fig. 3.ª), todavía existirá un trabajo resistente, pero que paralelamente al eje de las x será distinto del anterior, de manera que en este tercer experimento obtendría un valor para la masa distinto del ordinario y distinto del segundo.

Y podría deducir esta consecuencia: la masa de los cuerpos es variable; tienen un máximum, tiene un mínimum y cambia con la orientación del movimiento.

Consecuencia aparentemente exacta, porque si no existe el sistema invisible á que nos hemos referido, ó si la línea AB es perpendicular al eje de las x, en cuyo caso, el trabajo resistente es nulo, se obtiene para la masa su verdadero valor.

Si la línea AB coincide con el eje de las x, el valor que se obtenga para la masa será un mínimum.

Y entre estas dos posiciones, cambiará el valor aparente de la masa m.

¿Es que la masa ha variado realmente?

¿Es que la que se había creido constante hasta aquí no lo es?

¿El principio de la conservación de la materia, base de toda la Química y aun de todas las ciencias del mundo material, será radicalmente falso como principio absoluto, y sólo podrá aceptarse como principio aproximado?

Con sobrado apresuramiento parece que se van apuntando por la crítica estas consecuencias.

Al menos en nuestro ejemplo, verdad es que sólo se trata de un ejemplo simbólico, las consecuencias á que nos referimos, no sólo son precipitadas, sino que ellas sí que son radicalmente falsas.

La masa m siempre era la misma, y era precisamente la que servía de base al matemático invisible, que hemos imaginado, para sus cálculos.

Lo que hay es, que habían cambiado las condiciones de la experimentación.

Que existían sistemas mecánicos invisibles que alteraban los resultados y que no se tenían en cuenta.

Verdad es, que la habilidad del físico en cuestión no sería grande, cuando no sospechaba la causa de la alteración aparante de la masa.

Pero, es que nuestro ejemplo, como hemos dicho, es puramente imaginario, y sólo nos ha servido para explicar nuestro pensamiento. Ya en otra ocasión lo acomodaremos más á la realidad de los hechos.

Y apresurémonos á consignar que, el árduo problema que venimos discutiendo, no es precisamente el de una perturbadión oculta, por decirlo así, electro-estática.

El problema es de electro-dinámica.

Estas alteraciones de la masa, reales ó aparentes, sólo se han presentado á los experimentadores á que nos referimos, al menos hasta hoy, cuando el movil *m* camina con grandes velocidades, comparables á la velocidad de la luz, por ejemplo, en los rayos catódicos y en las radiaciones β de las sustancias radioactivas.

Tal circunstancia complica más el problema; pero aunque sea en forma muy sucinta, algo diremos en la conferencia inmediata sobre este nuevo aspecto de la cuestión.

XV.—Contribución á la toxicología de los cloratos.

POR JUAN FAGES VIRGILI.

Las investigaciones que he practicado se han dirigido á averiguar: 1.°, si el reactivo que he propuesto en una nota anterior (*) para los cloratos y la colorimetría, basada en dicho reactivo, son aplicables á la toxicología de los cloratos; 2.°, el tiempo que los cloratos persisten sin alteración en una masa en putrefacción progresiva, al menos en proporción suficiente para descubrirlos.

No he estudiado la forma ni la rapidez con que el organismo vivo elimina los cloratos. Acepto en esta parte los re-

---

(*) Esta Revista, pág 100, tomo VII. El reactivo se prepara disolviendo 50 gr. de clorhidrato de anilina en 1.000 c. c. de ácido clohídrico de 1.12 p. e. Adicionando á un volumen de la solución de clorato lo menos cuatro volúmenes de reactivo, aparece color azul. Otros oxidantes se conducen igual; pero los nitratos y los nitritos no, ni estorban, á no ser los últimos muy abundantes. Mezcla de cloruros y nitratos ó nitritos tampoco estorban, á diferencia de lo que ocurre con la tan usada solución de sulfato de anilina en ácido sulfúrico.

sultados obtenidos por otros investigadores, que conducen á dos conclusiones que el toxicólogo no debe olvidar. Es la una, que aquella eliminación empieza pronto y es bastante rápida, especialmente por la orina; por consiguiente, es muy útil al toxicólogo procurarse este líquido. En otra nota reciente (*) he expuesto la investigación y determinación cuantitativa de cloratos en la orina. La otra conclusión es contraria, hasta cierto punto, á la anterior, pues expresa que, un síntoma muy frecuente de la intoxicación grave por los cloratos, es la anuria, que puede ser completa (**), y, por lo tanto, no puede haber la eliminación del clorato antes dicha, ni tiene el toxicólogo el recurso de analizar la orina.

Preparé estas dos mezclas:

A	Carne picada.....	250	gr.
	Agua	500	»
	Clorato potásico.....	0,5	»
B	Carne picada.....	250	gr.
	Agua.....	500	»

Cada mezcla se colocó en un frasco, cuyos dos tercios llenó, cerrado con un corcho atravesado por un tubo dos veces doblado, cuya rama descendente penetraba en el líquido de una copa. Ambos frascos, junto el uno al otro, los coloqué en dicha disposición, al aire libre, el día 11 de Abril de 1908, y así permanecieron todo el tiempo que duró la investigación, con temperaturas muy variables: la mínima, — 1,8° c., la máxima 33,8°, pero predominando las temperaturas medias y las altas.

La mezcla *A* contiene 0,666 gr. de clorato potásico en 1.000 gramos, ó sea 1 por 1.500.

La mezcla *B* me sirvió para ver si, sin cloratos, aparecían

(*) Esta Revista, pág. 214.

(**) *Trait. de Toxicol.*, por Lewin; traduc. francesa de G. Pouchet, pág. 264.

las reacciones de éstos ó alguna otra coloración perturbadora; también, previa adición de clorato á parte de ella en el acto de la investigación, para saber si la disminución ó la no aparición del color azul con el reactivo en la mezcla *A* era debida á disminución ó desaparición del clorato primitivo ó á la presencia de productos de la putrefacción, que, por su acción reductora, impidan ó dificulten las reacciones de aquél. Todavía me sirvió *B*, en la colorimetría, para preparar las soluciones de clorato tipos en las condiciones más análogas posibles á las procedentes de la mezcla *A* que se ensayaban.

Mientras las mezclas *A* y *B* lo han consentido, he aplicado á porciones de ellas *directamente* el reactivo. Cuando la presencia de cuerpos reductores nocivos impidió la coloración, practique las maceraciones, ó digestiones, también diálisis, según los casos, usuales, y después la defecación de los líquidos resultantes, aplicando al fin el reactivo á la solución final, sin ó con previa concentración de la misma. Cuando tampoco así se descubrieron los cloratos, por quedar todavía en el líquido reductores que la defecación no separa, empleé como reactivo de aquéllos la orina fuertemente clorhídrica, en la forma expuesta en otra nota (*).

Esta serie de investigaciones me ha demostrado la inconveniencia de la calefacción, y sobre todo concentración en caliente de las soluciones *ácidas*, aunque sea el ácido acético el causante de la acidez. Los reductores actúan en estas condiciones con el clorato, descomponiéndole en gran parte y aun totalmente. Tal vez las concentraciones en caliente de las soluciones neutras y de las alcalinas, son también nocivas por la misma causa, pero mucho menos; así, cabe practicarlas por la ventaja que por otro lado reportan; pero cuanto menor sea la temperatura á que se opere, más exactos serán los resultados.

(*) Esta Revista, pág. 209.

Los reductores nocivos aumentan probablemente á medida que avanza la putrefacción; pero cuando ya está ésta muy adelantada, no es seguro que sigan aumentando. Sólo puede afirmarse que los hay siempre, desde que empieza la putrefacción, y que parte de ellos no los separa ni la diálisis, ni la maceración, ni la defecación, ni la concentración de la solución: en ésta quedan y estorban siempre. Los reductores de esta índole son, sin embargo, en general, en menor proporción que en la orina, y se distinguen de los de ésta en que no son cromógenos con los oxidantes. Sólo á los sesenta días, y operando en caliente, he obtenido soluciones que, como la orina, bastaba adicionarlas cuatro veces su volumen de ácido clorhídrico de 1.12 p. e., para adquirir intensa coloración si había clorato. El color fué rojo vivo, algo anaranjado; el éter y el cloroformo no extraen el colorante de su solución acuosa ácida, pero sí muy fácilmente el alcohol amílico. El expectro de este colorante rojo, en solución ácida, se parece mucho al de la hematoporfirina en las mismas condiciones. En período también avanzado de la putrefacción, alguno de los cuerpos no eliminables por los procedimientos citados, es más reductor que los cromógenos de la orina, pues la coloración que ésta da con el clorato es menor, á igual proporción, con las soluciones procedentes de la mezcla en putrefacción, que con soluciones puras.

He aquí los resultados referentes á la *investigación cualitativa.*

1.° La mezcla *B*, sin clorato, no ha dado nunca coloraciones perturbadoras con los reactivos usados.

2.° La solución clorhídrica de anilina adicionada *directamente* á la mezcla *A*, ha acusado los cloratos en los veinticuatro primeros días, decreciendo la intensidad de la coloración gradualmente al aumentar el número de días transcurridos.

3.° Ensayada la mezcla *B*, *directamente*, previa adición de clorato potásico en el momento de la investigación, se ha

demostrado que á los diez días se reconocen en ella $\frac{1}{3500}$ de clorato, á los diez y nueve días $\frac{1}{2330}$ y á los veinticuatro días $\frac{1}{1900}$.

4.° Con líquidos procedentes de *A*, debidamente preparados (diálisis, maceración, defecación, etc.), sin concentrar ó concentrando la solución clorhídrica de anilina, he reconocido el clorato hasta el día cincuenta y tres.

5.° Operando de igual modo que en 4.° con la mezcla *B*, previa adición de clorato, se ha demostrado que la solución clorhídrica de anilina reconocía $\frac{1}{15000}$ á los treinta y nueve días, y $\frac{1}{5000}$ á los cincuenta y tres.

6.° Pasado el día cincuenta y tres, la solución de anilina no ha reconocido el clorato en *A*; pero le ha revelado la orina clorhídrica hasta el día sesenta y cinco (1 c. c. solución, 1 c. c. orina y 8 c. c. *ClH* 1.12 p. e.; coloración rojo purpúrea, de aparición lenta si no abunda relativamente el clorato).

7.° Operando de igual modo que en 6.° con la mezcla *B*, previa adición de clorato al empezar la investigación, se ha demostrado que la orina clorhídrica reconoce en aquélla $\frac{1}{50000}$ de clorato á los sesenta y cinco días.

8.° El día sesenta y cinco la mezcla *A* no tiene clorato ó menos de 0,02 gr. por 1.000.

NOTA. Claro es que lo expresado en 8.° no supone que en todos los casos sea posible encontrar clorato antes del día sesenta y cinco é imposible después. La proporción primitiva de aquella sal y la marcha de la putrefacción, sumamente variable, puede modificar dicha fecha. Ni tampoco hay que deducir que, en las circunstancias del caso estudiado, sea

imposible reconocer menos de 0,02 gr. de clorato por 1.000 de mezcla el día sesenta y cinco. La necesidad de hacer muchos ensayos con la misma mezcla primitiva, ha exigido el operar cada vez con porciones algo escasas, 50 gr. cuando más. Muchas veces es posible en la práctica trabajar con cantidades mayores y es probable, por consiguiente, que puedan reconocerse por el mismo procedimiento menores proporciones de clorato de las que yo he encontrado en los dos últimos periodos.

Los resultados referentes á la *determinación cuantitativa* han sido estos:

1.° La proporción de clorato no varía sensiblemente en los diez primeros días.

2.° El día diez y nueve, la cantidad de clorato que el día primero era de 0,5 gr., se había reducido á 0,4329 gr., ó sea 0,866 de lo puesto, ó, finalmente, una concentración de $\frac{1}{1750}$ en lugar de $\frac{1}{1500}$ que fué la inical.

3.° El día treinta y uno el clorato existente equivale para la mezcla primitiva á 0,333 gr., ó sea 0,666 de lo puesto, ó á una concentración de $\frac{1}{2251}$.

4.° Los números correspondientes al día cuarenta y cinco son: 0,150 gr., 0,300 y $\frac{1}{5000}$.

5.° El día cincuenta y tres había seguramente menos clorato que el día cuarenta y cinco; pero ya no pudo medirse.

6.° El día sesenta y cinco ya no había clorato, ó menos de 0,015 gr., ó sea 0,030 de lo primitivo, que supone una concentración igual á $\frac{1}{50000}$.

NOTA. Todas las determinaciones han sido colorimétricas, empleando la solución clorhídrica de anilina, siguiendo las reglas dadas en las notas anteriores citadas, y operando

siempre con los líquidos defecados, y concentrados cuando escaseaba el clorato. Desde el día cincuenta y tres no fué posible la colorimetría, pues el reactivo no daba coloración; pero por comparación con ensayos hechos con la mezcla *B*, adicionada previamente de clorato, puedo hacer las afirmaciones quinta y sexta. Considero los números obtenidos bastante exactos para esta clase de determinaciones, más de lo que podrán serlo en la práctica corriente por el mismo procedimiento. Los líquidos tipos los he preparado adicionándoles un volumen de líquido procedente de *B*, igual al ensayado procedente de *A* y preparado del mismo modo: así los reductores, próximamente en igual proporción en *A* que en *B*, influyen poco ó nada en los resultados. En la práctica usual los tipos no tendrán reductores y los números obtenidos serán forzosamente cortos. Lo mismo que ocurre con las orinas, los resultados serán bastante aceptables si la proporción de clorato es algo grande; pero podrán ser muy erróneos (error absoluto) si aquélla es muy escasa. He aplicado alguna vez el procedimiento por diferencia que propuse para las orinas, y, como era de esperar, también aquí se obtienen resultados muy variables si el clorato escasea. En el mismo ensayo he obtenido una vez 0,150 gr. por 1.000 de mezcla, que era próximamente lo exacto, y otra vez 0,110 gr. El conjunto de operaciones necesarias para la preparación de las disoluciones influye también desfavorablemente, como en todos los demás procedimientos, resultando así números siempre peores que con las orinas, y casi siempre el error es por defecto.

XVI.—El cometa Moreheuse, c. 1908.

POR MIGUEL AGUILAR

La severa rigidez de formas y posiciones relativas de los numerosos astros que pueblan la bóveda estrellada, se ve, de tarde en cuando, alterada por la presencia de cuerpos celestes, que con veloz carrera, prolongadas órbitas y periodicidad, bien definida unas veces y problemática otras, turban, por poco tiempo, la monotonía del cielo estrellado y son objeto de preferente atención de los astrónomos, cuando por su escasa magnitud aparente sólo á ellos les es posible contemplarlos, ó interesan á los aficionados á la ciencia de Urania, si por su tamaño pueden admirarse á simple vista ó con aparatos de escasa potencia.

Es el cometa que motiva esta nota, y que en el presente Otoño cautiva la atención de los astrónomos, el tercero de los catalogados en el presente año y el primero por su importancia. Fué descubierto en Jerkes, importante observatorio de los Estados Unidos de América, por el joven astrónomo que le dá nombre, en 1.° de Septiembre del corriente año, y comunicado su descubrimiento á todos los principales observatorios el día 3 del mismo mes, con las coordenadas provisionales, ascensión recta igual á 5° 0′ y distancia polar 23° 45′, habiendo, por tanto, aparecido en la constelación de Casiopea.

El telegrama del descubrimiento transmitido de Kiel al Observatorio Astronómico de Madrid, no atribuía al nuevo astro magnitud determinada, y aunque otro posterior despacho, fechado en Copenhague, asignaba á su núcleo la novena, las pesquisas realizadas por el que suscribe esta nota y algunos de sus compañeros, en la región del cielo en que

debía encontrarse, en las noches del 3 y el 4 de Septiembre no dieron resultado alguno.

Confiada días después la exploración á la cámara fotográfica, que para tal objeto tiene la ecuatorial de Grubb, y efecto sin duda de la inoportuna presencia de nuestro satélite, que por el enorme velo que produce sobre la placa fotográfica imposibilita las largas exposiciones que para tales exploraciones son precisas, obtuve el mismo negativo resultado.

Calculada más tarde la órbita con los elementos

$$
\begin{aligned}
T &= 1908 \text{ Diciembre } 25{,}8116 \\
\omega &= 171^\circ\ 39'\ 44'',7 \\
\Omega &= 103\ \ 11\ \ 56\ ,7 \quad 1908.0 \\
i &= 140\ \ 11\ \ \ 7\ ,4 \\
\log q &= 9{,}975278
\end{aligned}
$$

deducidos por el profesor Kobold, en virtud de observaciones efectuadas en Roma, Padua y Copenhague, y publicadas sus coordenadas para el lapso de tiempo que media entre 16 de Octubre y 7 de Diciembre, que transcribimos á continuación, dadas á conocer por el profesor M. Ebel en *Astronomische Nachrichten,* núm. 4.275, á las que se añade, como interesante dato, el brillo aparente del cometa, tomando como unidad el que presentaba en la fecha de su descubrimiento, pude con éxito reanudar mis trabajos y obtener todos los días, despejados y sin Luna, dos fotografías, una en cada una de las cámaras de la ecuatorial fotográfica, cuyo detenido exámen haremos al final de esta nota.

Del movimiento aparente del nuevo astro, da clara idea la figura 1.ª, en la que hemos fijado, previa identificación de las estrellas próximas, las coordenadas del cometa en siete fotografías sucesivas, y pone de manifiesto su pequeño movimiento en horario, así como el rapidísimo de que está dotado en declinación, más de grado y medio por día, circuns-

tancia que hacía penosísima la tarea de guiar la cámara fotográfica.

La figura 2.ª representa las posiciones relativas y movi-

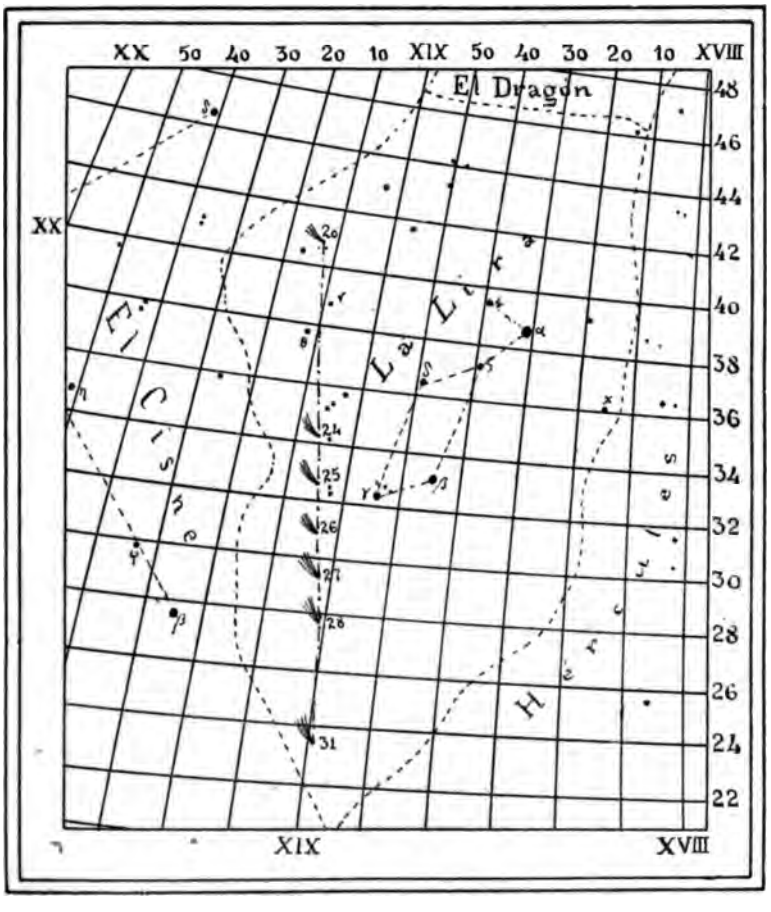


Figura 1.ª

mientos del cometa y de la Tierra. La órbita del cometa está representada en el plano de la figura, y el plano de la órbita de la Tierra está ó debe imaginarse inclinado 40° sobre dicho plano, suponiendo colocada, por ende, la porción pun-

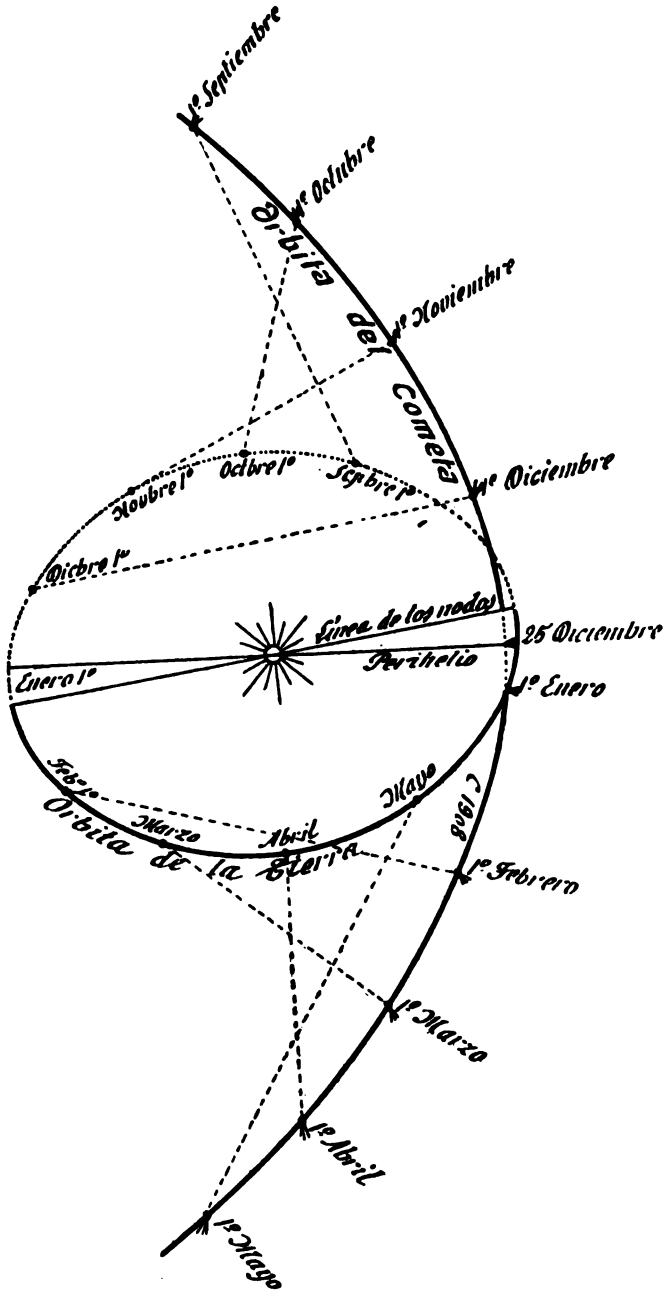

1º Septiembre
1º Octubre
Orbita del Cometa
1º Noviembre
Noubre 1º
Octbre 1º
Sepbre 1º
1º Diciembre
Dicbre 1º
Línea de los nodos
25 Diciembre
Perihelio
Enero 1º
1º Enero
Febre
Marzo
Abril
Mayo
Orbita de la Tierra
1º Febrero
1º Marzo
1º Abril
1º Mayo

Figura 2.ª

teada de la elipse que representa la órbita de la Tierra detrás del plano de la figura y delante la parte representada por línea llena.

Cuando se descubrió, en 1.° de Septiembre, el cometa, estaba muy sobre el plano de la órbita de la Tierra y como á distancia y media de la que nos separa del Sol, pero después se ha ido acercando al centro de nuestro sistema, y así continuará hasta el 25 de Diciembre, que pasará por el perihelio, á corta distancia, dentro de la órbita de la Tierra y debajo de su plano.

Si el paso por el perihelio hubiese ocurrido en Junio, está fuera de duda que su hermosura incomparable hubiese llamado la atención, siendo un objeto celeste de sin igual belleza contemplado á simple vista. La mínima distancia á la Tierra, como se ve en la misma figura, ha sido en Octubre, 180.000.000 de kilómetros, y ahora está ya retrocediendo ó alejándose por el movimiento de nuestro planeta hacia el lado opuesto de su órbita. En el perihelio estará casi opuesto al Sol por detrás, después que se separe del Sol se hará visible para los habitantes del hemisferio austral, y durante los meses de Febrero, Marzo y Abril se hallará tan favorablemente situado para los observadores de aquellas latitudes, como lo ha estado para nosotros en Septiembre, Octubre y Noviembre.

En Septiembre y la primera quincena de Octubre ha sido circumpolar, habiéndose podido tomar numerosas fotografías cuando las nubes y la Luna lo han permitido, y de esperar es que del cotejo de las que se reunan, obtenidas por diferentes observadores en tan dilatado espacio de tiempo, salga algo provechoso y cuente la ciencia con datos suficientes para avanzar algún paso en el conocimiento de la teoría, hoy deficiente, de los cometas.

El astro que nos ocupa, compuesto de núcleo, cabellera y cola, ha experimentado en su movimiento de aproximación al Sol notable crecimiento en su brillo, pasando de la novena

ó décima magnitud que le atribuyeron sus observadores á raíz del descubrimiento, hasta la sexta, que hoy tiene, llegando á ser visible á simple vista, con alguna dificultad y sólo para observadores acostumbrados á mirar al cielo y con noción siquiera aproximada del sitio en que debía encontrarse. Pero por lo que resulta verdaderamente extraordinario es por las profundas modificaciones sufridas en su estructura y en la importancia relativa de los elementos de que consta. Cuando se descubrió, y aun algunos días después, no era más que un núcleo borroso y difuminado, algo más condensado en su centro, provisto de ténue y cortísima cola, á la que M. Bigourdan (*), astrónomo del Observatorio de París, asigna en 26 de Septiembre una longitud de 15′, haciendo constar que del 30 de Septiembre al 3 de Octubre desapareció la cola por completo, quedando reducido á un sutilísimo núcleo de muy dilatada materia y desprovisto de prolongación alguna, es decir, con cabellera perfectamente concéntrica con su punto más brillante; pero M. Van Biesbroeck, que observó el astro en los mismos días desde el Observatorio de Uclé, notó una repentina y notoria disminución en su brillo, aunque ni un solo instante dejó de percibir la cola.

Todos los observadores están conformes en que la estructura de la cola, compleja en extremo, sufre de contínuo profundas transformaciones, poco frecuentes en esta clase de astros, y del cotejo de las numerosas fotografías que he obtenido se desprende la misma incontrastable opinión. También se deduce de la consideración y cotejo de las negativas originales y de la observación directa que he tenido que hacer, durante las muchas horas que he guiado la ecuatorial para obtener las treinta y una fotografías archivadas, que á pesar de los cálculos de M. Ebel sobre el crecimiento del

---

(*) *Comptes Rendues* de 5 Octubre 1908.

brillo del cometa, que damos al principio, por razones de orden cósmico, condensaciones mayores de la materia cometaria ó causas físicas opuestas, al parecer, á las razones de distancia que sirvieron de base á aquéllos números y que se prestan á más ó menos racionales hipótesis, que no he de apuntar siquiera en esta nota, el máximo brillo no ha correspondido, en mi modesta opinión, á la mínima distancia á la Tierra, y calculada ésta para el día 25 de Octubre, correspondió aquél al día 23 de Noviembre.

El aparato empleado, como ya hemos indicado, ha sido la ecuatorial fotográfica de Grubb, adquirida por el Observatorio con motivo del eclipse de Sol de 28 de Mayo de 1900, que además del anteojo guía, que provisto de un ocular de mucho aumento sirve para corregir las muy escasas imperfecciones que en su marcha tiene el aparato de relojería, magistral como todos los que salen de aquéllos afamados talleres, lleva dos cámaras, una principal de 0'20 metros de abertura y 2 metros de distancia focal, que cubre placas de 107 × 82 milímetros, que corresponden á un campo de 2° en ascensión recta y 2° 30′ de declinación, y otra de 0'15 de abertura y 1 metro de distancia focal, mucho más luminosa y de menor amplificación, que es con la que he obtenido las mejores fotografías, por exigir exposiciones mucho más cortas y tener mucho más campo que la principal, aunque menor todavía del que hubiese sido preciso, pues en muchas de las pruebas la cola llega al borde de la placa de 13 × 18, que es la empleada en la citada cámara, que cubre 15° próximamente en ascensión recta y más de 10° en declinación.

Todas las placas han sido reveladas con ácido pirogálico, sulfito de sosa, carbonato de potasa y bromuro de esta misma sal, en cubetas, separadas el álcali y el reductor y guiado el desarrollo lo más igualmente posible.

Las placas numeradas con los impares corresponden á la cámara de foco corto, que, como queda dicho, es la más á propósito para estos trabajos, por su gran luminosidad y amplio

campo, y las pares á la cámara principal del aparato, más propia para determinación de posiciones que para el estudio de astros cuyas exposiciones no pueden prolongarse como el que nos ocupa, y en cuyas negativas, antes de revelar, se impresiona por contacto una cuadrícula que permita y facilite la medida de coordenadas en el aparato llamado macromicrómetro.

Efemérides del cometa c. 1908 (Moreheuse) calculadas por Ebel con los elementos deducidos por Kobold, para las 12h (t. m. de Berlín).

Octubre	16	α =	19h	23m	40s	δ = + 48°	13′.2″	5.28
	18.....	»	18	5.....		44	41 .1	
	20.....	»	13	26.....		41	10 .7	5.52
	22.....	»	9	33.....		37	43 .9	
	24.....	»	6	17.....		34	22 .1	5.63
	26.....	»	3	32.....		31	6 .7	
	28.....	19h	1	14.....		27	58 .6	5.61
	30.....	18h	59	18.....		24	58 .4	
Noviembre	1.....	»	57	41.....		22	6 .5	5.52
	3.....	»	56	19.....		19	23 .0	
	5.....	»	55	10.....		16	47 .7	5.37
	7.....	»	54	13.....		14	20 .6	
	9.....	»	53	25.....		12	1 .3	5.20
	11.....	»	52	46.....		9	49 .5	
	13.....	»	52	13.....		7	44 .8	5.04
	15.....	»	51	46.....		5	46 .7	
	17	»	51	24.....		3	54 .7	4.88
	19.....	»	51	7.....		2	8 .4	
	21.....	»	50	54.....	+	0	27 .4	4.77
	23.....	»	50	43.....	—	1	8 .7	
	25.....	»	50	35.....		2	40 .4	4.62
	27.....	»	50	29.....		4	8 .0	
	29.....	»	50	24.....		5	31 .9	4.52
Diciembre	1.....	»	50	21.....		6	52 .5	
	3.....	»	50	18.....		8	10 .0	4.43
	5.....	»	50	16.....		9	24 .8	
	7.....	»	50	13.....		10	36 .9	4.35

Sucinta reseña de las fotografías del cometa Moreheuse obtenidas en el Observatorio Astronómico de Madrid.

Placa núm. 1.—Cromo-Isolar.—Día 20 de Octubre.—Exposición de 9^h 30^m á 11^h 48^m.

Teniendo el astro movimiento propio muy apreciable, y siendo imposible ver simultáneamente el retículo y el cometa, pues iluminado el primero dejaba de ver el segundo, y éste carecía, por su tenuidad, de la luz precisa para hacer visible la cruz filar, hube de guiar con una estrella, saliendo, por ende, movida la imagen del cometa. Sin embargo, se aprecia la complejidad de su estructura á pesar de la superposición de exposiciones y alcanza la cola una longitud de 2° 30′.

Placa núm. 3. — Cromo-Isolar. — 24 Octubre. — Exposición de 9^h 10^m á 10^h 32^m.

Obviado el inconveniente habido el día anterior, moderando la luz del retículo con capas sucesivas de pintura sobre la lamparita que lo ilumina, pude guiar con el cometa. Adviértese en esta placa muy bien definido el núcleo y tres ráfagas bien distintas en la cola, la central de 4° de longitud y las exteriores algo más cortas y formando un ángulo de 30° próximamente.

Placa núm. 5.—«Imperial».—25 de Octubre.—Exposición de 7^h 0^m á 7^h 19^m.

Reemplazada la placa Cromo-Isolar, empleada los días anteriores, por las inglesas de marca «Imperial», cuya sensibilidad es grandísima, seguro de que la falta de anti-halo, pues sólo le tiene adherido al cristal, dada la poca luminosidad del objeto, no había de perjudicar la prueba, obtuve una placa mediana no más, pues el cielo estaba casi velado, y de los diez y nueve minutos de exposición puede asegurarse que ni durante diez se impresionó la placa, pero, sin embargo, se nota positivo aumento en la longitud de la cola, que llega hasta 5° de longitud.

Placa núm. 7.—26 de Octubre.—Exposición de 7^h 54^m á 8^h 49^m.

Núcleo muy brillante y bien definido, cabellera con diminutos y numerosos penachos, cola extensa, de más de 7° de longitud, con preciosos detalles de estructura. Adviértense bien definidos tres nervios principales, el central poco más prolongado que los otros. El arranque de la cola es excéntrico con relación al núcleo.

LÁMINA I.

1

27 Octubre 1908.
Exposición 7^h 30^m á 8^h 30^m

2

28 Octubre 1908.
Exposición 7^h 45^m á 8^h 35^m

3

13 Noviembre 1908.
Exposición 6^h 14^m á 7^h 37^m

4

19 Noviembre 1908.
Exposición 6^h 10^m á 7^h 15^m

LÁMINA II.

5

Ampliación de la fot. 4, lámina I. 17 Noviembre 1908.

6

12 Noviembre 1908.
Exposición 6^h 15^m a 7^h 55^m

7

19 Noviembre 1908.
Exposición 6^h 10^m a 7^h 16^m

Fototipia de Hauser y Menet.—Madrid

Placa núm. 9.—(1 Lám. I.) — 27 Octubre.— Exposición de 7^h 30^m á 8^h 30^m.

Como la anterior en belleza y estructura general; pero acusa, además, la presencia de un penacho corto y muy brillante que, partiendo del núcleo, forma ángulo bastante abierto con los otros tres. Extensión de la cola, 7°: las tres ráfagas principales algo más divergentes.

Placa núm. 11.—(2 Lám II.)—28 Octubre.—Exposición de 7^h 35^m á 8^h 35^m.

Más acentuado el penacho corto. Parten, además del núcleo, dos colas principales: una extensa, ancha y difuminada; otra delgada y brillante, que forma con la principal ángulo bastante abierto. La primera se divide, después del arranque, en dos principales, que se confunden nuevamente luego, dejando entre ellas un espacio obscuro en forma de rombo prolongado. La extensión de la cola, mayor que en las anteriores, pasa de 9°.

Placa núm. 13.—31 Octubre. - Exposición de 9^h 6^m á 9^h 35^m.

Muy mala noche de observación, por las muchas y densas nubes que empañan el cielo; obtenida la fotografía en una clara relativa y con poca exposición, carece de menudos detalles y la cola no alcanza más extensión que 5°. Obsérvase en esta placa una violenta estrangulación como á grado y medio del núcleo, á partir de la cual, hay un cambio bastante brusco en la dirección de la cola que aparece en su terminación, sensiblemente más ancha que en las fotografías obtenidas en días anteriores y posteriores.

Placa núm. 15. — 10 Noviembre 1908. — Exposición de 6^h 48^m á 7^h 19^m.

Cielo velado por nubes ténues, se obtiene el núcleo y muy poco más, pero todo difuminado y menos que mediano.

Placa núm. 17.—11 Noviembre.—Exposición de 7^h 54^m á 8^h 20^m.

Placa núm. 19.—12 Noviembre.—Exposición de 6^h 15^m á 7^h 45^m.

Hermosa en detalles, se advierte que el núcleo ha crecido en brillo desde el 28 de Octubre, fecha de la última fotografía buena; parten del núcleo numerosas ráfagas finas y bien definidas y la cola, en la que se cuentan cinco penachos principales, tiene una extensión

superior á 9°. Obsérvase en la cola una estrangulación ó quebradura á unos 3° grados del núcleo y otra más distante, en sentido inverso, que produce en su eje una ligera doble curvatura.

Placa núm. 21.—(3 Ldm. I.)—13 Noviembre.—Exposición de 6^h 14^m á 7^h 37^m.

Más hermosa que la anterior; de las ráfagas principales, que son más de seis bien distintas, parten en toda su extensión, y sobre todo en el primer tercio, sin número de filamentos que, como barbas de una pluma, dan á la negativa novedad incuestionable y confirman lo anteriormente sentado respecto á los profundos cambios observados en la estructura de la cola. También queda fuera de duda que el brillo aumenta considerablemente, pues pude prescindir de la iluminación del retículo, y la luz emitida por la imágen del núcleo me iluminó perfectamente la cruz filar.

Placa núm. 23.—18 Noviembre. — Exposiciones varias y cortas todas.

El constante velo de ténues nubes, y la frecuencia con que el velo se refuerza con nubes espesas, hace que la fotografía no valga nada, ó muy poco al menos.

Placa núm. 25.—(4 Ldm. I y 1 Ldm. II.)—19 Noviembre.—Exposición de 6^h 10^m á 7^h 15^m.

La mejor, sin duda, de las obtenidas hasta la fecha, por la intensidad del núcleo y detalles finísimos de la cabellera y cola, en la que, bien distintas, se advierten hasta siete ráfagas ó estelas, separadas al principio y entrecruzadas luego, con multitud de brillantes derivaciones. La cola sale intensa hasta el límite de la placa, y puede, por tanto, asegurarse que su extensión pasa de 12°. Muy brillante y bien definido en el anteojo guía.

Placa núm. 27.—20 Noviembre.—Exposición de 6^h 6^m á 7^h 5^m.

Inferior en finura á la anterior por la escasa limpieza del cielo, pero acusa, como ella, gran brillo en el núcleo y extensa longitud en la cola. También se sale de la placa.

Placa núm. 29.—21 Noviembre.—Exposición de 6^h 5^h á 6^m 33^m.

Interrumpida la exposición por inoportuno nublado, tiene, sin embargo, interesantes detalles distintos de los días anteriores, pues pa-

rece que los nervios ó ejes de las ráfagas son más divergentes. Apesar de lo corto de la exposición, la cola tiene una extensión de 6°.

Placa núm. 31.-23 Noviembre 1908.—Exposición de 6^h 13^m á 7^h 3^m.

Adviértese en esta noche, sea por la limpieza de la atmósfera ó por positiva concentración de la materia cometaria, un gran aumento en el brillo del cometa, y con el anteojo guía se perciben detalles en la estructura de la cola que no se vieron en días anteriores. La placa fotográfica, á pesar de haber estado expuesta cincuenta minutos solamente, acusa el crecimiento que la observación directa suponía, y la fotografía, que no publicamos por estar ya tirándose las láminas, si no más rica en detalles que las de los días 28 de Octubre y 13 y 19 de Noviembre, tiene un vigor y una brillantez que le hace superior á todas sus compañeras.

Las placas numeradas con los *pares* y correspondientes á la cámara de mayor distancia focal, de importancia para la determinación de posiciones, no tienen detalles, en general, que merezcan citarse, á excepción de las dos publicadas, pertenecientes á los días 12 y 19 de Noviembre y con exposiciones iguales á las de sus compañeras, que ponen de manifiesto, en mayor escala, curiosos detalles del arranque de la cola y sus numerosas bifurcaciones, ya que no sea posible en esta cámara obtener detalles de las regiones de la cola apartadas del núcleo por su escaso campo, y aun en el núcleo y primer tercio de la cola no tienen la intensidad debida, pues hubiera sido preciso una exposición más de cuádruple que en las de la otra cámara, y, por la escasa altura del astro sobre el horizonte é iluminación de las regiones bajas de la atmósfera por el alumbrado de la población, no nos ha sido posible concedérsela

24 Noviembre 1908.

XVII.—Algunas observaciones á la teoría del carbono tetraédrico.

POR JOSÉ GIRAL PEREIRA.

La equivalencia de las cuatro dinamicidades de un átomo de carbono, propiedad comprobada por la experiencia, es, como se sabe, uno de los principales fundamentos científicos

de las fórmulas desarrolladas de los compuestos orgánicos. Siendo el carbono el elemento organógeno de mayor valencia y el indipensable en toda molécula orgánica, es lógico suponerle en el interior de ésta, eslabonado, en virtud de su poder de acumulación, con otros idénticos y constituyendo así lo que ha recibido el gráfico nombre de *esqueleto* de una fórmula.

Sabidas son también las razones, puramente experimentales, que sirven de base á la teoría del carbono tetraédrico. Los hechos suceden como si el carbono ocupara el centro de gravedad de un tetraedro regular, estando orientada su energía química en las direcciones que van desde dicho punto á los vértices, y representándose en el espacio sus cuatro valencias por los respectivos radios de la esfera circunscrita á dicho tetraedro.

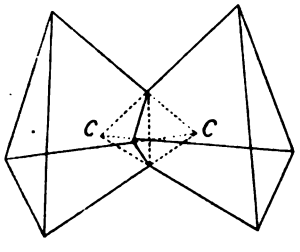


Figura 1.ª

Interesa, por lo tanto, el consignar que, del esquema tetraédrico, solamente nos importan esas líneas de fuerza y no sus aristas, cerrando dicha figura geométrica para mayor comodidad en su representación gráfica. Si consideramos dos átomos de carbono, eslabonados de modo que tengan una valencia común, habrán de representarse por dos tetraedros *enchufados* de manera que el centro de gravedad del uno coincida con un vértice del otro y recíprocamente (fig. 1.ª), porque de este modo se expresará que la distancia entre los dos átomos de carbono es igual á la que existe entre uno de ellos y cualquiera de los radicales que saturan sus valencias libres. Se respeta así el principio de la equivalencia entre las cuatro dinamicidades del carbono, lo cual no sucedería si representáramos los átomos de este elemento por dos tetraedros con un vértice común, puesto que entonces la distancia entre los centros de gravedad sería precisamente doble de la

que media entre uno de ellos y cualquiera de sus vértices respectivos. Y como los hechos nos demuestran que una molécula orgánica puede escindirse entre un carbono y un radical inmediato ó entre dos carbonos contiguos, según la acción descomponente, forzoso y lógico es admitir, de una manera general, que un átomo de carbono tiene la misma afinidad para el contiguo que para cualquiera de los radicales que saturan sus valencias, siendo éstas equivalentes; lo cual nos conduce á representar por igualdad de distancias la igualdad de afinidad y la equivalencia de dinamicidades y á orientar éstas en el espacio del modo más regular posible.

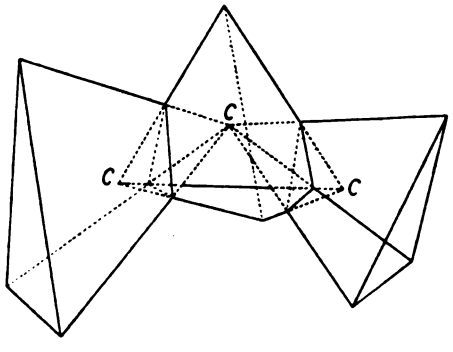


Figura 2.ª

Si el número de átomos de carbono aumenta en la cadena, en la serie los tetraedros correspondientes no podrán tener sus centros de gravedad en línea recta, porque dos cualesquiera de ellos, separados por un tercero, tendrán dichos centros en dos vértices de éste y formarán con el centro de gravedad de él un triángulo equilátero (fig. 2.ª). Claro es que, teniendo en cuenta la especial simetría del tetraedro, las rectas que unen los centros de dos contiguos forman entre sí un ángulo de 120°, que es precisamente el valor del ángulo del exágono regular convexo; lo cual nos prueba que, en el caso de seis tetraedros, se cerrará la figura y que, por lo tanto, las cadenas de seis átomos de carbono tienden á pasar á

cíclicas. Pero esto sucederá únicamente cuando los tetraedros se unan de modo que la línea que pasa por sus centros de gravedad sea poligonal, regular, *plana* y *convexa,* lo cual nos convendrá admitir para explicar el citado caso de la *posición favorecida* de algunos autores; pero que en general no podrá suceder cuando se trate de cadenas de más de seis átomos de carbono, porque no tendiendo á cerrarse dichas cadenas, la citada línea poligonal no habrá de ser ni convexa ni plana, en armonía con la teoría de las tensiones de *Baeyer,* que supone que las líneas de fuerza de la afinidad química pueden desviarse de su posición normal para originar tensiones variables correspondientes á diferentes grados de estabilidad en la molécula.

***

Una vez sentado el principio de que la igualdad de afinidad química entre los átomos ha de representarse por igualdad de distancia entre sus centros de gravedad, veamos cómo la teoría del carbono tetraédrico falla en la explicación y representación de los enlaces múltiples.

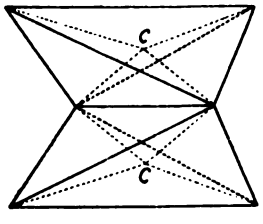


Figura 3.ª

Dos átomos de carbono que cambian entre sí dos valencias, se representan por dos tetraedros con una arista común (fig. 3.ª). Pero no olvidemos que, admitiendo ese esquema representativo, la saturación recíproca de valencias entre los dos carbonos no se efectúa en línea recta, sino según dos segmentos que forzosamente forman un ángulo fijo de 120°, cuya bisectriz es la arista común. Esta saturación *oblícua* de valencias hace suponer implícitamente que la atracción entre los átomos inmediatos no se efectúa en línea recta y que, neutralizándose del mismo modo los dos pares de valencias

comunes, el doble enlace tiene en Química orgánica un valor exactamente duplo del simple, cuando todos los hechos demuestran que el paso de una ligadura múltiple á una sencilla se efectúa, en los compuestos acíclicos, con una facilidad muchísimo mayor que la ruptura de dicho enlace simple, siendo prácticamente los compuestos etilénicos mucho menos estables que los saturados correspondientes. Es verdad que, en el esquema precitado, los centros de gravedad de los tetraedros quedan á igual distancia entre sí que la que media entre cada uno de ellos y cualquiera de sus vértices; pero siempre resultará de explicación gráfica muy artificiosa el que dos tetraedros, con una arista común, pasen á *enchufarse* cuando el compuesto etilénico que representen los primeros se cambie en el saturado respectivo. Añádase á esto que, si bien es verdad que el esquema tetraédrico explica de modo satisfactorio la existencia de los isomeros *cis* y *cis-trans*, porque las figuras correspondientes no son superponibles, en cambio no explica el caso análogo de dos tetraedros con la línea de sus centros de gravedad común y con los mismos radicales en sus vértices; para demostrar que los dos esquemas (I) y (II) (fig. 4.ª) corresponden al mismo cuerpo, es necesario suponer que el tetraedro inferior del (II) gira á la derecha un tercio de vuelta para conseguir la coincidencia de ambos esquemas y cuyo giro no se admite que pueda hacerse cuando los tetraedros tienen una arista común, resultando entonces más inmóviles que cuando están *enchufados*, lo cual parece ilógico é incomprensible. Por otra parte, la existencia de los isomeros *cis* y *cis-trans*, queda perfectamente explicada en esquema plano representando dos átomos de carbo-

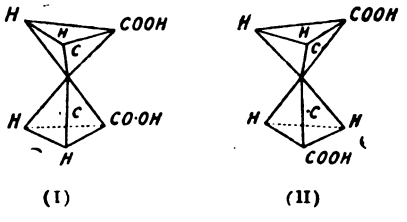
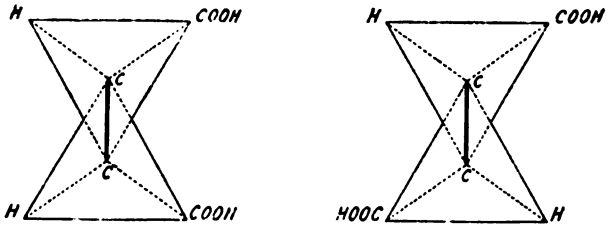


Figura 4.ª

no con doble enlace por dos triángulos equiláteros *enchufados* de análogo modo á cómo se suponen los tetraedros (figura 5.ª), y uniendo sus centros de figura por una doble línea



Acido maléico. (*Cis*). Acido fumárico. (*Cis-trans*).

Figura 5.ª

de fuerza, porque entonces los esquemas correspondientes no son superponibles.

Análogas consideraciones á las expuestas pueden hacerse al interpretar la representación gráfica del triple enlace en la teoría del carbono tetraédrico.

***

Tratemos ahora de representar en fórma estereoquímica la intercalación de un átomo polivalente entre dos eslabones carbonados. Y para fijar las ideas propongamos el caso del metano-oxi-metano que corresponde á la fórmula plana: CH_3-O-CH_3. Respetando el tantas veces citado principio de la equivalencia entre las cuatro dinamicidades del carbono, el átomo de oxígeno debe representarse equidistante de los de carbono y á una distancia de cada uno igual á la que media entre un hidrógeno y su carbono correspondiente, puesto que la afinidad de éste para el oxígeno es la misma que para cualquier hidrógeno de su eslabón. Podrá argüirse

á este aserto que el óxido de metilo rompe casi siempre su cadena entre el primero y el segundo eslabón (contando por cualquiera de sus dos extremos); pero como no sabemos cuál de los grupos CH_3 retiene al oxígeno, no podemos asegurar á cuál de ellos estará más próximo dicho elemento.

Como el esquema tetraédrico supone que las valencias del carbono se ejercen únicamente según las líneas que van desde su centro de gravedad á sus vértices, la única figura representativa del cuerpo que nos ocupa será la figura 6.ª, en la cual el átomo de oxígeno estaría en un vértice común á las dos tetraedros. Pero este vértice común hace suponer que los dos átomos de carbono cambian entre sí una valencia y que el de oxígeno reduce sus dimensiones á las de un punto matemático. Todo ello nos prueba la imposibilidad de representar en forma estereoquímica, conforme á la teoría del carbono tetraédrico, aquellos cuerpos que poseen en su cadena carbonada un elemento divalente intercalado; tal sucede con los éteres óxidos, acetales, ortho-éteres, sulfuros de alcohilo, etcétera. Y un razonamiento análogo nos conduciría á suponer colocado el nitrógeno de una amina secundaria ó terciaria en el vértice común á dos ó tres tetraedros.

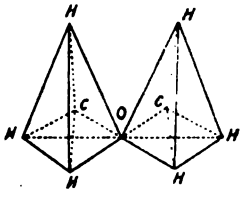


Figura 6.ª

***

Supongamos todavía el caso de un átomo de carbono que satura dos ó tres de sus valencias con un mismo elemento (oxígeno ó nitrógeno). Tal sucede con la propanona: $CH_3 \cdot CO \cdot CH_3$. El átomo de oxígeno no podemos colocarlo en el punto medio de una arista del tetraedro correspon-

diente á su eslabón (fig. 7.ª), porque la saturación de sus valencias con el carbono, al cual está unido, habría de hacerse conforme á una línea quebrada, lo cual supondría una menor estabilidad del grupo cetónico en comparación con los hidrocarbonados extremos. Además, dicho átomo de oxígeno quedaría de su carbono á menor distancia que la que existe entre éste y cualquiera de los otros dos átomos de carbono, lo cual no está en armonía con los hechos observados. Es fácil obviar estos inconvenientes suponiendo que el tetraedro intermedio se reduce á un triángulo, dos de cuyos vértices coinciden con los centros de gravedad de los tetraedros inmediatos, colocándose en el

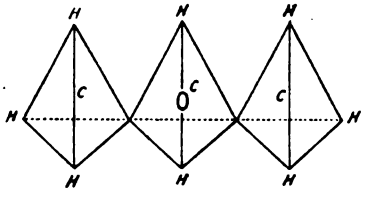


Figura 7.ª

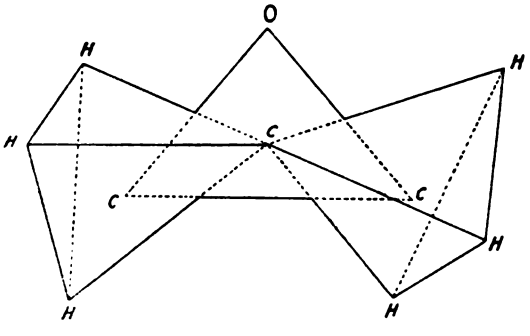


Figura 8.ª

tercero el átomo de oxígeno, conforme á lo que representa la figura 8.ª Cuando se trate de representar gráficamente un aldehido, el triángulo, que es la parte plana del esquema, habrá de quedar al extremo de éste, y en el caso particular del metanal se reduciría la figura á dicho triángulo.

Análogas dificultades de representación ofrecen todos aquellos cuerpos en cuyas moléculas exista un átomo divalente saturando dos dinamicidades de un carbono. Esto ocurre con los aldehidos y cetonas ya mencionados, con los ácidos, éteres-sales, amidas y las funciones sulfuradas correspondientes (thiales, thionas, thiólicos, etc.).

Si el elemento en cuestión es el nitrógeno trivalente, claro es que ha de quedar al extremo de una cadena, formando parte de un eslabón carbonado primario, y entonces tampoco puede suponerse colocado en el centro de figura de una cara del tetraedro correspondiente por análogas razones á las ex-

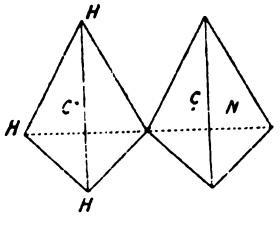


Figura 9.ª

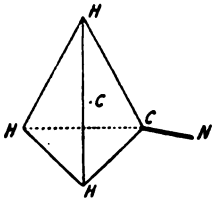


Figura 10.ª

puestas al tratar del caso análogo del oxígeno. Habría que suponer que dicho tetraedro se aplana y acorta de modo que se reduzca á una recta de longitud igual á la que media entre los centros de gravedad de dos tetraedros contiguos: en el punto medio de dicha línea (que será un vértice del tetraedro inmediato), se colocaría el carbono y, á su extremo, el nitrógeno. Así el etanonitrilo vendría representado por el esquema de la figura 10.ª en lugar de serlo por el de la figura 9.ª, tropezando con el inconveniente de quedar reducido á un punto matemático de carbono intermedio y ejercerse las tres valencias que cambia con el nitrógeno en la misma dirección.

***

Sin pretender que los esquemas propuestos en sustitución de los clásicos resuelvan por completo los inconvenientes de éstos, parece iniciarse en ellos una graduación de complejidad que puede sintetizarse diciendo que los triples enlaces deben representarse por líneas; los dobles, por figuras planas, y los sencillos, por poliedros, desarrollándose esta escala paralelamente á la mayor estabilidad de los compuestos resultantes y existiendo una estrecha relación entre la complejidad de la figura y la fijeza del cuerpo que representa. Parece así que las moléculas orgánicas, dentro de su variada arquitectura, tienden hacia el mayor grado de simetría, que es el correspondiente á su mayor consistencia y solidez.

No he pretendido, en la presente nota, echar las bases de una nueva teoría que sustituya á la del carbono tetraédrico, ni aun siquiera impugnar á ésta con la extensión que se merece. He querido solamente poner de relieve algunos casos de interpretación difícil, que pasan desapercibidos en los libros y que creo son de importancia. Si yo hubiera logrado con ello excitar la curiosidad del lector, y tuviera la satisfacción de que aportara su opinión favorable ó contraria á la mía, vería colmado mi deseo y me estimularía á ampliar las ideas ligeramente bosquejadas en estas páginas.

XVIII.—Sobre los cambios de conductancia de la manganina durante el recocido.

POR B. CABRERA.

El recocido de un metal ó aleación que se ha sometido á un tratamiento mecánico enérgico no es un fenómeno instantáneo; de suerte, que sus propiedades no son función exclusiva de la temperatura del recocido, sino también, y á veces en una escala muy importante, del tiempo transcurrido desde que se le sometió á dicha temperatura.

Esta influencia del tiempo es tanto mayor cuanto más compleja es la constitución de la aleación, y se manifiesta con tanta mayor evidencia cuanto más baja es la temperatura á que el recocido se ejecute (*). No es, pues, extraño que la manganina presente un notable retardo de este género; primero, por tratarse de una aleación compleja en la que entran el cobre, el níquel, el manganeso y aun el hierro, y segundo, porque siendo muy oxidable, la temperatura del recocido posible es siempre muy baja.

Débese á K. Feussner y á St. Lindeck (**) un estudio completo de la manganina, preconizada por ellos para la construcción de resistencias tipos, y hoy casi universalmente extendida. Pero no parece, según puede deducirse de la Memoria citada, resumen de sus trabajos, que hayan fijado su atención en la ley según la cual se produce el cambio en la conductibilidad durante el recorrido. Tal fué el objeto que

(*) A. Le Chatelier, Comp. Rend. Mayo, 1890.
(**) Win. Abh. d. Reichsanstalt, t. II, pág. 503.

nos propusimos al comenzar el trabajo que hoy dámos al público en toda su extensión, y del cual comunicamos un avance al primer Congreso de la Asociación española para el adelanto de las ciencias.

Ya muy avanzado el trabajo experimental, y leyendo con un objeto muy diverso la notable Memoria sobre «Las deformaciones pasajeras de los sólidos» (*), presentada al primer Congreso internacional de Física por Ch. Ed. Guillaume, vinimos en conocimiento de que este físico ha estudiado con anterioridad el mismo asunto, llegando á resultados idénticos á los nuestros, por lo menos en sus líneas generales. Esta circunstancia quita la mayor parte de su interés al presente trabajo; pero tanto por la altura en que éste ya se encontraba, cuanto también por no dar Guillaume noticia alguna sobre el lugar donde haya publicado de una manera detallada sus resultados, omisión que, además, no nos ha sido posible llenar, lo cual nos hace temer que dichos trabajos hayan permanecido inéditos; por ambas razones, decíamos, no hemos desistido de la presente publicación.

Una vez conseguido el recocido completo de cada una de las muestras estudiadas, determinamos siempre la curva que define la variación de la conductancia con la temperatura, como medio de reconocer la influencia que aquella operación ejerce sobre las propiedades de la aleación. En esta curva, como veremos más adelante con todo detalle, no revasamos nunca la temperatura del recocido.

Todas las muestras sometidas á ensayo las hemos tomado de dos carretes de procedencia desconocida: uno de hilo de 0,5 de milímetro de diámetro, y otro de 0,8. Analizados por el Prof. auxiliar de Análisis químico de esta Facultad,

---

(*) Rapport présenté au Cong. Int. de Phy. de 1900, t. I, página 432.

Sr. Campo (*), dieron los resultados que se consignan en el adjunto cuadro:

	Hilo de 0,5 mm.	Hilo de 0,8 mm.
Cobre por 100	84,417	83,877
Níquel	3,434	3,949
Manganeso	11,314	11,302
Hierro	0,698	0,715
Resistividad antes del recocido	$40,1 \times 10^{-6}$	$41,8 \times 10^{-6}$

Los datos que se consignan en el cuadro anterior son medios de dos determinaciones para el hilo de 0,5, y de tres para el de 0,8, cuyos resultados son concordantes. De ellos resulta que las cantidades por ciento de manganeso y hierro que figuran en ambas aleaciones, son iguales dentro de los errores experimentales, mientras que las de cobre y niquel cambian, circunstancia que tiene importancia, principalmente en cuanto se refiere al niquel, por la pequeña cantidad que de este metal contiene la aleación.

Así no es extraño que ambos hilos suministren resultados diferentes en este estudio, como más adelante veremos, diferencias que ya comienzan á manifestarse en los valores de la resistividad de ambas aleaciones, que se consignan en el cuadro anterior. Estas constantes están afectadas de un error inferior á una unidad del orden de la última escrita, y como pudiera creerse que el recocido haría desaparecer la diferencia indicada, debemos adelantar que, lejos de esto, dicha operación la aumenta, pues la resistencia de los hilos veremos que disminuye por esta operación. Y si no las hemos calculado utilizando los valores de la resistencia terminada ésta, ha sido por el temor de que aquellos cambios nota-

(*) En el Apéndice que sigue á la presente Memoria, se detallan los métodos puestos en práctica en este análisis.

bles de resistencia vayan acompañados de variaciones paralelas en las dimensiones geométricas.

Método de medida.

La determinación de las conductancias de las muestras estudiadas se ejecutó siempre por el puente de Wheastone; en el cual tres brazos permanecen constantes, mientras el cuarto lo forman la muestra estudiada y una caja de resistencia en derivación, de donde tomamos las resistencias necesarias para compensar los cambios de aquélla, manteniendo el equilibrio del puente. En estas condiciones, llamando x la conductancia medida, R la resistencia de la caja y C_1, C_2, C_3, las conductancias de los tres brazos fijos, la ecuación de equilibrio será:

$$x + \frac{1}{R} = \left[\frac{C_1\, C_3}{C_2}\right] = K.$$

Lo mismo la muestra objeto de estudio que cada uno de los tres brazos fijos tienen un valor muy próximo de $\frac{1}{\text{ohmio}}$. Estos últimos se envolvieron en un mismo toro de ebonita, y sus extremidades las soldamos con plata á cuatro barras gruesas de cobre, en forma de U invertida, fijas á aquél; cuyas ramas libres, sumergidas en pocillos de mercurio, sirven para establecer las comunicaciones con el brazo variable (a_1, a_2) y con el galvanómetro (a_1, a_4) y la pila (a_2, a_3) (fig. 1).

Una vez envueltos los brazos fijos, y recubiertos los hilos por una capa de goma laca, se sometió el sistema durante diez horas á una temperatura próxima de 140°. Lo mismo el empleo de la plata en las soldaduras, que este recocido, eran indispensables para lograr la fijeza necesaria en el valor de K, según demostraron los experimentos preliminares y comprobarán los datos más abajo transcritos.

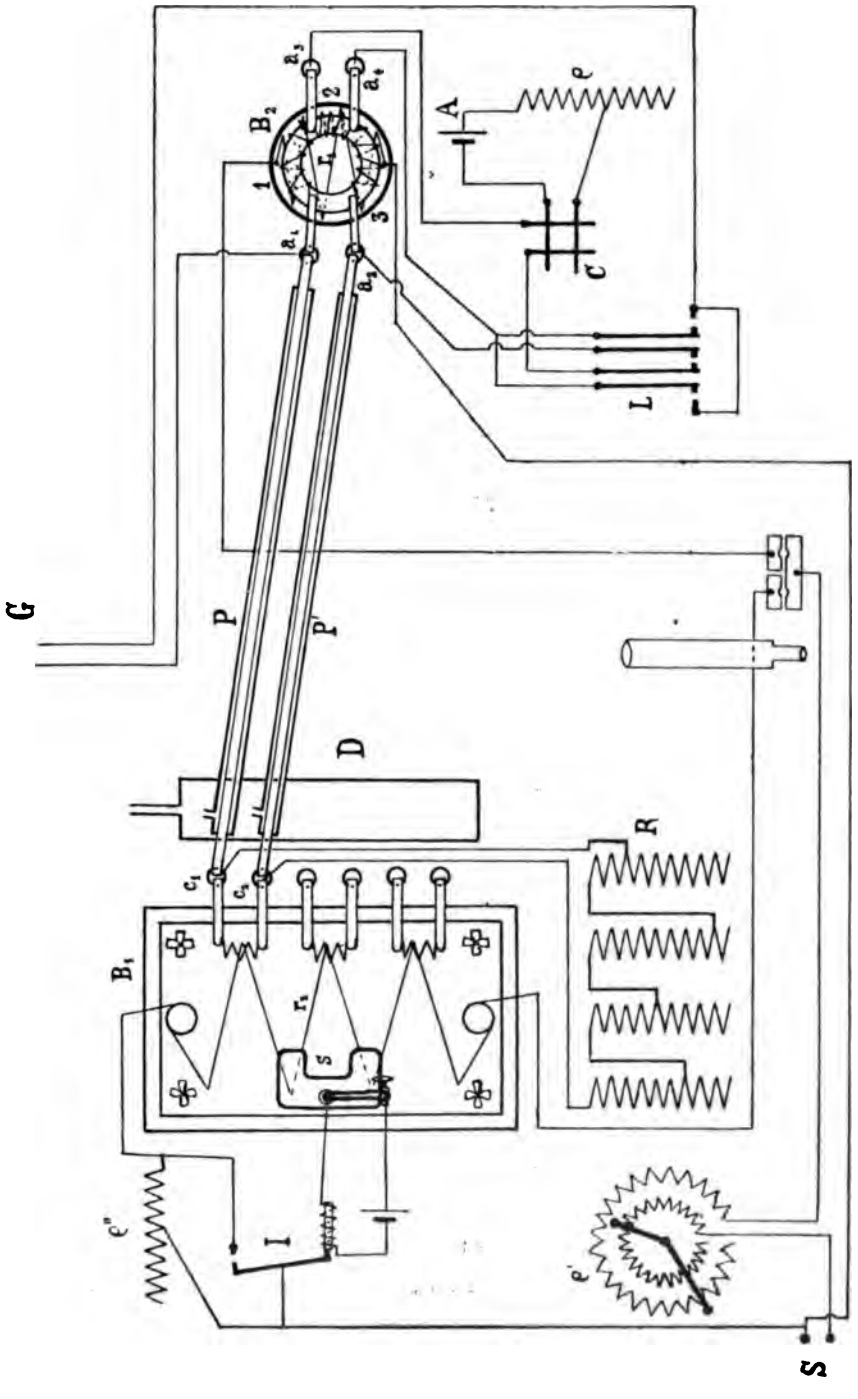


Figura 1.ª

El toro le sumergimos en un baño de aceite de petróleo B_2, agitado á mano, y que se mantuvo siempre á una temperatura ligeramente superior al ambiente, con el auxilio de una corriente que atraviesa la resistencia r_1, y cuyo circuíto puede abrirse ó cerrarse á voluntad, mediante una clavija. La temperatura de este baño se determinaba por un termómetro Baudin, de vidrio duro, en décimas.

Las muestras sujetas á estudio, envueltas en forma de anillo de unos tres centímetros de diámetro, sujeto con hilos de seda, se soldaron con estaño ó plata, según los casos, á dos barras gruesas de cobre en forma de U (fig. 4), sólidamente ligadas entre sí mediante bloques de ebonita, para impedir toda deformación del hilo durante su estudio. De estas muestras, unas se prepararon con un año de anticipación, y las otras en los días anteriores á aquél en que fueron estudiadas.

Los extremos libres de la U se sumergían en pocillos de mercurio (c_1 c_2), y la comunicación entre éstos y los a_1 a_2 se hizo con barras (PP') de cobre de unos 35 centímetros de longitud.

Sabida la gran influencia perturbadora de las fuerzas electromotrices termoeléctricas localizadas en los brazos del puente, y teniendo en cuenta que la gran diferencia de temperatura que ha de existir entre la muestra estudiada y el sistema fijo, abona la aparición de aquéllas, por no ser iguales las cantidades de calor trasmitidas por las barras, á pesar de la semejanza de las mismas, es indispensable reducir este transporte de calor por el enfriamiento de P y P'. Tal enfriamiento lo logramos siempre por corrientes de agua; pero teniendo la precaución de que fuesen completamente independientes entre sí y del resto de la red, para evitar derivaciones que falsearían en absoluto los resultados de las medidas.

Mientras la diferencia de temperaturas entre la muestra y el sistema fijo no excedió de 50°, logramos este fin rodeando

una porción de cada barra por una torcida de algodón, una de cuyas extremidades se sumergía en un frasco de vidrio lleno de agua. Esta, después de enfriar la barra, caía gota á gota en un depósito común por la otra extremidad de la torcida. Como, de una parte, los frascos correspondientes á cada barra eran independientes y estaban aislados, y, de otra, no existía continuidad en la vena líquida que une cada barra con el depósito, el peligro de las derivaciones á que hemos hecho alusión no existe.

Para diferencias de temperatura superiores á 50°, el pro-

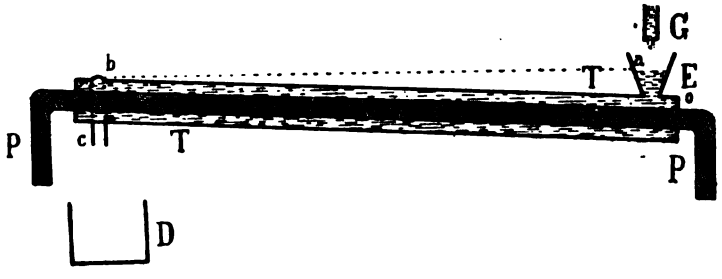


Figura 2.

cedimiento anterior es insuficiente, por la lentitud de la corriente de enfriamiento. Rodeamos entonces las barras *P* (figura 2) con un tubo de latón *T T* provisto de dos orificios en su generatriz superior. En el más próximo al sistema fijo 0 se soldó un embudo *E*, y en el otro *b*, un sifón *bc* de tubo más delgado. Las barras se colocaban siempre inclinadas, en la forma que la figura indica. La extremidad *G* de un sifón, que comunica con un depósito de agua, deja caer este líquido gota á gota en *E*, con la rapidez que convenga á la buena marcha de la operación. En cuanto el agua llena el espacio entre el tubo y la barra, alcanzado en el embudo de altura *a*, el sifón *bc* entra en funciones y vacia gran parte del tubo *TT* en el depósito *D*. Como el gasto de *bc* es grande, este período es una fracción pequeña del necesario para llenar *T*. En estas condiciones, teniendo en cuenta que los

tubos de las dos barras no se vacian casi nunca simultáneamente, se asegura la imposibilidad de una derivación. Las extremidades correspondientes á los embudos comunican con (a_1 a_2), de suerte que el sentido de la circulación del agua era opuesto al graduante de temperatura engendrado por el baño caliente á lo largo de las barras, con lo cual se aseguraba un enfriamiento de las mismas más perfecto. *D* representa la cuba destinada á recoger el agua de los sifones *bc*.

También con el fin de eliminar los efectos determinados por las fuerzas electromotrices termoeléctricas, hemos empleado una llave de Griffiths *L*, y un conmutador *C* en el brazo de la pila *A*.

Como tal utilizamos un acumulador «Tudor» en serie con un reostato ρ, que nos servía para graduar la corriente total en el puente. Así, antes de lograr un equilibrio aproximado ρ era muy grande, disminuyendo paulatinamente, hasta que, manteniendo *L* cerrado durante un tiempo mayor que el necesario para apreciar el equilibrio, se notaban cambios que podían achacarse á calentamientos ó fuerzas electromotrices termoeléctricas engendradas por la corriente.

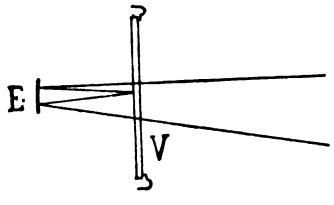


Figura 3.

El galvanómetro utilizado es del tipo Broca, construído por «The Cambridge Sc. Instrument Co.», con dos bobinas de 2 ω aproximadamente en derivación, de suerte que la resistencia es del mismo orden que cada uno de los brazos del puente. Colocado á unos tres metros de la mesa de trabajo, el equilibrio del sistema móvil le determinamos mediante la observación por un anteojo de la imagen formada por el espejo, del filamento rectilíneo de una lámpara eléctrica. Cuando era necesaria una gran precisión, utilizamos para el último ajuste la imagen engendrada por los rayos que sufrían una doble reflexión entre el espejo *E* (fig. 3) y

el vidrio plano V que cubre la caja donde se mueven las agujas.

La resistencia variable R la hemos tomado siempre de una caja de precisión «Carpentier» en décadas, construída con manganina; empleando una derivación sencilla siempre que era posible, y caso contrario doble y á veces triple, para cuyo fin utilizamos las resistencias que forman los brazos de proporción, cuando la caja se monta en puente.

En casi todos los ensayos definitivos, únicos cuyos resultados transcribiremos aquí, hemos estudiado las muestras de hilo de tres en tres, de suerte que en cada determinación hemos de cambiar la posición de P y P'. Estos cambios siempre pueden determinar errores en las medidas ejecutadas, por variación en las resistencias de los contactos, no obstante hacerse éstos con mercurio. Tales errores, aunque pequeños, existen realmente y son apreciables, según puede reconocerse indirectamente por la comparación de las diferencias entre los números observados y los calculados en los dos ejemplos siguientes, que corresponden á cambios con la temperatura de las conductancias para las muestras números 2 y 11, de las cuales la primera permaneció invariablemente ligada á las barras durante toda la operación, mientras la segunda fué estudiada simultaneamente con otras dos.

Muestra núm. 2 — 16/x — 1907.

$$C_t = .995694\,[1 - .0_4292\,(t - 15) + .0_6 37\,(t - 15)^2].$$

Temp.	C. obs.	C. cal.	Δ
13°,12	.995749	.995751	+ 2.10⁻⁶
17°,95	.995611	.995612	+ 1
23° 25	.995479	.995479	0
30°,20	.995337	.995337	0
34°,90	.995260	.995260	0
40°,90	.995188	.995187	− 1
45°,30	.995150	.995150	0
50°,40	.995124	.995125	+ 1

Muestra núm. 11 — 19/VIII — 1908.

$$C_t = .988167\,[1 - .0_4127\,(t - 25) + .0_6 37\,(t - 25)^2].$$

Temp.	C. obs.	C. cal.	Δ
26°,10	.988154	.988159	+ 5.10⁻⁶
29°,45	.988116	.988119	+ 3
34°,80	.988074	.988076	+ 2
39°,50	.988055	.988054	— 1
45°.30	.988050	.988047	— 3
49°.50	.988060	.988056	— 4
55°,10	.988082	.988083	+ 1
59°,60	.988125	.988121	— 4
66°,60	.988205	.988203	— 2
73°,00	.988305	.988298	— 7

El distinto orden de magnitud de las diferencias entre los valores calculados y observados, demuestra que en el segundo caso los errores accidentales son más importantes. Y tal diferencia se reconoce en todos los casos análogos. Pero teniendo en cuenta que en todo caso el límite de la aproximación excede con mucho á lo que es necesario para este trabajo, prescindimos de esta pequeña dificultad, salvo cuando se trataba de apreciar cambios muy pequeños, según veremos en el lugar oportuno.

El baño donde han sido calentadas las resistencias es de aceite de petróleo perfectamente neutro, y de punto de ebullición muy elevado, contenido en una caja de latón, rectangular, y de unos dos litros de capacidad. Esta caja estaba térmicamente aislada mediante cartón de amianto, aserrín de corcho y una envoltura exterior de madera. Cuatro hélices enlazadas por una correa sin fin á un motor eléctrico no representado, aseguraban una agitación violenta y permanente, y una resistencia r_2 distribuída en dos bobinas colocadas en los lados menores del rectángulo, entre cada par de hélices, formaba el sistema de calefacción.

La corriente que atraviesa esta resistencia la tomamos del

sector industrial, regulándole mediante el reostato ρ', de tal suerte que determine un calentamiento muy lento en el baño. Un regulador de mercurio S intercala en el circuito, mediante el interruptor electromagnético I, la resistencia ρ'', elegida de suerte que el baño se enfrie muy lentamente. Así queda asegurado el equilibrio térmico entre el mercurio del regulador y el aceite, lográndose que el intervalo donde cambia la temperatura no exceda de unas cuantas décimas de grado.

Las temperaturas inferiores á 100° las medimos con un mismo termómetro Baudin, de precisión, graduado en décimas.

Para las temperaturas superiores á este límite empleamos el par cobre constantan, construído por la casa de Cambridge ya citada, y estudiado por el National Laboratory de Londres. La soldadura introducida en B se preparó soldando con plata ambos alambres en un orificio abierto según el eje de un pequeño cilindro de cobre, y cada una de las otras dos extremidades se soldaron por el mismo procedimiento á otros dos alambres de cobre, en orificios abiertos en dos semicilindros del mismo cobre empleado para la soldadura caliente. Estos dos semícilindros los aislamos entre sí por una lámina de mica, ligándolos por un cordón de seda blanca, formando una masa única que se introdujo en B_2. Tanto los alambres que forman el par, como los terminales de cobre á ellos soldados, que comunican con el voltímetro, se aislaron cuidadosamente con seda. El voltímetro utilizado fué un modelo de W. Paul de Londres, cuya división corresponde á 1×10^{-4} de voltio, y como las lecturas más bajas correspondían á 40 divisiones de la escala, pudiendo apreciarse con toda seguridad el quinto de división, podemos asegurar una aproximación de un 0,5 por 100 en la medida de las temperaturas por este método. Y nótese que tal límite no es muy inferior al que corresponde á las lecturas directas por el termómetro Baudin en las condiciones en que fueron ejecutados; pues toda la columna termométrica permanecía

fuera del baño, y la corrección correspondiente seguramente puede ir afectada de un error que alcance algunas décimas de grado, para las temperaturas elevadas.

Como habíamos de emplear para medir las temperaturas con este par la curva trazada con los números suministrados por el National Laboratory, quisimos cerciorarnos de que nuestro montaje no había modificado la fuerza electromotriz del par, introduciendo otras parásitas, ó derivaciones que engendraran idénticos efectos externos. Con este fin hemos comparado repetidamente, y en épocas diferentes, los números suministrados por aquella curva y por la observación directa, para temperaturas comprendidas por entre 50 y 100°. Una de estas series la transcribimos por vía de ejemplo:

23-IX-1908									
T' Temp. soldadura fría	21,2	21,2	21,2	21,1	21,1	21,0	21,0	21,0	21,0
T Temp. soldadura caliente.....	48,5	58,9	68,7	73,3	79,0	83,2	89,6	95,6	101,0
$E_{T'}$ F. E. tomada sobre la curva para T'.	845	845	845	84	84	84	84	84	84
E_T F. E. tomada sobre la curva para T.....	1,94	2,37	2,785	2,98	3,22	3,400	3,685	3,95	4,20
$\Delta E = E_T - E_{T'}$.....	1,095	1,525	1,940	2,14	2,38	2,560	2,845	3,11	3,36
V Lectura del voltímetro.....	1,02	1,48	1,880	2,09	2,31	2,50	2,78	3,01	3,21
Error $= V - \Delta E$.....	—.075	—.045	—.060	—.05	—.07	—.060	—.065	—.10	—.15

De este cuadro, como de sus análogos no transcritos, resulta un incremento de la diferencia $V - \Delta E$ á medida que su temperatura crece. Tal hecho pudiera achacarse á alguna de las dos causas citadas arriba, pero dista mucho de ser evidente, tanto más si se tiene en cuenta que hemos observado una disminución de la desviación del voltímetro con el tiempo cuando ambos baños se mantenían á temperatura constante durante muchas horas, debiendo advertir que el circuito unicamente permaneció cerrado el tiempo necesario para ejecutar la lectura.

Por esta razón no empleamos nunca el par en cuestión en el estudio de las curvas de temperatura, pero sí para la temperatura del recocido, pues en este caso nos basta la seguridad de la invariabilidad de la misma.

Con este fin, así como porque en el estudio de los cambios de conductancia con el tiempo conviene determinar con rapidez la temperatura del baño, para eliminar las variaciones que provienen de diferencias de esta última, colocamos siempre en B_1 un metastático Baudin sensible al $^1/_{50}$ de grado (*).

Determinación de la constante.

Según hemos dicho, el valor de la conductancia de la muestra estudiada se determina mediante la ecuación

$$x = K - \frac{1}{R},$$

donde $K = \frac{C_1 C_3}{C_2}$ y R es la resistencia derivada sobre x. Así, pues, es menester conocer en cada caso el valor de K, y tal determinación, de igual manera que la de su coeficiente de temperatura, puede ejecutarse sencillamente disponiendo en vez de x una conductancia conocida.

Fué ésta siempre un ohmio tipo de la casa Leeds & Northrup de Filadelfia, cuyo valor á 20°, suministrado por el constructor, es de .99996. Comparado este patrón con otro de un ohmio y dos de diez, de Otto Wolf, provistos de certificados para medidas de precisión por el Reichsanstalt de Berlín, nosotros hallamos para los límites de temperatura en que fué utilizado,

$$R_t = .99995\,[1 + .0_4\,18\,(t - 20) - .0_6 4\,(t - 20)^2]$$

(*) Parte del material utilizado en este trabajo pertenece á la Junta de Ampliación de Estudios é investigaciones científicas.

Adaptado este ohmio al puente, mediante dos gruesas barras de cobre terminadas en pocillos de mercurio, establecíamos una doble derivación para lograr el equilibrio. De estas derivaciones una era fija y de 100 ohmios, y la otra variable del orden de los 400. Ambas derivaciones las tomamos de la misma caja y ejecutemos siempre dos medidas, con dos bobinas diferentes de 100 ohmios, con lo cual los valores de K sólo diferían en algunas millonésimas.

Para el último de los sistemas fijos empleado, que ha servido para el estudio de todas las muestras á que hemos de referirnos más adelante, ejecutamos la determinación de K para temperaturas comprendidas entre 15° y 32°, y su valor puede expresarse por la ecuación

$$K_t = 1.010347\,[1 - .0_4 22\,(t - 25) + .0_6 21\,(t - 25)^2],$$

que suministra valores que sólo difieren de los observados á cada temperatura en algunas millonésimas.

La práctica nos había demostrado que este sistema fijo no permanece invariable con el transcurso del tiempo, sin duda porque no seguimos en su construcción con toda fidelidad las prescripciones del Reichsanstatl. Aunque tales cambios tienen una importancia muy secundaria en el presente trabajo, pues no nos proponíamos determinar los valores absolutos de las conductancias sino sus variaciones, y esto en un período de tiempo pequeño, comparado con aquéllos, dentro de los cuales dicha variación se hace bien sensible, preferimos eliminar los errores que de esta causa pueden proceder, determinando K con relativa frecuencia, y cada vez para varias temperaturas que comprenden aquélla á que se halla el sistema. De esta suerte conocíamos en cada caso el verdadero valor de K y su coeficiente de temperatura.

De la magnitud de estos cambios suministra cumplida cuenta el siguiente cuadro, que encierra algunos valores de

K por una misma temperatura intermedia, así como el coeficiente de temperatura:

FECHA	K_{20}	α
30 de Julio de 1908.....	1.010462	$.0_4 22$
21 de Agosto de ídem.....	1.010410	»
9 de Septiembre de ídem.....	1.010291	$.0_4 21$
25 de ídem íd.....	1.010283	$.0_4 26$
16 de Octubre de ídem	1.010297	$.0_4 26$
17 de Noviembre de ídem.....	1.010268	$.0_4 28$

Obsérvase en este cuadro que K_{20} ha disminuído rápidamente en un principio, tendiendo luego hacia un valor constante, mientras que x parece ascender, aunque de una manera más uniforme. Nótese, sin embargo, que si se prescinde de los primeros días, esta variación es bastante lenta para poder eliminarse por las frecuentes determinaciones á que aludíamos.

Correcciones.

Decíamos más arriba que no nos proponíamos la determinación de los valores absolutos de las conductancias, y la razón que á ello nos ha movido es la mayor complicación que en los cálculos introduce la eliminación de la conductancia de las barras de comunicación. En efecto; esta conductancia dista mucho de ser infinita, á causa de su gran longitud, necesaria para evitar la proximidad de los baños B_1 y B_2.

Para formar juicio exacto respecto de su magnitud, establecimos el equilibrio en el puente: primero, derivando R_a en los pocillos a_1 y a_3, y á continuación R_b en las extremidades donde se suelda la muestra estudiada. Llamando ρ la resistencia de ambas barras y r la del hilo, es fácil ver que dentro de una aproximación suficiente

$$\frac{\rho}{r} = \sqrt{\frac{R_a}{R_b}} - 1.$$

Por este método hemos hallado para ρ, .0007.

¿De qué manera influye esta resistencia en los resultados de este trabajo? Tal es la cuestión que vamos á resolver. Para ello observemos que las barras de comunicación constan de dos partes completamente distintas: las P, cuya resistencia ρ_1 permanece constante, puesto que, merced al enfriamiento, su temperatura no cambia, y las en U, á que se suelda el hilo estudiado, cuya resistencia, variable con la temperatura, representaremos por ρ_2 para 25°: á cualquier otra temperatura su valor será $\rho_2[1+\gamma(t-25)]$, siendo γ el coeficiente del cobre 0.0042.

Designando por R_1, R_2, R_3 las resistencias de los tres brazos del puente, y teniendo en cuenta que la derivación se hace en los pocillos c_1, c_2, la verdadera ecuación de equilibrio será:

$$\frac{(r+\rho_2)R}{R+r+\rho_2}=\frac{R_1 R_3}{R_2}-\rho_1=\text{const.}$$

donde para simplificar prescindimos del paréntesis que multiplica á ρ_2. De aquí se deriva

$$\frac{1}{r+\rho_2}+\frac{1}{R}=K$$

y en definitiva

$$x=\frac{1}{r}\left(1-\frac{\rho_2}{r}\right)=K-\frac{1}{R}.$$

Cuando $\frac{\rho_2}{r}$ permanece constante, para corregir las conductancias x del error que este término introduce, nos bastará sumar á $K-\frac{1}{R}$ la cantidad constante $\frac{\rho_2}{r^2}$, lo cual equivale á un transporte del eje x paralelamente á sí mismo, y, por ende, no afecta á la forma de las curvas objeto

de estudio. Este caso se presenta al determinar los cambios de la conductancia con el tiempo de recocido, puesto que entonces la temperatura de ρ_2 permanece invariable, y las variaciones que en $\frac{\rho_2}{r^2}$ engendran las de r son infinitamente pequeños de orden superior.

Pero no así cuando se trata de las curvas de temperatura. Para discutir el error á que venimos refiriéndonos en este caso particular, conviene advertir que las ordenadas de las curvas son siempre los cocientes $\frac{x_t}{x_{25}}$, ó sea, llamando α y β los coeficientes de la manganina y θ la temperatura de la barra.

$$\frac{x_t}{x_{25}}=\frac{r_{25}}{r_t}\,\frac{1-\frac{\rho_2}{r_{25}}[1+\gamma(\theta-25)-\alpha(t-25)+\beta(t-25)^2]}{1-\frac{\rho_t}{r_{25}}}=$$

$$=\frac{r_{25}}{r_t}\left[1-\frac{\rho_2}{r_{25}}\gamma(\theta-25)+\frac{\rho_2}{r_{25}}\alpha(t-25)-\frac{\rho_2}{r_{25}}\beta(t-25)^2\right];$$

de suerte que las verdaderas curvas vendrán definidas por la ecuación

$$\frac{r_{25}}{r_t}=\frac{x_t}{x_{25}}\left[1+\frac{\rho_2}{r_{25}}\gamma(\theta-25)-\right.$$

$$\left.-\frac{\rho_2}{r_{25}}\alpha(t-25)+\frac{\rho_2}{r_{25}}\beta(t-25)^2\right],$$

que equivale á reemplazar el eje de las abcisas por la curva cuya ecuación es:

$$y=\frac{x_t}{x_{25}}\,\frac{\rho_2}{x_{25}}\gamma(\theta-25)-\frac{x_t}{x_{25}}\,\frac{\rho_2}{r_{25}}\alpha(t-25)+$$

$$+\frac{x_t}{x_{25}}\,\frac{\rho_2}{r_{25}}\beta(t-25)^2.$$

Así, para apreciar el error de que se hallan afectadas las curvas de temperatura, debemos calcular esta ecuación. Pero como en ella figuran los coeficientes térmicos, así como los valores de $\frac{x_t}{x_{25}}$, es menester que nos concretemos á una curva única, y teniendo en cuenta que todas las muestras del hilo de $0{,}8^{m}/_{m}$ poseen la misma curva, aplicaremos el cálculo á este caso.

El primer problema que se nos presenta es la determinación de θ, porque teniendo las barras en cuestión una de sus

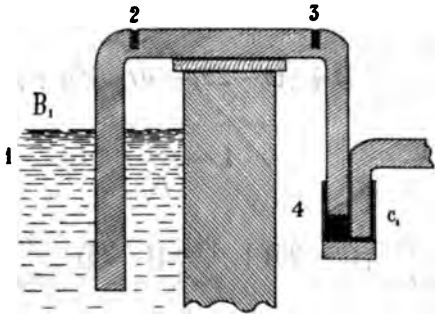


Figura 4.

extremidades en el baño B_1 y la otra en los pocillos c_1 c_2....., θ varía á lo largo de las mismas. Ahora bien; como la resistencia del cobre, dentro de los límites en que estamos colocados, es una función lineal de la temperatura, la resistencia de las barras será la misma que si toda su longitud estuviese á la temperatura media θ_m; el problema se reduce, pues, á calcular θ_m en función de t.

Es menester, para ello, determinar la distribución de la temperatura á lo largo de una de las barras, y, dada la forma y situación de ésta, se comprende que sólo por la experimentación puede abordarse este asunto. Con este fin, abrimos dos pequeñas oquedades en los puntos 2 y 3 (fig. 4) de una de las barras, colocada en idéntica situación que al eje-

cutar las medidas de la conductancia de los hilos. Una de las soldaduras de un par termoeléctrico, ligado al mismo milivólmetro ya descrito, y cuya otra soldadura está á temperatura constante, se llevó sucesivamente al baño (1), á las oquedades (2) y (3), previamente llenas de mercurio, y al pocillo *c* (4), operaciones durante las cuales B_1 permanece á temperatura constante, y que se repiten para diferentes valores de esta última.

Ejecutamos dos series de operaciones de este género; una preliminar, con un par cobre/constantan, y otra definitiva con uno hierro/constantan. Los resultados de este último se consignan en el siguiente cuadro:

Temp. de B_1	21° 4		30° 5		43° 7		50° 9		61° 2		71° 5		81° 5		91° 7		101° 5	
	F. E. T...	θ	F. E. T...	θ	F. E. T...	θ	F. E. T...	θ	F. E. T...	θ	F. E. T...	θ	F. E. T...	θ	F. E. T...	θ	F. E. T...	θ
(1)	.38	21,2	.82	30,2	1,53	43,9	1,88	50,5	2,46	61,5	2,98	71,3	3,52	81,5	4,06	91,9	4,58	101,5
(2)	.20	18,8	.45	23,5	.95	33,0	1,22	38,1	1,61	45,4	2,02	53,2	2,45	61,3	2,82	68,3	3,00	71,7
(3)	.12	17,3	.31	20,9	.67	27,7	.86	31,3	1,13	35,9	1,43	42,0	1,72	47,4	2,02	53,2	2,12	55,1
(4)	.02	15,4	.19	18,6	.37	22,0	.49	24,3	.66	27,5	.81	30,3	.99	33,7	1,15	36,7	1,21	37,9

Las fuerzas electromotrices termoeléctricas se expresan en milivoltios, y las temperaturas θ se deducen de la ecuación del par calculada mediante las lecturas (1) y las temperaturas de B_1 que figuran en la cabeza del cuadro. Esta ecuación, cuyo grado de exactitud puede deducirse de la comparación de los valores de θ en la línea (1) con los que han servido para su cálculo, es:

$$\theta = 15{,}04 + 18{,}9\,E.$$

Los valores de θ consignados arriba han servido para deducir las curvas de variación de la temperatura á lo largo de la barra. En estas curvas las abcisas representan las dis-

tancias á la extremidad de la barra que lleva la resistencia, y se ha admitido que toda la porción de la misma que permanece sumergida en el petróleo (4,5 cm.) posee la misma temperatura de este líquido, salvo una pequeña porción que se determina por sentimiento de continuidad, ligando la parte horizontal con el resto. La temperatura media se deducirá dividiendo el área limitada por la curva y los ejes por la longitud total de la barra.

El cálculo de las áreas lo ejecutamos recortándolas de una misma chapa de latón y pesándolas. Los valores deducidos por este procedimiento son los que se consignan á continuación:

Temp. de B_1....	21°,4	30°,5	43°,7	50°,9	61°,2	71°,5	81°,5	91°,7	101°,5
θ_m ob.	18°,5	24°,1	32°,9	37°,3	44°,1	51°,3	58°,7	64°,7	70°,0
θ_m cal	18°,1	24°,1	32°,8	37°,6	44°,4	51°,2	57°,8	64°,6	71°,1
Δ.....	.4	.0	.1	—.3	—.3	.1	.9	.1	—1.1

Los valores de θ_m calculados, lo están por la ecuación

$$(\theta_m - 25) = -4{,}56 + .662\,(t - 25),$$

de suerte que entre ambas temperaturas existe una relación lineal. Conviene observar que con el par cobre constantan obtuvimos para esta misma relación

$$(\theta_m - 25) = -2{,}5 + .65\,(t - 25),$$

que se identifica con la anterior, si se tiene en cuenta que con él únicamente operamos á 50°, 70° y 100°, de donde deriva una inseguridad grande para los resultados.

Efectuando la sustitución de este valor de $(\theta_m - 25)$ en la ecuación arriba indicada, ésta se convierte en

$$y = \frac{x_t}{x_{25}}\,\frac{\rho_2}{r_{25}}\left[-4{,}56\gamma + (.66\gamma - \alpha)(t-25) + \rho\,(t-25)^2\right]$$

Para calcular el factor numérico $\frac{x_t\ \rho_2}{x_{25}\ \theta_{25}}$, observemos que ρ_2, medido directamente por el método del puente Thomson, arroja un valor de 144 $.10^{-6}$ á 25°, mientras que $\frac{x_t}{x_{25}}$ sólo difiere de la unidad en una milésima, en el caso más desfavorable y r_{25} muy pocas veces excede de la unidad en más de dos centésimas. Así, podemos considerar este factor invariable, con lo cual nos exponemos á un error que, para los mayores valores de t, apenas si alcanza á un 2 por 100.

Para el coeficiente de temperatura del cobre γ adoptaremos el valor .0042, con lo cual $.66\ \gamma = .0028$, número más de doscientas veces superior á α, que puede, por ende, ser despreciado frente á él. Respecto á β, aceptamos el valor $.0_6 41$, que se deduce de la curva y que coincide con el que ha hallado C. V. Drysdale (*) recientemente para una muestra cuyo mínimum de resistencia se presenta á una temperatura muy próxima de la que corresponde al hilo á que nos venimos refiriendo. Con estos datos obtenemos para la ecuación

$$y = -2{,}46\ .10^{-6} + .40\ .10^{-8}\,(t-25) + 59\ .10^{-12}\,(t-25)^2.$$

Evidentemente, el último término es despreciable, y los dos primeros representan una recta inclinada respecto al primitivo eje de las temperaturas, como la recta de puntos lo está respecto á la 1 sobre la figura que representa la curva de temperatura en el hilo de 0,8 mm.

(Se continuará).

(*) The Electrician, LIX, 991.

PUBLICACIONES RECIBIDAS

(Continuación.)

Real Academia de la Historia.—Discursos leídos ante la Real Academia de la Historia en la recepción pública del Excmo. Sr. D. Enrique de Aguilera y Gamboa, Marqués de Cerralbo, en 31 de Mayo de 1908. —Contestación de D. Juan Catalina y García.—Madrid, 1908.

Real Academia de la Historia.—Boletín de la . . .—Tomo LI, cuaderno 6.º —Idem LII, cuadernos del 1.º al 6.º - Idem LIII, cuadernos del 1.º al 4.º—Madrid, 1907 y 1908.

Real Academia de Medicina —Discursos leídos en la Real Academia de Medicina para la recepción pública del Excmo. Sr. Dr. D. Tomás Maestre y Pérez el día 24 de Mayo de 1908.—Contestación de D. José Gómez Ocaña.—Madrid, 1908.

Real Academia de Medicina.—Discursos leídos en la Real Academia de Medicina para la recepción pública del Dr. D. Enrique de Isla y Bolomburu el día 21 de Junio de 1908.—Contestación del Excmo. Sr. Dr. D. Julián Calleja y Sánchez.—Madrid, 1908.

Real Academia de Medicina.—Discursos leídos en la Real Academia de Medicina para la recepción pública del Ilmo. Sr. D. Dalmacio García é Izcara el día 31 de Mayo de 1908. — Contestación del Ilmo. Sr. D. Santiago de la Villa y Martín.—Madrid 1908.

Real Academia de Medicina.—Anales de la . . .—Tomo XXVII, cuaderno 4.º—Idem XXVIII, cuadernos 1.º al 3.º—Madrid, 1907.

Alcobé y Arenas (Dr. D. Eduardo). - Noticia acerca de algunas experiencias con placas autocromas Lumière. (Véase memorias de la Real Academia de Ciencias de Barcelona, vol. VI, núm. 28.) - Barcelona.

«El Asegurador Español».—Revista de Seguros, año VI, núm. 2.—Barcelona, 1908.

Asociación Nacional del Profesorado.—«El Libro», órgano de la...—Año II, números 8 al 12.—Buenos Aires, 1908.

Asociación de Peritos Industriales. — Boletín Tecnológico de la...—Año III, núm. 30.—Año IV, números 31 al 38.—Madrid.

Avelino Armenteros (D. Andrés). Necesidad de separar en España la Política de la Administracción.—Conferencia dada en la Asociación de Alumnos de Ingenieros y Arquitectos.—Madrid, 1907.

Balcells, S. J. (P. Mariano.) —La Observación Solar.—Memorias del Observatorio del Ebro, núm. 2.—Barcelona, 1908.

Banco Hipotecario de España —Memoria del . . ., sobre el ejercicio de 1907, presentada en la Junta general ordinaria de 9 de Mayo de 1908.—Madrid, 1908.

Barnola, S. J. (Joaquín M.ª de).—Manual práctico del Botánico Herborizador. Barcelona, 1908.

Bartrina y Capella (J. M.).—Tratado didáctico de las Geometrías no euclídeas.—Obra laureada.—(Véase Memorias de la Real Academia de Ciencias de Barcelona, vol. VII, núm. 2.)—Barcelona.

Bibliografía Española.—Organo oficial de la Asociación de la Librería de España.—Año 7.º, núm. 24.—Año 8.º, núms. 1 á 6 y 8 á 21.—Madrid, 1907 y 1908.

Boletín de los Hospitales.—Año 7.º, núms. 8 y 9.—Caracas.

Brañas Fernández (D. Gonzalo).—Estudio sobre las radiaciones hertzianas.—Memoria presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias.—Sección de Físico-Química.—La Coruña, 1907.

Burckhardt (Dr. Carlos).—La Faune Jurassique de Mazapil, avec un appendice sur les fossiles du crétacique inferieur par le . . ., (avec 43 planches).—Boletín del Instituto Geológico de México, núm. 23.—México, 1906.

Cabo (Dr. F.).—¡Despertad, gallegos! Boceto político dedicado al presunto jefe oficial del Terrorismo español.—Madrid, 1908

Cabrera Laterre (Angel).—Sinopsis de los Quiropteros Chilenos (Extracto de la Revista Chilena de Historia Natural, año 7, 1903.)—Valparaíso, 1903.

Cabrera Laterre (Angel).—Sobre la nomenclatura de algunos géneros del orden «Primates».—El «Okapi del Museo de Madrid».—«Los lobos de España.»—(Bol. de la Real Sociedad Española de Historia Natural.)—3 folletos.—Madrid.

Cabrera (Ry Angel).—«Three new Spanish Insectivores».—«On Muscardinidœ from the Iberian Peninsula».—(Annals and Magazine of Natural History).—2 folletos.

Cadevall y Diars (D. Juan).—Notas Fitogeográficas Críticas.—(Véase Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, vol. VI, número 26).—Barcelona, 1908.

Cámara oficial de Comercio, Industria y Navegación de Madrid.—Memoria presentada por la Junta Directiva á la Asamblea general el día 29 de Febrero de 1908.—Madrid, 1908.

Centro Hispano-Marroqui de Barcelona.—Museo Comercial de productos Africanos fundado por el...—Barcelona, 1907.

Centro Farmacéutico Uruguayo.—Revista...—Tomo XIV, núms. 11 y 12.—Tomo XV, núms. 1 á 8.—Montevideo, 1908.

Centro Nacional de Informaciones Comerciales y Archivo de Sociedades Anónimas —Memoria de los trabajos realizados durante el año 1907.—Madrid, 1908.

Comas Solá (D. José).—Paso de Mercurio delante del Sol.—Observaciones de

Marte.—Oposición de 1907.—Sobre la probable existencia de un anillo al rededor de Júpiter. - (Véase Memorias de la Real Academia de Ciencias de Barcelona, vol. VI, núm. 27.—Barcelona.

Comas Solá (D. José).—Estadistica Sismológica de 1907 en Barcelona.—(Observatorio Fabra).—Observaciones Sísmicas durante el año 1907. — (Veáse Memorias de la Real Academia de Ciencias de Barcelona, vol. VI, número 31.—Barcelona.

Congreso de los Diputados.—Actas de las Cortes de Castilla, publicadas por acuerdo del... —Tomo XXVIII.—Madrid, 1907.

Consejo Superior de Salubridad de San Salvador.—Boletín del... — Año VI, números 10 á 12.—Año VII, números 1 á 4.—San Salvador.

Cortejarena y Aldevó (D. Francisco de).—Centenario del fallecimiento del Doctor D. José Severo López, Médico de Cámara de S. M. el Rey Don Carlos IV.—1807-1907.—Biografia y otras noticias de su época, por su biznieto y heredero... —Comunicación leída á la Real Academia de Medicina en las sesiones literarias de los días 22 y 29 de Febrero y 7 de Marzo de 1908.—(An. de la Real Academia de Medicina.—Marzo, 1908).

Criado y Aguilar (D. Francisco) —Discurso leído ante la Universidad Central en la solemne inauguración del Curso académico de 1908 á 1909 por el Dr...—Madrid, 19.

La cultura popular.—Organo de las Juntas de extensión Universitaria de Barcelona y su distrito académico.—Año V números 45 á 48 y 51 á 54. Barcelona, 1908.

Dato Iradier (Excmo. Sr. D. Eduardo.) - Discurso leído por el..., Presidente de la Real Academia de Jurisprudencia y Legislación, en la sesión inaugural del curso de 1907-908.—Madrid, 1908.

Davaira y Pereira (Sr. D. César).— Discurso resumen del curso de 1906-1907, leído por el Secretario general de la Real Academia de Jurisprudencia y Legislación en la sesión celebrada el 21 de Enero de 1908.—Madrid, 1908.

Dirección general de Contribuciones, Impuestos y Rentas — Estadística administrativa de la Contribución Industrial y de Comercio.—Año de 1906. Madrid, 1908.

Dirección general de Aduanas.— Estadística general del Comercio exterior de España en 1906.—Partes 1.ª y 2.ª.—Madrid, 1907.

Dirección general de Aduanas.— Estadística general del Comercio de Cabotaje entre los Puertos de la Peninsula é Islas Baleares en 1906.—Madrid, 1908.

(Se continuará).

XIX. — Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia tercera.

SEÑORES:

Dijimos al empezar este curso, que nos proponíamos seguir el estudio de la Elasticidad, aplicando á este problema de la Física matemática el método de Mr. Poincaré.

Expusimos primero, el método de Cauchy.

En el curso siguiente, el de Lamé y sus análogos.

Y en éste, como tercera parte en la materia general que nos ocupa, anunciamos la exposición del método de aquel eminente matemático.

Y, sin embargo, llevamos ya tres conferencias y aun no hemos empezado dicha exposición.

No es, seguramente, que desistamos de nuestro programa, ni que en realidad estemos tan alejados de él como á primera vista parece.

El aparente retraso tiene varias razones.

El método del ilustre autor á que nos referimos, difiere notablemente de todos los métodos anteriores, por ejemplo, del de Cauchy y del de Lamé.

No sigue en absoluto los derroteros trilladísimos por todos los autores de la Física matemática clásica.

Marca cierta orientación, como ya veremos en su día, hacia la Física matemática moderna.

Y todo esto exigía de nuestra parte, una introducción ó estudio preparatorio, cierta enumeración, por superficial que sea, de los nuevos problemas que se vienen planteando, y un

análisis, aunque muy rápido, de las censuras que la crítica moderna formula contra la hipótesis mecánica, que fué la dominante en la pasada centuria.

En suma, era preciso justificar la innovación ó las innovaciones que Mr. Poincaré introduce ó introdujo en su teoría de la Elasticidad, para salvar las que él creyó objecciones de más fuerza contra los antiguos métodos.

Así, decíamos en la conferencia anterior, la Física matemática clásica parte de estos tres conceptos fundamentales: *la masa, la fuerza, el movimiento*, á los que tuvo más tarde que agregar el éter ó *la electricidad;* en suma, un nuevo flúido que represente las fuerzas repulsivas, como la materia ponderable representa las fuerzas de atracción.

Identificando la electricidad con el éter, podía aplicarse la hipótesis mecánica á casi todos los problemas de la Física, escribiendo en ecuaciones diferenciales las leyes de todos los fenómenos, como hemos indicado en la conferencia anterior.

Pero también decíamos, que la crítica y ciertas escuelas modernas, como la que pretende explicar todos los fenómenos por la *energía*, habían formulado graves objecciones contra los cuatro elementos antes indicados.

Y ya en la conferencia precedente empezamos á estudiar el concepto de *masa.*

La masa, que en cierto modo es un parámetro de la Física, factor común á toda clase de materia, según unos, y, según otros, la materia misma unificada y sometida á medida y á número, era en la Física clásica algo intangible y definitivo, aunque, á decir verdad, en sí encerraba cualidades hasta cierto punto opuestas.

La materia, en efecto, era activa en cuanto de ella nacía la fuerza atractiva newtoniana. La materia atrae á la materia, decía Newton; ó por lo menos las cosas pasan como si esta atracción fuese una realidad.

Es *activa,* decimos, y al mismo tiempo es *inerte*, y

para ponerse en movimiento consume cierta cantidad de fuerza.

O más claro: es activa para las demás masas, porque las atrae; y es pasiva, más que pasiva, *consumidora* de fuerza, si vale la palabra, porque, para adquirir cierta velocidad, necesita que sobre ella actúe determinada fuerza durante determinado tiempo.

Esto podrá ser extraño, hasta inexplicable para algunos autores, si nos lanzamos á las esferas metafísicas; pero, en el terreno de la experimentación, expresa hechos de cuya realidad no puede dudarse, sea cual fuere la explicación que para ellos se busque.

Mas para nuestro objeto, esta es una cuestión aparte.

Lo que nos importa consignar, es que hasta aquí había sido principio indiscutible, postulado de la Física y de la Química, el de la *conservación de la materia*, y, por lo tanto, el de la *conservación de la masa*, que es su medida y que expresa un número indisolublemente unido á cada porción determinada de materia.

Pues bien, ahora resulta, según experimentos de físicos habilísimos, que la masa puede variar. En cantidades muy pequeñas, ciertamente; pero superiores á los errores de observación. Y esto es lo que empezamos á discutir en nuestra última conferencia.

En ella presentamos un ejemplo puramente ideal y que no tenía más objeto que el de dar forma plástica á nuestra idea.

Y vimos, que si la masa ponderable estaba rodeada de una atmósfera etérea, y en el espacio ambiente existían ciertos sistemas elásticos, que pudieran actuar sobre la expresada atmósfera, de no conocer ó no tener en cuenta dichos sistemas, podrían deducirse números distintos como expresión de la masa, y aun distintos según la orientación del movimiento.

La masa era siempre la misma, pero la experiencia pura, la experiencia ideal, por decirlo de este modo, para la me-

dida de la expresada masa, podía alterarse en determinadas condiciones.

Dejábamos, pues, á salvo, la invariabilidad de la masa. Y á esto creo yo que habrá de llegarse en último resultado.

Pero el ejemplo *artificioso*, lo reconocemos desde luego, que hemos presentado, no expresa con exactitud las circunstancias del problema que vamos discutiendo.

Demos un paso más en nuestro análisis.

***

Los experimentos que dan variabilidad en la masa, no se refieren al ejemplo que hemos discutido, que es, en cierto modo, un ejemplo preparatorio para hacer más claras nuestras explicaciones.

La variabilidad en la determinación de la masa por el método experimental, no se presenta en las experiencias ordinarias, ni para velocidades relativamente pequeñas, comparadas con la velocidad de la luz.

Estas diferencias se presentan para velocidades muy grandes, sin llegar á la de la luz, como si esta velocidad fuera la causa que alterase la masa.

La velocidad, es pues, el factor importante que hemos de tener en cuenta.

Y debemos ahora repetir todo lo dicho, pero introduciendo en nuestro estudio este nuevo factor.

Mas para ello necesitamos entrar en algunas explicaciones.

Necesitamos anticipar ideas, que desarrollaremos cuando llegue la ocasión oportuna; pero de las que para hacer inteligible lo que sigue, diremos algo, aunque sea incompleto y sea prematuro.

***

En la Física moderna, cuando una masa eléctrica se mueve con gran velocidad, se admite que equivale á una corriente eléctrica.

Y esto no es una hipótesis, porque, aunque ha sido punto muy debatido, se acepta hoy por la mayor parte de los físicos que tienen confianza en las célebres experiencias de Rowland.

No todos prestan fe absoluta á dichas experiencias, que, como hemos dicho, dieron lugar á una viva discusión y á otras experiencias contradictorias con las primeras; mas, por el momento, admitamos esta ley, experimental ó hipotética, ó lo que fuere:

Una masa eléctrica, caminando con movimiento rápido, para que el efecto sea sensible, es decir, con velocidades que pueden ser muy inferiores, pero comparables con la de la luz, equivale á una corriente eléctrica para todos sus efectos y acciones.

En suma, si un elemento eléctrico e camina con una velocidad muy grande u, puede suponerse que equivale á una corriente eléctrica I; de modo que, representando para más generalidad por A un coeficiente numérico, puede escribirse

$$A\,e\,u = I.$$

Y podremos decir: la corriente eu, como pudiéramos decir: la corriente I.

Este es el primer punto que necesitábamos establecer para inteligencia de lo que sigue.

Pasemos á otro segundo punto, sobre el cual ya hemos disertado mucho en las conferencias de otros cursos.

Supongamos en el espacio una masa de materia ponderable m ó una cantidad de materia eléctrica e.

Se admitía antes que ambas eran capaces de ejercer acción á distancia; pero se admitía también, explícita ó implícitamente, si no existía más que una de estas dos masas, que el espacio que la rodeaba era el vacío absoluto, de suerte que

la acción que pudiera ejercer una ú otra era nula para cualquier punto de dicho espacio, exceptuando para aquellos puntos en que existiera materia ó existiera electricidad.

Fijemos bien las ideas y supongamos que existe una masa e, mejor dicho, una cantidad de electricidad e, en un punto A del espacio.

Alrededor de este punto A se formará un campo eléctrico, creado por el elemento eléctrico e; así, en un punto B, á la distancia r del primero, actuará una fuerza eléctrica

$$\alpha \frac{e}{r^2},$$

en que α es un coeficiente numérico; pero si el espacio está vacío, esta fuerza *no será una fuerza actual*, sino *una fuerza posible* por unidad de fuerza eléctrica.

Cuando en el punto B coloquemos una cantidad de electricidad 1, entonces sí actuará una fuerza efectiva:

$$\alpha \frac{e \times 1}{r^2} = \alpha \frac{e}{r^2}.$$

Pero si suprimimos la cantidad de electricidad 1, la acción será puramente abstracta, ó posible, ó analítica, pero no *real*.

Y esta era la hipótesis dominante, ya establecida explícitamente, ya implícitamente admitida.

La masa de un astro no ejercía acción ninguna sobre el vacío del espacio mientras no encontraba otro astro, es decir, otra masa: la fuerza que de él emanaba era potencial.

La carga de un conductor tampoco ejercía acción ninguna, ó por lo menos no se tenía en cuenta, sobre el espacio que le rodeaba mientras no encontraba otra carga eléctrica en la cual hacer presa, si se nos permite la palabra.

Los núcleos ponderables ó los núcleos eléctricos, eran los únicos, por regla general, que la teoría tenía en cuenta.

De nada servía el espacio, que se consideraba como inerte, sino para medir las distancias.

En las teorías modernas, todo esto ha cambiado por completo.

El espacio *no es inerte,* no es el vacío abstracto del matemático. El espacio está lleno de éter ó de electricidad, de una materia continua, ó de una substancia granular, por decirlo de este modo, ó es un conjunto de celdillas, algo parecido á lo que después se llamó un dieléctrico.

El espacio *toma parte en todos los fenómenos del Universo como elemento dinámico.*

Antes no era nada; ahora, en ciertos casos, lo es todo: él transmite la fuerza, él almacena la energía, él finge la inercia.

Y, si se me permite la comparación, diré que la teoría clásica es una teoría individualista, y la teoría moderna, tiene la importancia del moderno socialismo. Pero sigamos nuestro estudio.

***

Consideremos, como antes, en un punto *A* del espacio, una masa etérea *e*; al decir *masa,* no queremos decir masa ponderable, sino *cantidad de electricidad.* La palabra electricidad desvanece toda confusión que pudiera ocurrir.

Hemos dicho antes, que una masa eléctrica *e*, que se mueve en el espacio en línea recta con gran velocidad, se considera por casi todos los físicos como una corriente eléctrica; así resulta, según antes decíamos, ó de una hipótesis grandemente fecunda, ó de las experiencias de Rowland.

Pues bien, se supone que el movimiento de esta masa eléctrica perturba todo el espacio, lo altera estática ó dinámicamente, ó las dos cosas á la vez.

El espacio se opone, por decirlo de este modo, como un resorte, por sus fuerzas repulsivas, al movimiento de la masa

eléctrica *e*, y finge para dicha masa, cierta inercia, que se puede calcular según muchas teorías, y de donde resulta para el experimentador, la sensación de algo parecido á la inercia de la materia ponderable, llámese resistencia elástica, ó inducción, ó self-inducción, ó como se quiera.

Si á la masa eléctrica *e* va unida una masa ponderable *m*, resultará en los experimentos una masa experimental, llamémosla así, que se compondrá de dos partes: la de la inercia clásica y tradicional de la masa ponderable *m*, y la de la inercia fingida que resulta de las reacciones del medio ambiente sobre la masa eléctrica *e*.

Pero aunque la masa eléctrica caminase sola, fingiría y equivaldría á cierta masa ponderable: en suma, algo parecido á la inercia ordinaria.

Vamos á precisar todo esto con un ejemplo.

Ejemplo difícil de explicar, porque si quisiéramos darle el debido rigor, tendríamos que exponer varias de las teorías modernas, las cuales no tienen lugar en las conferencias de este año, pues las reservamos para otros cursos, ya que el objeto de éste es exponer la teoría de la Elasticidad, según Mr. Poincaré, la cual marca, como hemos dicho, una transición entre los métodos clásicos y los métodos modernos.

La teoría que vamos á exponer, no es rigorosa, ni casi es una teoría, es una imagen más ó menos plástica, de la cual vamos á servirnos provisionalmente.

Su fondo está tomado de una hipótesis de Maxwell, de unos modelos de Lodge, y, en suma, de la teoría giroscópica del éter; pero todo elemental y, además, artificioso, propio sólo para que se comprendan nuestras explicaciones, dándoles forma material, sin pretensiones de rigor ni de exactitud.

Sea *AB* (fig. 4.ª) una corriente eléctrica rectilínea.

La acción de esta corriente se supone, en la hipótesis provisional que aceptamos, que se va á transmitir á todo el espacio que la rodea, hasta el infinito.

Para estudiar esta acción, consideremos un plano pasando

por dicha corriente AB, plano que suponemos que es el de la figura.

Estudiada la perturbación del éter en dicho plano, para obtener la perturbación en todo el espacio, no tendremos más que hacer girar este plano alrededor de AB, y por razón de simetría, la perturbación en el plano meridiano que consideramos, se reproducirá en todo el espacio ambiente; por ejemplo el punto C marcará una perturbación idéntica á la suya en una circunferencia CC', cuyo plano sea perpen-

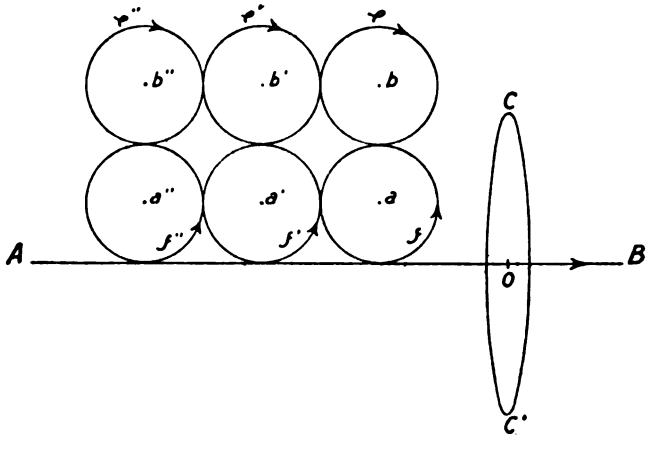


Figura 4.ª

dicular á la corriente á AB y cuyo centro O esté determinado por la intersección del plano con la recta.

Para determinar, pues, la perturbación en todo el espacio, nos basta estudiar la perturbación del plano meridiano que coincide con el del dibujo.

Se supone, y ésta es otra hipótesis más, que la corriente AB determina en el éter una serie de torbellinos a, a', a''....., en los cuales la rotación está marcada por las flechas f, f', f''.....

Es un efecto mecánico idéntico al que se produciría si AB fuese una barra dentada ó cremallera, que engranase con una serie de ruedas dentadas también a, a', a''.....

O como si la corriente eléctrica *A B* fuese una corriente de aire ó de agua chocando con una serie de ruedas de paletas *a, a', a''*.....

Como no tratamos de establecer una teoría, sino de presentar una figura esquemática, que dé forma á una hipótesis, no penetraremos más en este punto del problema.

Si admitimos que el éter está ó puede considerarse dividido en espacios en los que logren establecerse estos torbellinos, es claro que la fila de torbellinos de éter *a, a', a''*..... transmitirá su movimiento á otra fila superior *b, b', b''*....., que podemos suponer también consistente en una serie de ruedas dentadas.

Lo malo en esta hipótesis, que en el fondo está copiada de la de Maxwell, es que las rotaciones de los torbellinos *b, b', b''*....., marcados por las flechas φ, φ', φ''....., serán en sentido contrario de las de la primera fila de ruedecillas ó torbellinos *a, a', a''*.....; y como esto *no conviene* para los resultados que se desean obtener al aplicar la hipótesis de que se trata, sino que, por el contrario, es preciso que todos los torbellinos del éter giren en el mismo sentido, ha habido que acudir á otro artificio ó á otra hipótesis, ó, si se quiere, á otro sistema suplementario de torbellinos ó ruedecillas.

Todo esto es bien artificioso y bien arbitrario, pero los resultados no dejan de ser concordantes y de dar, en cierto modo, forma plástica á los fenómenos electro-magnéticos, tal como los observa al experimentador.

Imaginemos (fig. 5.ª), aumentando las dimensiones de la figura 4.ª, la corriente eléctrica *A B* y dos torbellinos *a, a'* girando en el sentido de las flechas *f, f'*.

Consideremos los dos torbellinos superiores *b, b'*, y en el espacio *c* que queda entre los cuatro, y bajo la acción de los torbellinos *a, a'*, supongamos que se establece un pequeño torbellino *c*. El sentido del giro será el que marca la flecha f_1, como si *a* y *a'* fueran dos ruedas dentadas y *c* un piñón.

El giro del piñón *c* es evidentemente, como hemos dicho,

el que marca la flecha f_1, y los dos torbellinos a, a' tienden á darle de una manera concordante este movimiento de giro.

Admitimos que dicho piñón c, ó pequeño torbellino, es el que transmite el movimiento de rotación á los torbellinos b, b', que en este caso, según marcan las flechas φ, φ', será el mismo que para los torbellinos de la fila inferior aa'.

De esta manera, pasando de la segunda fila á la tercera, y así sucesivamente, gracias á los torbellinos auxiliares c....., el éter, en todo el plano meridiano que estamos consideran-

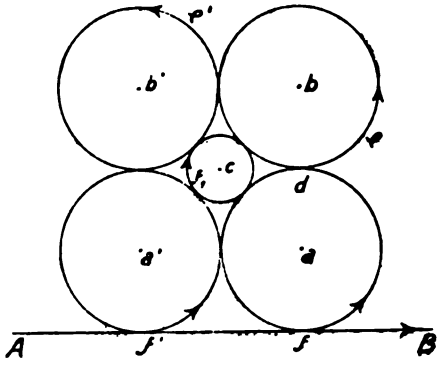


Figura 5.ª

do, se habrá convertido en una serie indefinida en todos sentidos de torbellinos a, a'....., b, b'....., girando todos en el mismo sentido, que es el que determina la corriente AB.

Ocurre, sin embargo, entre otras muchas dudas, esta que es la siguiente: un punto d (fig. 5), entre los torbellinos a, b, está solicitado por dos tendencias distintas.

El torbellino a tiende á llevarle, según marca la flecha f, de derecha á izquierda. El torbellino b, según marca la flecha φ, de izquierda á derecha.

¿A cuál de estos dos movimientos obedecerá?

Si las ruedas a, b fuesen rígidas y el esfuerzo igual, á ninguno de los dos, y el sistema se estancaría.

Pero como se trata del éter, que es *más cómodo para estas*

hipótesis, porque al fin y al cabo es un flúido, puede suponerse que en estos espacios críticos y en una faja estrecha, según marca la figura 6.ª, se establecen pequeños

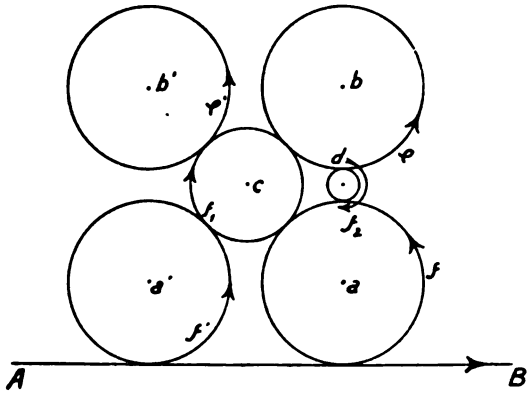


Figura 6.ª

torbellinos *d* por las acciones contrarias, superior é inferior.

En la figura 6.ª todo es concordante.

Los torbellinos *a*, *a'* comunican, según indican las flechas *f*, *f'*, un movimiento de rotación, marcado por las flechas f_1, f_2, á los pequeños torbellinos *c*, *d*.....

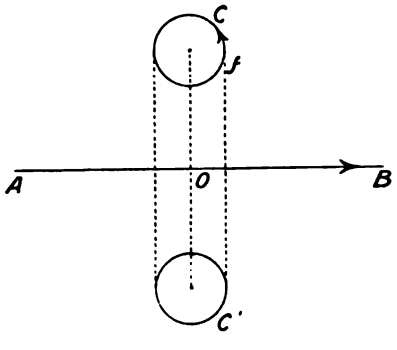


Figura 7.ª

Estos, á su vez, comunican á los torbellinos *b*, *b'*..... rotaciones marcadas por las flechas φ, φ'....., que van en el mismo sentido que las flechas *f*, *f'*.

En suma, considerando como acción principal la de los grandes torbellinos *a*, *a'*....., *b*, *b'*..... podemos decir que, en el plano meridiano que se considera, el efecto de la corriente *AB* (fig. 7.ª) sobre un punto cualquiera *C*, es el de producir un torbellino de éter alrededor de *C*, cuyo sentido marca la flecha *f*.

Si hacemos girar la figura alrededor de AB, el punto C trazará una circunferencia proyectada en CC', cuyo centro será el punto O, intersección del plano del círculo con la corriente AB.

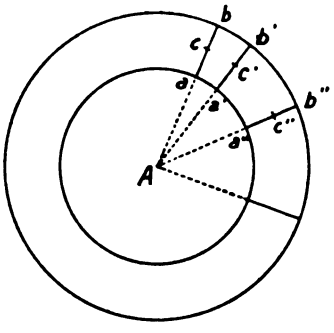


Figura 8.ª

Al mismo tiempo la circunferencia C del torbellino engendrará la figura que en Geometría se designa con el nombre *toro*, que vendrá á ser una especie de torbellino anular alrededor de la circunferencia media CC', y que está proyectado en un plano perpendicular á la corriente en la figura 8.ª

En dicha figura 8.ª el punto A es la proyección de la corriente AB de la figura 7.ª; ab es la proyección del torbellino C, y así sucesivamente para los planos AC', AC''.....

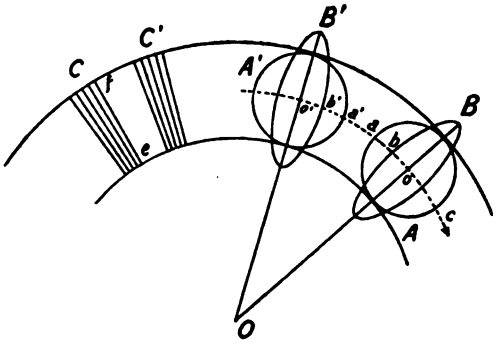


Figura 8.ª bis.

Tenemos, pues, representado el efecto de la corriente AB en un punto cualquiera del espacio.

El anillo $CC'C''$ vemos que representa algo así como un solenoide anular formado por corrientes circulares ab, $a'b'$, $a''b''$ (fig. 8.ª), si sustituimos á los torbellinos dichas corrientes circulares.

Pero también puede hacerse otra hipótesis que en el fondo es la de Maxwell.

Consideremos en dicho anillo una distribución discontinua de esferas elásticas, etéreas *A*, *A'*... figura 8.ª bis.

Y admitamos que estas esferas giran, alrededor de la recta *oc*, la esfera *o;* y alrededor de rectas análogas las demás esferas.

Dichas rectas *oc* serán tangentes á la circunferencia media del anillo cuyo radio será *Oo*.

Lo que digamos de una de estas esferas *o* podríamos decir de las restantes.

Admitiremos por analogía con lo que sucede en los flúidos ponderables, y no deja de ser esto una hipótesis atrevidísima, que analizaremos más adelante, quizás en otro curso, que, por el giro alrededor del eje *oc*, la esfera *A* se convierte en un elipsoide de revolución *B*, cuyo eje será siempre la recta *oc;* elipsoide decimos, aplanado por los polos y ensanchado por el ecuador.

Repitiendo esto mismo para la esfera contigua *A'*, obtendremos otro elipsoide de revolución *B'*.

Los polos *a*, *a'* de las esferas se habrán trasladado á *b*, *b'*, de suerte que la recta *aa'* se habrá estirado hasta convertirse en *bb'*.

Así, en resumen, las esferas de cada anillo determinan, al convertirse en elipsoides, una presión hacia el exterior y un estiramiento en el interior del anillo.

Por otra parte, continuando la analogía hipotética por ahora y que en todo caso necesitaría comprobación, supondremos que el torbellino, como si fuera una masa ponderable, representa una fuerza viva proporcional al cuadrado de la velocidad angular, ó sea al cuadrado de la velocidad de la corriente, según luego precisaremos.

***

A este mismo resultado llegaríamos en la imagen anterior, en que hemos asemejado el anillo á un selenoide, porque el equilibrio de cada corriente es inestable, puesto que á poco que varíe de posición, la atracción que ejerce la corriente inmediata de un lado crece y la del lado opuesto disminuye, por manera que las corrientes tienden á agruparse en C, C', y cada uno de estos grupos está compuesto de corrientes paralelas fg todas iguales.

Los grupos C, C' substituyen en cierto modo á las esferas AA', y como las corrientes son iguales y paralelas, el trabajo que habrá sido necesario efectuar para aproximarlas será, como antes, proporcional al cuadrado de una de estas corrientes.

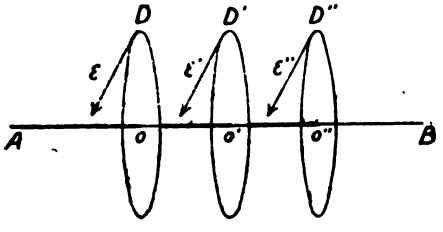


Figura 9.ª

En ambas hipótesis venimos á parar al mismo resultado; pero no se olvide que todo esto es provisional, más bien intuitivo que demostrativo, y que más adelante hemos de sustituir á estos ensayos, teorías, no diremos perfectas, pero sí menos imperfectas y menos recargadas de hipótesis secundarias.

En suma, la corriente general ha creado una deformación en el éter, que consiste en movimientos giratorios de una serie de torbellinos ó corrientes, y un trabajo de extensión, almacenados, por decirlo de esta manera, en anillos alrededor de dicha corriente como eje polar.

Insistamos, para concluir este punto, en algo que ya apuntamos anteriormente.

Sólo consideramos hasta aquí, porque es lo único que por el pronto nos interesa, el trabajo ó la energía electromagnética almacenado en el éter por el paso de la corriente AB (figura 9.ª), y prescindimos del trabajo puramente eléctrico, ó mejor dijéramos electroestático.

Y esta observación es tanto más importante cuanto en muchas teorías sólo se define el éter por dos vectores, uno electrodinámico ó electromagnético, otro puramente eléctrico.

Pero no anticipemos las ideas ni nos separemos, aún más de lo que nos venimos separando, del asunto principal, ni del programa del presente curso.

Para más claridad, representemos todo esto en la figura 9.ª

AB es la corriente que consideramos.

D, *D'*, *D''*..... circunferencias cuyos planos serán perpendiculares á *AB*.

o, *o'*, *o''*, los centros de dichas circunferencias.

Y por último, $D\varepsilon$, $D\varepsilon'$, $D\varepsilon''$..... representarán tensiones á lo largo de dichas circunferencias, que son las que almacenan, por decirlo de este modo, cierta cantidad de energía en el éter que rodea á la corriente *AB*.

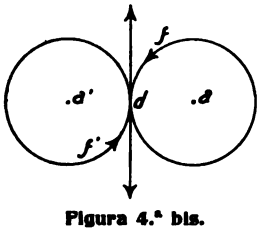


Figura 4.ª bis.

Si la corriente es indefinida é igual á sí misma, en todas las secciones perpendiculares á *AB*, los efectos sobre el éter serán idénticos: por un movimiento de traslación paralelo á *AB* coincidirán unas deformaciones con otras.

***

Algo nos falta todavía para completar la hipótesis.

Si los círculos *a*, *a'*, *a''* (fig. 4.ª) fueran tangentes y los representásemos por ruedas de engranaje rígidas, el movimiento sería imposible.

En efecto; el punto *d* de contacto, (fig. 4 bis), por la acción de la rueda *a*, que gira en el sentido de la flecha *f*, tendería á bajar, y en cambio, por la acción de la rueda *a'*, según marca la flecha *f'*, tendería á subir.

Con ruedas dentadas, esto sería imposible, como acabamos de afirmar, á igualdad de esfuerzos de ambas ruedas.

Con rodillos rígidos, habría un resbalamiento.

Con flúidos, parece que en dicho punto *d*, bajo las dos tendencias opuestas, se formaría un torbellino intermedio, según indica la figura 10.

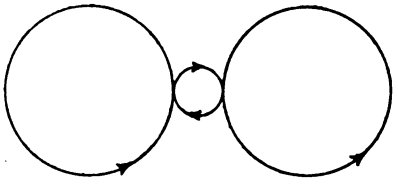


Figura 10.

De manera que la forma esquemática completa, ó casi completa, dentro de la hipótesis á que vamos dando forma, sería la de la figura 10, en la que todos los movimientos son ya compatibles y armónicos.

En la figura 11 hemos representado una distribución más ó menos arbitraria, á caso intuitiva, ó las dos cosas al mismo

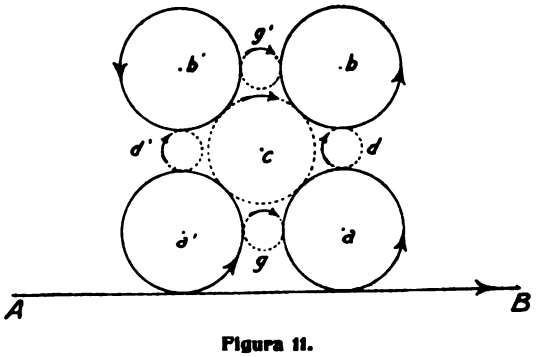


Figura 11.

tiempo, de los grandes y de los pequeños torbellinos, según pudiera resultar de la hipótesis de Maxwell y de otros autores.

a, *a'* representa la primera fila de torbellinos.

b, *b'* la fila superior.

Y *d*, *d'*, *g*, *g'*, *c* los torbellinos intermedios, que tampoco podrían estar en contacto, sin deslizamientos ó sin engendrar otros torbellinos intermedios.

Todo esto, bien comprendemos que es arbitrario, caprichoso y aun de poco rigor bajo el punto de vista cinemático.

Pero nuestro objeto sólo es el de presentar *un ejemplo*, que si se admite tal como lo hemos descrito, ó con alguna otra modificación de detalle, explica bastante bien la mayor parte de los fenómenos de la Electro-dinámica, al menos en su sentido general; aunque, á decir lo cierto, para el cálculo numérico ó para establecer fórmulas matemáticas, aun serían necesarias nuevas hipótesis.

Se pueden explicar de este modo ó por hipótesis análogas:

1.° La resistencia que encuentra una corriente para establecerse, que no es otra que la necesidad de *transmitir su energía* á todo el éter ambiente almacenándola en él; resistencia que aparentemente pudiera tomar la forma de una contra-corriente ó de una self-inducción.

2.° La prolongación de la corriente al cesar las fuerzas electro motrices de la corriente principal, que es devolver á la electricidad del conductor la energía acumulada en el éter ambiente.

3.° La inducción en otro conductor cualquiera.

La inducción y la self-inducción, fingen, en cierto modo, una inercia del éter.

En los modelos materiales, las inercias de las ruedecillas, como verdaderos volantes, representan en cierto modo esta inercia eléctrica.

4.° Y por último, admitiendo todo lo que hemos establecido, siquiera sea provisionalmente y como un bosquejo, se explica bastante bien la célebre fórmula de Ampére para la acción de dos elementos de corriente.

Siquiera como curiosidad, indicaremos la demostración que inmediatamente ocurre.

Después de todo, la hipótesis es bien sencilla: toda corriente determina en el éter que la rodea una serie de torbellinos, que todos giran en el mismo sentido, á saber: el que

determina la corriente en la primera fila de los mismos y en filas sucesivas.

En rigor estos torbellinos son *anulares*; mejor dicho, se forman anillos alrededor de la corriente y *cada anillo* está formado de torbellinos circulares en sus diferentes secciones meridianas.

Suponiendo ésto, pasemos á la demostración del teorema.

Sean A y B (fig. 12) dos elementos de corriente de longitud 1, paralelos y en el mismo sentido, y con una perpendicular común aa' en su centro.

La corriente A determina en el campo eléctrico una serie de torbellinos a en el sentido que marca la flecha f.

El elemento B determina asimismo otra serie de torbellinos b, b', que giran según marca la flecha f'.

Al llegar al elemento B los torbellinos formados por el elemento A, se superpondrán en cierto modo á los que forma el elemento B.

Hemos representado por línea continua los torbellinos de este último, y por líneas de puntos los torbellinos procedentes de A. Es claro que estos, a' y a'' irán en el mismo sentido que a.

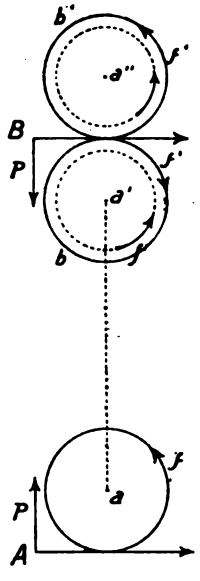


Figura 12.

En la parte inferior del elemento B, los torbellinos b y a', van en sentido contrario, por lo tanto *tenderán á destruirse.*

En la parte superior van en el mismo sentido, de suerte que *se sumarán,* y como los torbellinos resultantes ejercerán cierta presión sobre el elemento B, resultará una fuerza P de atracción hacia el elemento A.

Lo mismo pudiéramos decir respecto á la acción que el elemento B produce sobre el A.

Y no sólo se comprueba así la atracción de dos elementos

paralelos, tales como A, B, sino que con *un poco de buena voluntad* se puede llegar á la misma fórmula de Ampére.

Porque en efecto, los torbellinos que engendra el elemento A, irán disminuyendo en intensidad, y podemos admitir que varían en razón inversa de los cuadrados de la distancia de A á B, que llamaremos r, puesto que aquí la acción se extiende esféricamente.

De modo, que llamando I_a la intensidad de la corriente A, no será temerario admitir que la velocidad en el torbellino a es MI_a, y á la distancia r, es decir para a',

$$\frac{MI_a}{r^2},$$

siendo M una constante.

Si llamamos I_b la intensidad del torbellino inmediato á B, la del torbellino resultante inferior será:

$$MI_b - \frac{MI_a}{r^2} = M\left(I_b - \frac{I_a}{r^2}\right).$$

Por el contrario, la velocidad del torbellino de la parte superior, que es la suma, como antes decíamos, de los dos torbellinos, será, dando á r el incremento dr al pasar de a' á a'',

$$M\left(I_b + \frac{I_a}{(r+dr)^2}\right).$$

En todas estas fórmulas suponemos que la constante M es la misma, admitiendo que el éter es homogéneo.

Si un átomo de éter gira en un círculo, con una velocidad v, puede suponerse, al menos provisionalmente y por comparacion con las masas ponderables (aunque este es otro problema), que el esfuerzo radial es proporcional al cuadrado de la velocidad, dado que todos los torbellinos ó corrientes tengan el mismo radio.

De modo que la presión de la suma de los dos torbellinos a'', b' será, haciendo $AB = r$, y representando por K una constante:

$$KM^2\left(I_b + \frac{I_a}{(r+dr)^2}\right)^2$$

y la presión de abajo á arriba, procedente de la diferencia de los dos torbellinos a', b,

$$KM^2\left(I_b - \frac{I_a}{r^2}\right)^2$$

La diferencia de ambas presiones, en que evidentemente la exterior es mayor que la interior, ó sea P, tendrá por valor:

$$KM^2\left(I_b + \frac{I_a}{(r+dr)^2}\right)^2 - K\,M^2\left(I_b - \frac{I_a}{r^2}\right)^2$$

ó bien

$$KM^2\left[I^2{}_b + 2I_a I_b \frac{1}{(r+dr)^2} + \frac{I^2{}_a}{(r+dr)^4}\right] -$$

$$-KM^2\left[I^2{}_b - 2I_a I_b \frac{1}{r^2} + \frac{I^2{}_a}{r^4}\right];$$

ó bien, despreciando los términos en que entra r^4 en el denominador, dado que el valor de r sea tal que dicha simplificación pueda considerarse como legítima, tendremos

$$P = KM^2.2\,I_a I_b\left(\frac{1}{(r+dr)^2} + \frac{1}{r^2}\right),$$

ó bien

$$P = KM^2.2\,I_a I_b\ \frac{2r^2 + 2\,rdr + dr^2}{r^2(r^2 + dr^2)},$$

y, representado por L una constante y no tomando más que el término en $\frac{1}{r^2}$

$$P = L\, I_a\, I_b \frac{1}{r^2}.$$

Esta fórmula se refiere á dos elementos de corriente, cuya longitud hemos supuesto que es igual á la unidad, á una unidad muy pequeña, por de contado, en comparación con la distancia r.

Si los elementos tuvieran las longitudes respectivas ds_a, ds_b, se ve inmediatamente que la fórmula sería

$$P = L\, \frac{ds_a\, I_a \cdot ds_b\, I_b}{r^2}$$

que es precisamente la fórmula de Ampére para el caso que consideramos.

Y aun podríamos precisar más por medio de nuevas hipótesis el valor de la constante L.

Esta demostración tiene puntos de contacto con aquella otra de la cual dimos una idea en el primer año de nuestra asignatura.

Sin embargo, ambas demostraciones obedecen á criterios completamente distintos, y el de la última es un criterio mucho más moderno.

Será en gran parte arbitraria, poco rigurosa, recargada de hipótesis, pero acaso pueda considerarse como uno de tantos ensayos y tanteos necesarios para establecer teorías más perfectas, que en este caso será la teoría giroscópica del éter, que estudiaremos detenidamente en uno de los cursos próximos.

Hemos querido presentar tan sólo un ejemplo que señale nuevas orientaciones, siquiera sea dicho ejemplo de carácter embrionario, si es que se nos permite la palabra.

Y ahora debemos volver á nuestro objeto principal, que no lo olvidemos, es este: *inercia aparente de la electricidad.*

***

Si en vez de una corriente eléctrica se trata de una masa eléctrica e, caminando con la velocidad u, la deformación elástica del éter que rodea á dicha masa será análoga á la que hemos establecido para cualquier corriente eléctrica; pero necesitamos acudir á nuevas hipótesis.

Supongamos que el punto a, de masa eléctrica e, recorre con la velocidad $u = ab$ la línea AB (fig. 13).

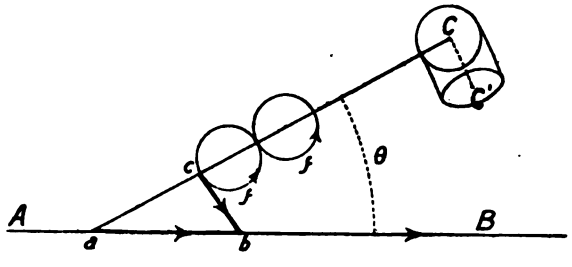


Figura 13.

Descomponemos la velocidad u en las dos componentes ac y cb.

Prescindimos del efecto de la componente ac, que es, por decirlo así, radial, y no estudiamos más que el efecto de la componente cb.

Y vamos á considerar tan solo la deformación del éter en un plano meridiano:

La componente cb (fig. 13), perpendicular al radio ac, será, en cierto modo, como la corriente $A\ B$ de la figura 4.ª; y si queremos estudiar el efecto sobre el punto C del éter en el plano meridiano de la figura, supondremos, como hacíamos antes, que cb engendra torbellinos, cuyas rotaciones están marcadas por la flecha f.

En el punto C tendremos un torbellino C, cuya velocidad

será menor que la del torbellino c, en razón á la distancia cC, que es próximamente igual á r, y á lo largo de la cual va disminuyendo.

Y como podemos *suponer* que la acción del torbellino decrece en razón inversa del cuadrado de las distancias, puesto que dicha acción tiene que distribuirse en esferas cuyas superficies crecen proporcionalmente á r^2, podremos admitir, por una primera intuición, que la velocidad del torbellino C (en su periferia, si lo reducimos á una circunferencia) viene dada por la siguiente fórmula:

$$M \frac{\text{velocidad} \,.\, cb}{r^2} = M \frac{u \operatorname{sen} \theta}{r^2},$$

en la cual hemos supuesto que la masa eléctrica e está contenida en la constante M.

Esta constante es siempre la que hay que aplicar á la corriente AB para convertirla en la corriente del torbellino ó para obtener ésta.

Si por la corriente AB hacemos pasar otro plano meridiano, que forme con el primero un ángulo infinitamente pequeño, $d\varphi$, obtendremos otro torbellino C', y entre C y C' quedará un espacio análogo al de la figura 8.ª, $ab\,b'a'$.

En este espacio, y sometiéndolo á tensión, las dos corrientes C y C', ó las dos esferas de la figura 8 bis como antes explicábamos, puede suponerse que ejercen un trabajo que es el que se almacena en dicha porción del anillo.

Como ambas corrientes son próximamente iguales, el trabajo ó la energía almacenada será proporcional al cuadrado de dicha corriente ó á la fuerza viva de las eferas giratorias, y, por lo tanto, de la forma

$$M' \left[M \frac{u \operatorname{sen} \theta}{r^2} \right]^2,$$

ó representando N una nueva constante:

Energía del elemento de éter comprendido entre C y C'=

$$= N \frac{u^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^4}.$$

Dividamos el éter en volúmenes infinitamente pequeños, pero que comprendan un gran número de volúmenes como el $C\,C'$.

Admitamos, además, que en estos volúmenes elementales del éter, la energía es constante, es decir, que es constante la expresión

$$N \frac{u^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^4}.$$

En este caso, la energía que en cada volumen elemental del éter será evidentemente:

Energía en cada volumen de éter $= N \frac{u^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^4} \times$ volumen elemental del éter; ó representando por U dicho volumen

$$N \frac{u^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^4} U.$$

Para calcular U dividiremos el espacio: 1.°, por planos meridianos que pasen por la corriente AB; 2.°, por conos que tengan por eje la misma línea AB, y 3.°, por esferas concéntricas, cuyo centro esté en a.

Dicho volumen elemental está representado en la figura 14, en que cada punto C del éter está definido por las tres coordenadas: θ, φ, r.

θ representa el ángulo que forma aC con la corriente AB, ó sea la distancia polar CDP.

φ el ángulo de un meridiano cualquiera con el plano de la figura.

Y r la distancia de a á cualquier punto del éter.

El sólido elemental del éter, que llamábamos U, estará formado por dos planos meridianos apC y apE; por dos conos de revolución aCE, aDE' y por dos esferas cuyos radios serán aC y aF.

Puede considerarse como un paralelepípedo cuyas tres aristas tendrán por longitud CE, que es un elemento del pa-

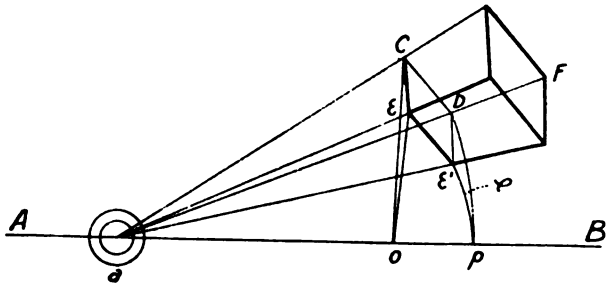


Figura 14.

ralelo que pasa por C y cuyo plano es perpendicular á la corriente aB.

CD que es un elemento de la distancia polar Cp.

Y DF que es dr.

CE, si representamos por O el centro del paralelo que pasa por C, tendrá por valor

$$CE = d\varphi \times OC,$$

y como

$$OC = aC \,.\, \text{sen}\,\theta = r\,\text{sen}\,\theta,$$

tendremos

$$CE = r\,\text{sen}\,\theta\, d\varphi,$$

Además, evidentemente

$$CD = r d\theta.$$

Y, por último,

$$DF = dr.$$

De modo que

$$U = r \operatorname{sen} \theta d\varphi \,.\, r d\theta \,.\, dr$$

ó

$$U = r^2 \operatorname{sen} \theta d\varphi \,.\, d\theta \,.\, dr.$$

Sustituyendo este valor en el de la energía acumulada en el elemento que consideramos tendremos:

Energía concentrada en

$$U = \int\int\int N \frac{u^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^4} r^2 \operatorname{sen} \theta d\varphi d\theta dr.$$

Los límites de la integración serán evidentemente: para θ los valores 0 y π; para φ serán, á su vez, 0 y 2π; y para r desde a al ∞.

Este límite a se justifica porque, en vez de considerar la masa eléctrica condensada en una esfera, suponemos que se extiende en una capa de igual espesor sobre la esfera del radio a, y suponemos esto por dos razones. En primer lugar, para considerar el caso en que la capa esférica tuviera un núcleo ponderable, aunque por el pronto prescindimos de él; y en segundo lugar, para que la integral no tenga un elemento aparentemente infinito, caso que exigiría una discusión especial y que no merece la pena de que en ella nos detengamos, pues, como hemos repetido varias veces, no pretendemos establecer una teoría, sino presentar un ejemplo, que en cierto modo, concrete la cuestión y marque los nuevos horizontes en que se desarrolla la Física moderna.

La integral anterior será, pues: Energía acumulada en el espacio

$$= Nu^2 \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \operatorname{sen}^2\theta \,.\, \operatorname{sen}\theta d\theta,$$

ó bien

$$\text{Energía} = Nu^2 \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (\cos^2\theta - 1)\, d\cos\theta.$$

La última integral da

$$\int_0^\pi (\cos^2\theta - 1)\, d\cos\theta = \left(\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right)_0^\pi = \frac{4}{3},$$

y

$$\text{Energía} = Nu^2 . \frac{1}{a} \times 2\pi \frac{4}{3} = \frac{N.8\pi}{3a} u^2$$

ó representando por m la constante $\frac{8\pi N}{3a}$,

$$\text{Energía} = mu^2,$$

en que

$$m = \frac{8\pi N}{3a}.$$

De aquí resulta esta consecuencia, que es la única que nos interesa por el momento: que la energía que la masa eléctrica e sola, sin el auxilio de ninguna masa ponderable, caminando con la velocidad u acumula y condensa en el infinito espacio de éter que la rodea, tiene la forma de la fuerza viva de una masa ponderable m.

En la conferencia próxima deduciremos de este resultado algunas consecuencias importantes.

XX. — Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia cuarta.

SEÑORES:

En la última conferencia estudiábamos, de una manera elemental, el movimiento de cualquier masa eléctrica *e* en el seno de un espacio lleno de éter y susceptible de recibir la acción de dicha masa eléctrica.

No era la que expusimos una teoría nueva, ni siquiera una de las teorías modernas; era un ejemplo, una especie de símbolo, un conjunto de hipótesis tomadas de acá y de allá, sin rigor y sin precisión; era en cierto modo el esquema de uno de tantos mecanismos materiales, á que tan aficionada es la escuela inglesa, idealizado en cierto modo y á propósito para dar forma plástica á nuestro pensamiento.

Sobre esta cuestión hemos de volver más adelante en alguno de los cursos inmediatos.

De todas maneras, en este ejemplo, llegábamos al siguiente resultado: que la masa eléctrica, al moverse en el seno del éter, engendraba cierta deformación en todo él, deformación que se reprensentaba materialmente por infinitos anillos circuiares, siendo sus planos perpendiculares á la línea del movimiento, y hallándose sus centros en dicha línea.

Para abreviar la explicación, podemos llamar á estas circunferencias *paralelos del sistema.*

Todos estos paralelos estaban sujetos á extensión, y eran como ejes curvilíneos de corrientes ó torbellinos: el conjun-

to de estos anillos formaban un campo electrodinámico ó electromagnético de revolución alrededor de la línea del movimiento como eje.

La extensión en los diferentes anillos resultaba distinta, y dependía de dos variables, r y θ; de suerte que no era, como en el caso de una verdadera eorrienre eléctrica indefinida, un campo cilíndrico que coincidiese consigo mismo en una traslación paralela á la línea de la corriente.

Cuando no se trata de una corriente continua, sino de una masa e, que camina con una velocidad u, el campo no es evidentemente cilíndrico, sino únicamente de revolución, y se va transportando, á medida que la masa e camina, con ella misma.

Agreguemos á lo dicho que el problema en toda su generalidad, y aun tratado en esta forma elemental, es más complicado de lo que hemos expuesto, porque nada hemos dicho del *campo eléctrico*.

Sólo hemos tomado del problema lo que nos interesaba para nuestro objeto y para llegar á esta conclusión: que una masa eléctrica e en movimiento altera el campo que la rodea, acumula en él cierta energía, como en un resorte, y como el resorte se opone al movimiento de dicha masa; así, á juzgar por las apariencias, digérase que está dotada de cierta inercia: finge, en suma, una inercia que no tiene, y una masa que no tiene tampoco.

Más claro: si una fuerza F, actuando sobre la masa eléctrica e ha desarrollado un trabajo que representaremos por T, este trabajo, acumulado en el medio ambiente, tendrá un valor, que designaremos por $\frac{1}{2} Mu^2$, siendo M una constante que dependerá de la naturaleza del medio ambiente, de la masa eléctrica e, del radio a de la esfera sobre la cual se extiende dicha capa e, y de otra constante fundamental de la física, la velocidad de la luz.

Mas esta expresión de M no tratamos de determinarla por

ahora; nos basta, como primera aproximación, haber obtenido para la energía acumulada el valor, $\frac{1}{2} Mu^2$ en que aparece en evidencia el cuadrado de la velocidad del movimiento.

Si aceptamos el principio de la conservación de la energía, podremos admitir, siquiera como hipótesis, que el trabajo empleado T en producir los efectos que describimos y el trabajo acumulado en el resorte eléctrico, á saber: $\frac{1}{2} Mu^2$, son iguales, de modo que podremos escribir:

$$T = \frac{1}{2} Mu^2.$$

Porque, en efecto, el trabajo T no puede haberse empleamás que en dos cosas: en deformar el medio etéreo como se deforma un resorte, es decir, en estirar todos aquellos anillos formados por los torbellinos que describíamos, y en comunicar la velocidad u á la masa e. Pero si la electricidad no tiene masa como la tiene la materia ponderable, quiero decir, si no está dotada de inercia, podremos admitir que esta última expresión es nula.

Todas estas son hipótesis del momento, hipótesis que discutiremos más adelante al explicar las teorías de los diferentes autores.

Sea como fuere, la ecuación anterior es enteramente análoga á la de una masa ponderable m que, habiendo recibido un trabajo T, hubiese adquirido la velocidad u.

De modo que la ecuación precedente tiene la misma forma que esta otra

$$T = \frac{1}{2} mu^2$$

y M resulta igual á m: en resumen, el trabajo condensado

en el medio ambiente, finge una masa M equivalente á una masa ponderable m.

Pero lo decíamos ya en la anterior conferencia: ambos casos son completamente distintos.

En el caso de la masa ponderable m, el trabajo T, gracias á la inercia, *está acumulado en dicha masa ponderable* en forma de fuerza viva $\frac{1}{2} mu^2$.

Esta fuerza viva es suya por decirlo así, es de la masa m, es en cierto modo *individual*, y aunque el móvil caminase por el vacío, con el móvil iría.

Cuando se trata, por el contrario, de una masa eléctrica e, el trabajo T no está en e, *sino en el medio ambiente;* no es propio, individual, de e y solo de e; no es, en rigor, una fuerza viva, es una fuerza de resorte acumulada, si las hipótesis que hicimos fueran valederas, en los paralelos ó anillos del sistema electromagnético bajo forma cinética, de corriente ó torbellino; y conste que prescindimos, como indicamos antes, del *campo eléctrico*.

En conclusión, y resumo una vez más, corriendo el peligro de pesadez y amaneramiento; pero en estas materias, y para la enseñanza elemental, lo que importa es la claridad; que al menos se entienda lo que se dice, prescindiendo de que en el fondo lo que se diga sea ó no exacto, que esto ya se verá después.

***

Hemos establecido que una masa e de éter, caminando en línea recta con la velocidad u, aparenta una masa M, con la inercia correspondiente, de suerte que representa un trabajo acumulado, ó sea una fuerza viva $\frac{1}{2} Mu^2$; pero esto es su-

poniendo que no exista más que el éter, que sólo el éter constituya el medio ambiente.

Dícho valor, no sólo debe considerarse como una primera aproximación ó como el avance de un ensayo de teoría, sino que aun dentro de las hipótesis establecidas es una expresión incompleta y provisional. Y esto por tres razones:

1.ª Porque no hemos tenido en cuenta más que el campo que pudiéramos llamar magnético, y hemos prescindido del campo eléctrico. En efecto, toda masa eléctrica e engendra á su alrededor un campo eléctrico que supone deformaciones en el éter.

2.ª Porque si hubiéramos establecido, como estableceremos en otra ocasión, una teoría menos imperfecta del trabajo acumulado en el medio ambiente, no hubiera sido este proporcional á u^2.

Por ejemplo; en la teoría de Lorentz, en vez del factor u^2, hubiéramos obtenido esta expresión más complicada

$$\frac{V - \sqrt{V^2 - u^2}}{\sqrt{V^2 - u^2}}$$

en la que V representa la velocidad de la luz.

Ya demostraremos esta fórmula cuando estudiemos las teorías modernas de la electricidad; por ahora démosla por demostrada.

Pues bien; dicha fórmula se reduce á u^2, cuando la velocidad u, de la masa eléctrica e, es muy pequeña en comparación de V.

En efecto, la fórmula en cuestión, desarrollando el radical superior en serie, lo cual es legítimo, porque suponemos que $\frac{u}{V}$ es una cantidad bastante pequeña para que puedan despreciarse potencias superiores á la segunda en el numerador,

y la segunda potencia en el denominador, se transforma de este modo

$$\frac{V-\sqrt{V^2-u^2}}{\sqrt{V^2-u^2}}=\frac{V-V\left(1-\frac{u^2}{V^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{V\sqrt{1-\frac{u^2}{V^2}}}=$$

$$=\frac{1-\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{u^2}{V^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{V^2}}}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{V^2}\,.\,u^2,$$

cantidad proporcional á u^2, como en nuestro ejemplo.

Por el contrario, si la velocidad u de la masa eléctrica e es comparable á V, las simplificaciones anteriores no son legítimas.

Y presentemos, para concluir esta digresión, un caso extremo.

Supongamos que la velocidad u del móvil eléctrico es igual á la de la luz, entonces la expresión anterior se convierte en esta otra

$$\frac{1-\left(1-\frac{V^2}{V^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{V^2}}}=\frac{1}{0}=\infty.$$

Es decir, que si una masa eléctrica camina con una velocidad igual á la de la luz, la masa ponderable equivalente será infinita, y sea cual fuere la fuerza finita que se le aplique, la aceleración será nula; de donde se deduce esta consecuencia curiosísima, dado que todas estas teorías fuesen exactas, que *es imposible que ninguna masa eléctrica adquiera una velocidad superior á la velocidad de la luz.*

Y si el móvil se compone de un núcleo ponderable y de

una atmósfera eléctrica, como á la masa que finge la electricidad en movimiento, hay que agregar la masa ponderable con su inercia, todavía resultará una masa total infinita, una inercia infinita y una aceleración nula. Valores de u superiores á V, darían una expresión imaginaria.

Pero sobre todo esto ya volveremos en otra ocasión; basta por ahora que vayamos indicando este y otros resultados singularísimos de la nueva física matemática.

3.ª Para calcular $\frac{1}{2} M u^2$, no hemos tenido en cuenta más que la acción del medio ambiente, que hemos supuesto formado de un éter dividido ó susceptible de dividirse en torbellinos que, en el fondo, es algo así como un medio magnético. Si además en dicho medio existiesen, por ejemplo, corrientes eléctricas, como el movimiento de la masa e, con la velocidad u, equivale á una corriente eléctrica, y casi pudiéramos decir á un elemento de corriente que se transporta, sería preciso tener en cuenta los efectos de la *inducción* sobre las corrientes que ya existían, efectos que aparentan, por su parte, una especie de inercia, como asimismo los aparenta la self-inducción.

Pero nos vamos separando demasiado de nuestro objeto, y tiempo es ya de que terminemos este largo paréntesis.

Realmente toda esta discusión sobre la masa, ó la mayor parte de ella, lo reconocemos lealmente, está fuera del programa del presente curso; pero no hemos podido resistir á la tentación de marcar de pasada, y en forma elemental, ciertas modernas orientaciones de la física, ó mejor dicho, de las teorías de la física.

De todo lo expuesto sólo debemos retener esta consecuencia: que una masa eléctrica en movimiento no ejerce sobre los elementos del éter ambiente fuerzas centrales, sino más bien perpendiculares á r, como que son tangentes á los paralelos del sistema.

Algo en el mismo orden de ideas vimos ya en el primer

curso de esta asignatura, al estudiar la acción de un elemento de corriente sobre el polo de un imán.

Y como cada uno de estos problemas tiene muchos aspectos, nos ocurre que á la teoría, *ó intento de teoría* que expusimos en la conferencia anterior, aun pudiera hacerse otra objeción además de todas las indicadas, objeción fundada en el estudio de los solenoídes cerrados, pero no todo se puede explicar de una vez, y tememos lanzarnos á otra digresión más sin la preparación conveniente.

Demos por terminada aquí estas indicaciones sobre la *crítica moderna respecto á las masas y á la inercia*, y pasemos al segundo concepto de la mecánica clásica: al concepto de fuerza.

La fuerza.—La fuerza, como *tantos otros* conceptos que forja la inteligencia, se funda en la realidad misma, en los heehos que nos rodean, en la experiencia que adquirimos de ciertos fenómenos.

Y decimos *tantos otros*, aunque muchos dirán que *todos*, y evitamos de propósito afirmaciones absolutas, para eludir discusiones filosóficas en lo posible.

Cuando empujamos á un objeto y tenemos conciencia en cada instante de la acción que estamos ejerciendo; cuando colgamos pesos de un hilo y vemos que el hilo se alarga, y que, si los pesos pasan de cierto límite, se rompe; cuando pretendemos arrastrar una carga por el suelo, y la fatiga que nos causa nuestro empeño nos despierta la idea de que en cada momento hay y es necesaria una causa para producir tal efecto, en todos estos ejemplos y en otros cien que pudiéramos presentar, nuestra inteligencia, sintetizando todos estos hechos, procurando elevarlos á la unidad, forja un concepto abstracto á que da el nombre de *fuerza*, para cada instante del fenómeno.

Yo bien sé que en todos estos ejemplos, á veces se confunden dos cosas, la fuerza y el trabajo; y á veces, de un modo vago, tenemos en cuenta la fatiga.

Pero la mecánica clásica ha buscado el factor común de todos ellos, lo ha purificado en cierto modo, le ha dado hasta forma geométrica en lo que hoy se llama *un vector*, ha buscado para este concepto, que palpita en todos los fenómenos del mundo inorgánico, una unidad fija, el kilogramo, por ejemplo; y abstraído del mundo fenomenal dicho concepto, y sometido á medida, lo ha representado por trozos de rectas que tienen un punto de aplicación, una dirección, un sentido y una longitud, que por su valor numérico representa cada una la intensidad de la fuerza; la cual, cuando se pasa á la realidad, se convierte en un *hilo* del cual se *tira*, en una *barra* con la cual *se empuja*.

Pero todas estas son ideas en que no debemos insistir porque son harto conocidas de mis oyentes ó de mis lectores, y son tan primitivas y tan vulgares, que pretender explicarlas es acaso obcurecerlas, como sucede con otros muchos conceptos primarios de la inteligencia.

***

Ciertos físicos acusan á este concepto de la fuerza de ser una abstracción, y no más que una abstracción.

La fuerza—dicen—no existe en la Naturaleza; ó de otro modo, la fuerza es un concepto artificial: el concepto natural es la *energía*.

Esta acusación contra la vieja fuerza de la mecánica racional nos parece de todo punto infundada.

No negamos que sea un concepto abstracto; pero ¿es acaso el único? ¡Si decir *concepto* es decir abstracción! Es una especie de factor común que extraemos de muchas realidades.

También la masa es un concepto abstracto; casi pudiéramos decir que no es más que un coeficiente numérico.

Ya lo explicamos anteriormente.

No existe una masa del platino y otra masa del plomo y otra masa del aire y otra del agua, y así sucesivamente. Existe el *concepto abstracto de masa*, que por la medida se convierte en un número, y que indica un factor común, un coeficiente de la física, que entra en todas las ecuaciones de la dinámica, y que indica que toda la materia del universo tiene como factor común *algo* de lo cual depende la inercia; y que, para el problema del movimiento, es en la mecánica racional clásica, lo único que hemos de tener en cuenta al formar las ecuaciones de la dinámica y no la clase de materia. Claro es que nos referimos á la ecuación fundamental

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X$$

y á las que de ella se deducen, según los ejes.

Pues otro tanto podemos decir del concepto de la fuerza.

También es una abstracción. La fuerza abstracta no existirá en el mundo de la realidad; pero existen fenómenos análogos entre sí, y por decirlo de este modo, de la misma familia, en que la fuerza del matemático está materializada y particularizada.

Existe la fuerza de presión de un gas; la fuerza de presión de un líquido; la fuerza de la atracción real ó aparente de una masa ponderable sobre otra masa ponderable; la fuerza de atracción ó repulsión de una masa eléctrica sobre otra masa eléctrica; la fuerza de atracción de una corriente sobre otra corriente eléctrica; la fuerza de atracción ó repulsión de un vaso sobre la superficie del líquido en él contenido; las comprensiones ó las tensiones en el interior de un cuerpo elástico, sea cual fuere su origen; en suma, una multitud de fenómenos análogos pertenecientes en cierto modo, volvemos á repetirlo, á la misma familia inorgánica, que presentan caracteres semejantes, y que por el poder de abstracción y unidad de nuestro entendimiento *convertimos en un*

concepto abstracto y universal, y le damos un nombre, y lo representamos simbólica ó esquemáticamente por una línea recta, como antes explicábamos

***

Y todo esto sería estéril, ó poco menos, y acaso nos perderíamos en vaguedades y disputas filosóficas si no tuviéramos el medio de sujetar á medida el concepto de fuerza en general, y todas sus determinaciones prácticas en particular.

Pero desde que tenemos una unidad para la fuerza, sea un kilogramo, sea un resorte, sea cual fuere la unidad de medida, desde ese momento la fuerza adquiere para la ciencia positiva utilidad indiscutible y fecundidad evidente, y no será fácil que la crítica, por mucho que arrugue el ceño, la arroje del saber positivo, ni de la mecánica racional, ni de la mecánica de la materia ponderable, ni de la mecánica del éter, ni de ninguna mecánica que la inventiva de los sabios discurra.

***

Pero es que lo que decimos de la masa y decimos de la fuerza, podemos decir de cualquier grupo de fenómenos análogos entre sí, de los cuales se pueda extraer algo común, convirtiéndolo en un concepto abstracto, con dos condiciones fundamentales:

1.ª Que la variedad que en sí contenga el fenómeno, sus modalidades diversas, su manera de desarrollarse, y, en fin, sus leyes generales, dependan de ese concepto abstracto, el cual se convertirá en un parámetro de la física experimental y en un elemento de la física matemática, y que en rigor

será un elemento de la inteligencia humana; será, repetimos, símbolo de la realidad misma, la que por la medida y el número quedará, no totalmente, pero sí en una buena parte, aprisionada en el cerebro humano y en relación íntima con las leyes de la razón.

2.ª Que ese concepto abstracto y las realidades que lo han engendrado sean susceptibles de *medida;* que se puedan determinar las condiciones materiales en que *dos fenómenos*, de los que estamos considerando, son iguales, repetición en cierto modo el uno del otro, de suerte que, si la palabra vale, puedan superponerse y coincidir; porque de este modo sabremos cuándo uno de ellos es doble ó triple ó *N* veces mayor que el otro.

Esto sucede, por ejemplo, con la electricidad estática; esto sucede con las corrientes eléctricas.

¿Sabemos por ventura lo que es una cantidad de electricidad? ¿Sabemos lo que es una corriente eléctrica? No sé quién se atreva á contestar afirmativamente.

Podremos forjar hipótesis, podremos construir símbolos intelectuales; hasta podemos construir máquinas que supondremos que son como la estatuaria, si la palabra vale, de tales ó cuales realidades de un mundo desconocido.

Pero penetrar en el fondo del fenómeno, en la cosa en sí, como dicen los filósofos, eso sí que no podemos.

Verdad es que existen ciertas escuelas filosóficas que hasta niegan que *las cosas en sí* puedan existir.

De estas lucubraciones debo prescindir en mis conferencias, y debo atenerme únicamente al sentido común, á la ciencia experimental, con toda su fe en la realidad, y á la aplicación del cálculo matemático á los fenómenos naturales, con todas sus tendencias *al absolutismo de la verdad.*

***

Pero volvamos á nuestro objeto.

El acusar de abstracto al concepto de fuerza es una acusación, que no hay concepto científico al cual no alcance.

Cuando se dice, por ejemplo, y algunos lo repiten, que en la nueva mecánica el concepto de *energía* debe sustituir al concepto de *fuerza*, porque es el verdadero concepto real del mundo físico, caen en una exageración manifiesta, y casi me atrevería á decir, que en un error profundo; á pesar de que, en la nueva física, como ya veremos más adelante, deban utilizarse y aún se utilicen limpias de exageración y de malquerencia contra la ciencia clásica, todas estas ideas.

La verdad es que en esta cuestión caben la afirmativa y la negativa.

Sí y *no:* me explicaré.

El concepto de energía es más real que el concepto de fuerza; es menos abstracto, en grados de abstracción, porque *abarca más abstracciones* y se va macizando, si puedo expresarme de este modo.

Pero, de todas maneras, el concepto de energía no es un pedazo de la realidad; es á su vez una abstracción de un gran número de fenómenos, de todos, si es preciso, de los que se agitan en el seno de la realidad.

En suma: la fuerza es una abstracción, pero la energía es otra abstracción.

A la realidad, á la cosa en sí, al fondo de los fenómenos, á lo que Kant llamaba el Numena, á lo que niega el que sólo ve en el universo un conjunto de fenómenos, sin algo detrás que los sostenga, los proteja y los finja; á tales honduras llenas ó vacías, si no llega la fuerza, no llega tampoco la energia.

Por otra parte, al recorrer toda la ciencia, *por ambos conceptos ha de pasarse;* ó subiendo desde la fuerza á la energía por complicación de idealismos, ó descendiendo de la energía á la fuerza, por análisis de un concepto complejo para llegar á otro que lo es menos.

Y permítasenos un ejemplo para aclarar más nuestro pensamiento

El punto, la línea recta y el plano, son tres idealismos matemáticos. Para recorrer toda la geometría hay que estudiar puntos, líneas y superficies, y además, volúmenes.

Pero ¿qué es preferible para la enseñanza? ¿Estudiar las líneas antes que las superficies, ó las superficies antes que las líneas, ir de lo más sencillo á lo más complicado, ó emprender una marcha descendente de lo más complejo á lo menos complejo?

Para mí la elección no es dudosa; pero si tiene importancia desde el punto de vista pedagógico, su importancia se achica desde el punto de vista lógico.

Cuestión es esta, de todas maneras, en que no debemos detenernos.

***

Tenemos pues, en presencia uno de otro y disputándose, por decirlo así, la hegemonía de la Mecánica, estos dos concentos: *la fuerza y la energía.*

En la mecánica clásica el concepto de fuerza era el dominante.

Se definían las fuerzas como causas del movimiento; se medían, por ejemplo, por la unidad kilogramo, se representaban por líneas rectas, á las que se daba un punto de aplicación, una dirección, un sentido y una magnitud, constituyendo lo que hoy, caminando de abstracción en atracción, se llaman *vectores,* ó mejor dicho, una determinación particular de éstos.

Después se estudiaba su composición y descomposición, y toda la Mecánica, desde la estática á la dinámica, estaba, por decirlo así, impregnada del concepto de fuerza.

Más tarde, aparecía el *trabajo de las fuerzas,* que es una de las formas de la energía.

Si un punto camina en línea recta bajo la acción de una fuerza constante F, actuando también sobre dicha línea, y recorre un camino e, acompañado siempre por la acción de la fuerza F, se dice que ésta ha desarrollado un trabajo *mecánico* cuyo valor será igual á

$$F \times e,$$

es decir, fuerza por camino recorrido.

Este trabajo, que generalmente se mide en kilogramos y metros, y cuya unidad es el kilográmetro, ó sea el trabajo necesario para elevar un kilogramo un metro de altura, puede llamarse también *energía*, ó es una manifestación, una determinación de la energía.

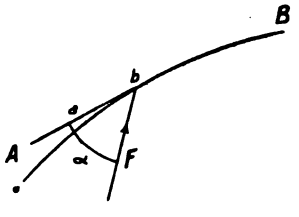


Figura 14.

En la Mecánica clásica está perfectamente definido, está definido matemáticamente, porque aunque el punto siga una línea curva AB (fig. 14), se podrá definir el trabajo en cada instante ó para cada elemento ab de la trayectoria, mediante el producto de la proyección de la fuerza F sobre la tangente en b, por el camino $ab = ds$, que el móvil A recorre en dicho espacio de tiempo infinitamente pequeño.

De suerte que

$$\text{trabajo elemental en } b = F \cos \alpha \, ds$$

y el trabajo total desde A á B, será la suma de todos estos trabajos elementales.

Así

$$\text{trabajo de } A \text{ á } B = \int_A^B F \cos \alpha \, ds.$$

Esta fórmula, cuando la trayectoria es rectilínea y la fuerza F es constante y actúa según dicha recta, se reduce, como antes decíamos, al *producto de la fuerza por el camino.*

De suerte que, definida la fuerza, el trabajo, que, como hemos dicho, es una forma de la energía, queda definido con rigorosa exactitud y con una claridad que no sé como lograrían sobrepujar los partidarios de la energética si empezaran definiendo la energía por la caloria de la termodinámica, pongo por caso, ó por otra unidad equivalente; ni sé como podrían someterla al cálculo en la forma natural que la mecánica clásica emplea.

Pero tampoco podemos ahondar esta cuestión por no ser éste el momento oportuno.

No es el trabajo mecánico, es cierto, la única forma de la energía: hay otra que la vieja mecánica estudia también y que introduce en todos sus cálculos, á saber la semifuerza viva de un móvil, es decir

$$\frac{1}{2} mv^2$$

siendo m la masa y v la velocidad.

Pero esta forma, que parece completamente distinta de la anterior, en el fondo se refiere al mismo fenómeno del movimiento, y se miden ambas expresiones

$$\frac{1}{2} mv^2 \qquad \text{y} \qquad Fl$$

por la misma unidad, á saber, el kilográmetro. Mas aun, si la fuerza F ha estado actuando una unidad de tiempo sobre el móvil m, y ha engendrado la velocidad v, ambas expresiones, en las unidades usadas, tienen el mismo valor numérico, de suerte que

$$\frac{1}{2} mv^2 = Fl.$$

Tanto es así, que ambos miembros son, por decirlo de este modo, formas algebraicas distintas de un mismo fenómeno físico, á saber: un trabajo que engendra una fuerza viva, ó si se quiere una semifuerza viva. Gracias á la *inercia* de toda masa ponderable, que no es tan inerte como se supone, sino que es, en cierto modo, un *regulador* y un *volante* del movimiento, en la masa m, cuando adquiere la velocidad v, se almacena y recoge, y en cierto modo se transforma el trabajo Fl.

Tanto es así, que la expresión de la fuerza viva puede descomponerse de este modo:

$$\frac{1}{2} mv^2 = mv \cdot \frac{1}{2} v$$

y el primer factor mv es la fuerza F, y el segundo $\frac{1}{2} v$ es el camino l; porque si la velocidad es *cero* al principio y es v al fin, se sabe que el camino será $\frac{1}{2} v$.

Queremos decir, con lo expuesto, que este concepto de la energía no es nuevo en la mecánica racional.

Las dos formas de la energía, la del *trabajo* y la de la *fuerza viva*, las tiene estudiadas hace mucho tiempo, y también su relación de identidad numérica, y también sus transformaciones: mucho antes, repetimos, de que se hablase de la *energética*.

Hasta en la ciencia popular se explicaba que la energía afectaba dos formas: la forma *cinética* ó *actual*, que correspondía á la fuerza viva de las masas en movimiento, y era trabajo almacenado en la masa, como hoy se supone almacenado en el medio ambiente; y la forma *potencial* ó de posición, que era la que desarrollarían las fuerzas exteriores al ponerse en movimiento una masa y actuar sobre ella á lo largo de un camino.

Fué asimismo vulgarísimo el ejemplo de la energía que representaba un cuerpo sostenido á cierta altura, posición que correspondía al trabajo potencial, porque al dejarlo caer, la fuerza de la gravedad desarrollaba cierto trabajo, convirtiendo la potencia en acto y transformándose el trabajo en velocidad del móvil.

En suma, en el fondo el concepto de energía no es de la nueva mecánica, sino de la mecánica clásica.

Pero como concepto general y con toda la abstracción necesaria para serlo, no suponía la ciencia de aquella época, como suponen ó dan á entender los físicos, que Mr. Abel Rey, en su excelente libro llama pragmatistas, que exista una energía calorífica y otra luminosa, y otra eléctrica y otra magnética, y otra química y así sucesivamente; es decir, una energía especial y de *cualidad* para cada grupo de fenómenos y casi irreducibles unas á otras, llegando cuando más á equivalencias numéricas y experimentales.

No; la mecánica clásica, á que en mi tiempo llamábamos mecánica racional por antonomasia, en su desarrollo lógico, llegó á introducir el concepto de energía en sus dos formas: *trabajo y fuerza viva;* pero buscando siempre la unidad de la ciencia en la energía que acompañaba á cualquier fenómeno de la Naturaleza; unidad que podía afectar una de estas dos formas: ó un trabajo mecánico, ó una fuerza viva.

Y como en la materia se había encontrado un factor, abstracto si se quiere, pero sujeto á medida, la fuerza, y de las diversas manifestaciones de la fuerza había deducido la fuerza abstracta de la mecánica; así de todas las energías del mundo material dedujo la energía de la mecánica, que se expresaba por una unidad única, el kilográmetro, ya se tratara de un trabajo mecánico, ya de una fuerza viva, ya de una corriente eléctrica, ya de un condensador, ya de una caloria, ya de cualquier otra forma determinada de la energía universal.

Dígase lo que se quiera, de este modo se forma la verda-

dera ciencia y se tiende hacia la unidad, no dividiendo artificialmente los fenómenos de la Naturaleza en cantones poco menos que aislados.

***

La fuerza, decimos, es un concepto de la mecánica clásica, del cual parece que nunca podrá prescindirse.

La energía es otro concepto de aquella ciencia, que cada vez adquiere más importancia, pero que ya la tenía en los trabajos de los matemáticos del pasado siglo, siquiera la terminología, la momenclatura de entonces, fuera algo distinta de la de hoy.

Pero con palabras no se hace la ciencia, aunque no negamos que con una acertada momenclatura pueda simplificarse su exposición.

De todas maneras, no hemos de negar tampoco que este concepto de energía va extendiéndose cada vez más en la física matemática, sobre todo con el desarrollo de las teorías eléctricas.

Si lo que domina da en cierto modo nombre á la cosa dominada, bien pudiera decirse que la mecánica clásica y la física matemática de la pasada centuria, eran algo así como *la ciencia de la fuerza;* y, que en cambio, en la nueva mecánica del éter y en la física matemática moderna, domina el concepto de la *energía,* y puede afirmarse que estas ciencias modernas son *las ciencias de la energía.*

Pero esto no significa, que la vieja mecánica no estudiase la energía bajo la forma de trabajo ó fuerza viva, y que la ciencia moderna no tenga que analizar y descomponer el concepto de energía para llegar al concepto de fuerza.

De suerte que en la gran síntesis que se prepara, al fin y al cabo habrán de estudiarse la energía y la fuerza.

***

Esta preferencia de la ciencia antigua por la *fuerza* y de la ciencia moderna por la *energía*, no es caprichosa ó arbitraria; está impuesta por la naturaleza de las cosas, por la naturaleza de las hipótesis á que la ciencia ha de acudir siempre para su fábrica, perdóneseme la palabra; y en suma, por la naturaleza de los fenómenos que en cada época se estudian de preferencia.

De preferencia estudia la mecánica clásica los fenómenos de la materia ponderable, y en estos fenómenos el concepto de fuerza se impone como primordial y es sumamente cómodo, gracias á la inercia, porque determina la relación inmediata entre la fuerza y la velocidad. La velocidad que una fuerza comunica á una masa ponderable se deduce desde luego de la relación

$$mv = F$$

ó de esta otra

$$\frac{1}{2} mv^2 = \text{Trabajo} = Fl.$$

Una fuerza no puede comunicar una velocidad cualquiera actuando un tiempo determinado; dicha velocidad está limitada y determinada por la inercia de la masa, que es como un regulador, y la mecánica avanza sin tropiezo desde las primeras hipótesis y desde las primeras experiencias hasta sus fórmulas definitivas.

Se comprende, pues, que la antigua mecánica racional diese la preferencia á la fuerza.

Pero cuando se trata del equilibrio ó del movimiento, sobre todo del movimiento de masas eléctricas, todo el andamiaje de la mecánica clásica se desploma de un golpe, como algo completamente inútil en la nueva región en que penetramos.

El problema fundamental será este: sobre una cantidad de electricidad e actúa una fuerza F, siendo F una fuerza de la

antigua mecánica, una fuerza que se mide en kilogramos, que se concibió, casi me atrevería á decir que se fabricó, para el uso de las masas ponderables; y se nos pregunta, ¿esta fuerza *F*, qué velocidad va á comunicar á la masa eléctrica *e*?

No creo que nadie de primera intención, y ateniéndose á los cánones de la mecánica clásica, pueda responder á esta pregunta; ó cuando más contestará con un *imposible*. Si *e* no tiene masa ponderable, que es como decir que su masa es igual á cero, la fuerza *F* comunicaría á *e* una velocidad infinita, y *e* se perdería en el espacio. Resueltamente la mecánica clásica, que parece inquebrantable é insustituíble para las masas ponderables, aplicada en seco, perdónesenos la palabra, á los átomos eléctricos, conduce á una imposibilidad ó á una dispersión universal de la materia eléctrica.

Yo bien sé que en muchas experiencias, y experiencias admirables de la física moderna, se salvan estas dificultades *colocando en el centro del átomo eléctrico, ó sea del electrón,* una pequeña *masa ponderable*, con lo cual se aplican las fórmulas clásicas de la vieja dinámica, á saber, las que se deducen de esta fórmula fundamental

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = X;$$

en que *m* es la masa ponderable que se ha introducido para hacer aplicable la ecuación: y *X* representa fuerzas eléctricas ó electromagnéticas.

El primer miembro *va á cuenta* de la mecánica clásica, ó sea de las masas ponderables; el segundo *corre á cargo* de la electricidad.

Pero esto, perdónesenos el atrevimiento, es un escamoteo de dificultades muy serias en el fondo.

Cuando se estudia imparcialmente el problema, la cuestión se plantea en toda su integridad.

Así como la mecánica racional resuelve el problema del movimiento de cualquier masa ponderable con toda la perfección que á la humana inteligencia le es permitido en cada época, éstas reglas y estos principios de la ciencia clásica, no son completamente aplicables al éter ni á una porción de electricidad en movimiento, según acabamos de indicar.

Pero *puede salvarse la dificultad aplicando el concepto de la energía*, como hemos visto en el ejemplo de la conferencia anterior; punto sobre el cual aun insistiremos en la conferencia próxima.

En suma, la fuerza y la inercia de las masas ponderables dan rigor á las demostraciones de la mecánica racional; y por eso resulta preponderante el concepto de fuerza.

En cambio, en la física matemática moderna, que pudiéramos decir que es la del éter y la de la electrlcidad, el concepto de fuerza es insuficiente, y en cambio adquiere importancia, en algunos momentos decisiva, el concepto de energía *resolviendo problemas que de otra suerte pudiera* creerse que eran invencibles, á no acudir á hipótesis que no siempre resultarían justificadas.

Pero como todo esto ha de ser materia, no de otras conferencias, sino de otros cursos, porque se refieren á grandes problemas que se agitan en el seno de la física matemática moderna, terminaremos por ahora esta materia, para continuar en la conferencia inmediata el estudio de la crítica relativa al concepto de fuerza, tal como la vieja mecánica lo entendía.

XXI. — Nuevo procedimiento de acidimetría empleando el agua de cal,

POR ANTONIO DE GREGORIO ROCASOLANO.

Muy pocas veces se utiliza en los laboratorios el agua de cal como líquido alcalino valorado en las determinaciones por volumetría de compuestos ácidos; sin embargo, tenemos la convicción de que, usándola, se facilitan las determinaciones acidimétricas, sobre todo cuando se opera sobre productos industriales de pequeña acidez, como vinos, cervezas, sidras, mostos, etc.

La disolución saturada de hidrato de calcio en el agua, ó agua de cal, es un líquido alcalino fácilmente alterable, por fijar anhídrido carbónico del aire para formar carbonato cálcico, insoluble, que se deposita disminuyendo el valor alcalino del líquido claro; esta alteración se realiza en tiempo relativamente corto, y es la causa de que el empleo del agua de cal en análisis cuantitativa sea muy limitado, porque para operar en condiciones de exactitud, es necesario valorarla en cada operación, evitando la repetición de este trabajo el uso de otros líquidos alcalinos, como las disoluciones de hidrato ó carbonato sódico, cuyo valor permanece sin alteración sensible durante bastante tiempo.

Teniendo presente que la poca solubilidad del hidrato de calcio en el agua permite operar siempre con sus disoluciones saturadas, las dificultades anotadas y alguna otra de menor importancia quedarán resueltas si prácticamente llegamos á una fórmula que en función de las variables temperaturas y volumen de agua de cal gastado para la neutralización, dé en gramos la cantidad de ácido que queremos determinar.

Desde el punto de vista práctico, es de mucho interés llegar á este resultado, sobre todo, por su aplicación en los laboratorios industriales, donde la simplificación de los métodos de análisis es asunto importante; y, en definitiva, la consecuencia que del presente trabajo cabe deducir, es que *pueden hacerse, por volumetría, determinaciones de los distintos ácidos aislados, sin necesidad de valorar líquidos alcalinos.*

La labor experimental necesaria para llegar á la conse-

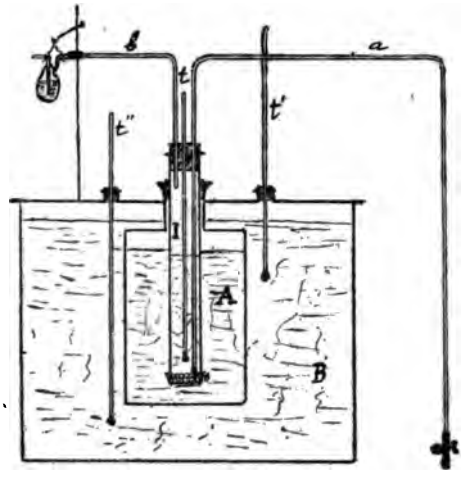


Figura 1.ª

cuencia que buscamos, es la construcción de una gráfica de la solubilidad del hidrato de calcio en el agua. Para determinar puntos de esta curva, practicamos una serie de determinaciones en las que tratamos de evitar las causas de error conocidas, operando del modo siguiente: En un frasco *A* colocamos agua y cal de manera que se forme por agitación una lechada clara; este frasco se introduce en una vasija *B* de gran capacidad, que contenga la masa líquida destinada á modificar y á mantener constante durante algún tiempo la temperatura de la lechada de cal (fig. 1.ª). Comenzamos por

llenar con hielo machacado la vasija *B*, y agitando con frecuencia la lechada de cal, se espera el momento en que la temperatura marcada por los termómetros *t' t''* permanece estacionaria: entonces se introduce en el frasco *A* el tubo *I*, de cuyos dos extremos, el inferior se halla obturado por dos hojas de papel de filtro que forman membrana, y el superior lo cierra un tapón de caucho atravesado por el sifón *a*, el tubo *b* y el termómetro *t*. Cuando el tubo *I* está ya lleno de agua de cal perfectamente filtrada y estacionada la temperatura marcada por el termómetro *t*, se ceba el sifón *a*, que da salida al agua de cal, y despreciando las primeras porciones que pasan, se recogen 50 c. c., con los que se hace seguidamente una determinación alcalimétrica, utilizando como líquido valorado una disolución diluída de ácido clorhídrico y, como indicador, cuatro gotas de disolución de fenoltaleina al 1 por 100.

Calentando el líquido contenido en el vaso *B*, operando siempre de igual manera, y valorando el agua de cal con el mismo líquido ácido, hicimos varias determinaciones á diferentes temperaturas, que sirvieron para constiuir la curva que representamos á continuación (fig. 2.ª), en la que se cuentan en ordenadas las temperaturas, y en abcisas los diversos valores de hidrato cálcico encontrados y referidos á 100 c. c. de disolución.

Con objeto de presentar de modo más sencillo estos resultados, formamos la tabla adjunta, en la cual se expresan por c. c. de agua de cal consumida en una valoración, los valores á que equivale en hidrato de calcio ó en ácido sulfúrico ó tartárico en función de la temperatura del agua de cal con que se opera.

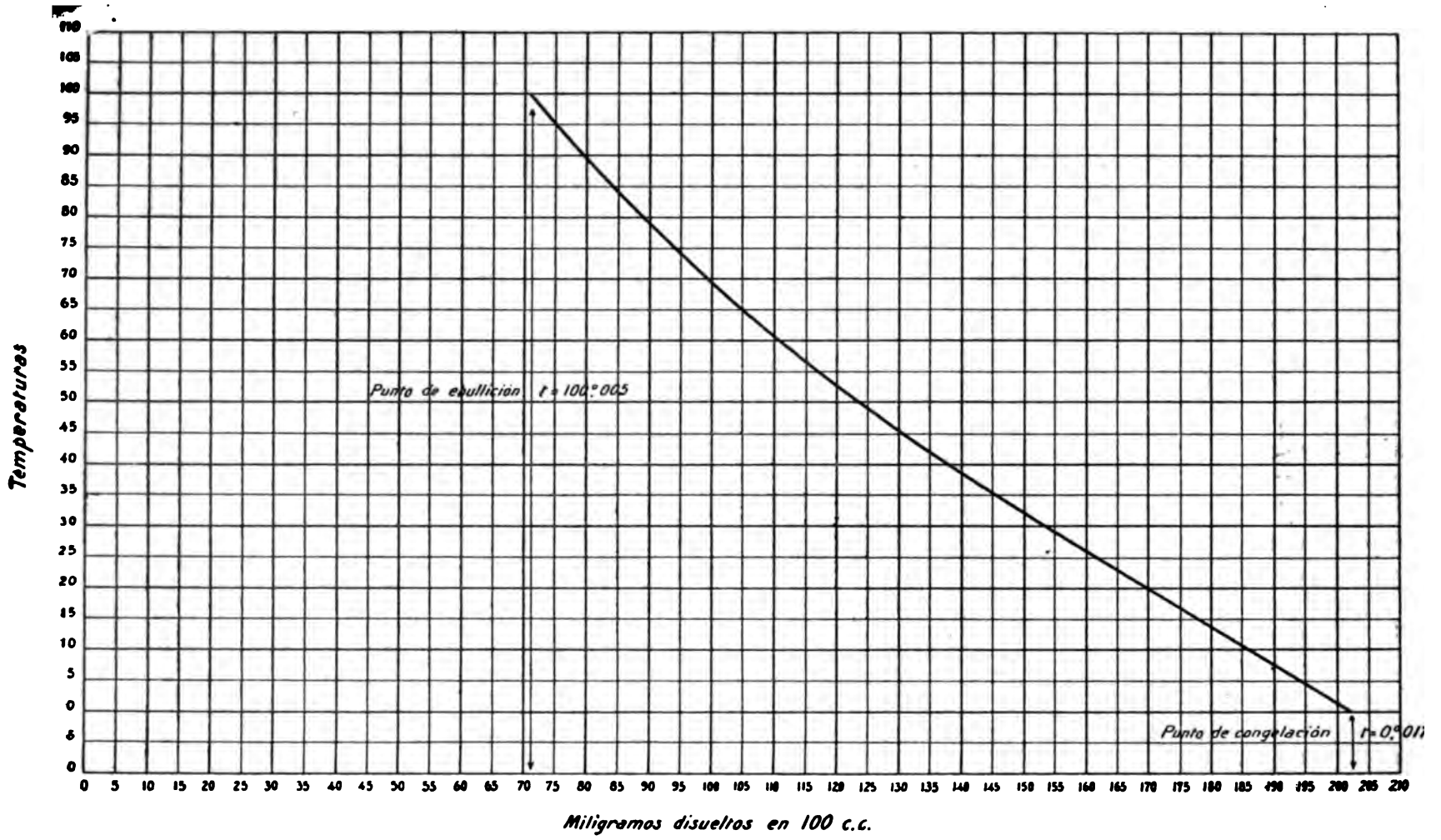

Temperaturas
Punto de ebullición t = 100.º005
Punto de congelación
Miligramos disueltos en 100 c.c.

Figura 2 A

Valores de *t*.	Ca $O_2 H_2$ en 1 c. c. de agua de cal.	$H_2 S O_4$ por 1 c. c. de agua de cal.	$C_4 O_6 H_6$ por 1 c. c. de agua de cal.
0°	0,0020215	0,0026764	0,0040975
5°	0,0019475	0,0025784	0,0039475
6	0,001929	0,0025539	0,00391
7	0,001915	0,0025354	0,0038817
8	0,0018958	0,0025089	0,0038417
9	0,00188	0,002489	0,0038107
10	0,0018628	0,0024663	0,0037758
11	0,0018502	0,0024496	0,0037503
12	0,001835	0,0024295	0,0037195
13	0,0018175	0,0024063	0,003683
14	0,0018002	0,0023834	0,003649
15	0,0017825	0,00236	0,003613
16	0,001765	0,002336	0,003577
17	0,00175	0,002317	0,003547
18	0,001735	0,002297	0,003516
19	0,0017246	0,002283	0,003494
20	0,0017075	0,002259	0,003461
21	0,00169	0,002237	0,003425
22	0,0016725	0,002214	0,00339
23	0,0016575	0,002194	0,003359
24	0,0016412	0,0021729	0,003326
25	0,001625	0,0021515	0,003293
26	0,0016075	0,002127	0,003257
27	0,00159	0,002105	0,003223
28	0,001575	0,002085	0,003192
29	0,00156	0,002065	0,003162
30	0,001545	0,002045	0,003131

Para determinar por medio de esta tabla la cantidad de ácido sulfúrico ó tartárico total contenido en un líquido, se practica una acidimetría con agua saturada de hidrato cálcico recién filtrada, y cuya temperatura se toma en el momento en que se opera; se lee el volumen de líquido alcalino gastado, y multiplicado por el valor en ácido sulfúrico ó tartárico que encontraremos en la línea correspondiente á la

temperatura anotada, tendremos en gramos la acidez total del líquido problema, referida á uno de estos dos ácidos. Si el reactivo indicador que se emplee es tres gotas de disolución de fenoltaleina al 1 por 100, deberá descontarse del gasto de agua de cal 0,1 c. c. por absorción del reactivo.

En los laboratorios industriales conviene operar siempre con volúmenes iguales de problema, diluídos hasta 30 ó 35 c. c.

En el caso de no disponer de la tabla anterior, hemos deducido una fórmula sencilla que puede aplicarse á cualquier problema en que se trate de determinar una acidez total referida á un ácido cualquiera.

Observando la gráfica (fig. 2.ª) encontramos gran regularidad que representa una ley sencilla para las variaciones en hidrato de calcio comprendidas entre las temperaturas 0° y 30°; es decir, entre las temperaturas que de ordinario ha de alcanzar el agua de cal en los laboratorios.

Suponiendo que se trate de determinar la acidez total de un líquido con relación al ácido sulfúrico, razonaremos del modo siguiente: disminuyendo la cantidad de hidrato de calcio en el agua de cal á medida que la temperatura aumenta, disminuirá también su valor expresado en ácido sulfúrico; luego cometeremos un error por exceso, tanto mayor cuanto más elevada sea la temperatura, si tomamos por resultado el de multiplicar el número de centímetros cúbicos de agua de cal gastados en la neutralización, por el valor en ácido sulfúrico á que equivale un centímetro cúbico á la temperatura de 0°; pero llegaremos á un número que representará un valor exacto, si restamos del producto anterior una corrección dada en función de la temperatura del volumen del agua de cal gastada para neutralizar, y de una constante que será distinta según el ácido de que se trate.

Esta constante será un número que representará la disminución que por centímetro cúbico sufre el valor del agua de

cal expresado en ácido sulfúrico, por cada grado que aumente la temperatura, y se determinará, para las temperaturas comprendidas entre 0° y 30° (trozo recto de la gráfica), dividiendo por 30 la diferencia entre la cantidad real de ácido sulfúrico equivalente á 1 c. c. de agua de cal á la temperatura de 0° y el correspondiente á 30°:

$$\frac{0{,}0026764 - 0{,}002045}{30} = 0{,}00002103.$$

En consecuencia, para todos los casos en que se determine por volumetría la acidez total de un líquido referida al ácido sulfúrico, empleando como líquido alcalino el agua de cal, se aplicará la fórmula siguiente:

$$0{,}00267 \times n - 0{,}000021 \times n \times t = A_s$$

en la que n representa el número de centímetros cúbicos de agua de cal gastados en la neutralización, t la temperatura del agua de cal, y A_s la cantidad en gramos de ácido sulfúrico contenida en la porción de problema con que se ha operado.

La fórmula general, que en cualquier caso podrá aplicarse, tiene la forma:

$$P \cdot n - Q \cdot n \cdot t = A$$

en la que P y Q son dos constantes distintas, según el ácido á que convenga referir la acidez total que se determine; P representa la cantidad de ácido que neutraliza un centímetro cúbico de agua de cal á la temperatura de 0°, y Q la disminución que por centímetro cúbico y grado de temperatura que aumente, sufre el valor de un centímetro cúbico de agua de cal referido al ácido de que se trate: he aquí los valores de P y de Q para algunos ácidos:

CUERPO INVESTIGADO	Valores de *P*.	Valores de *Q*.
Acido clorhídrico (HCl).....	0,001994	0,00001566
Acido sulfúrico (H_2SO_4).....	0,002676	0,00002103
Acido nítrico (HNO_3).....	0,003442	0,00002703
Acido fosfórico (H_3PO_4).....	0,001784	0,00001402
Acido oxálico ($C_2O_4H_2$)..... ...	0.002737	0,00002150
Acido tartárico ($C_4O_6H_6$).....	0,004097	0,00003218
Acido cítrico ($C_6O_7H_8$).....	0,003260	0,00002561

Creemos que el uso de esta fórmula significa una simplificación importante en las operaciones que hoy se practican para determinar la acidez total y en todos los casos en que se opera con líquidos de pequeña acidez (vinos, cervezas, sidras, mostos, caldos de cultivo, etc.), el agua de cal debe usarse con preferencia á cualquier otro líquido alcalino, ya que desaparecen, como consecuencia de este trabajo, las causas por las que se usaba hasta ahora tan pocas veces.

En los laboratorios industriales es donde tiene más interés la aplicación de esta fórmula, porque evita la valoración de líquidos alcalinos y las causas de error por la variación de sus valores: el agua saturada de hidrato de calcio (agua de cal) puede tomarse siempre como disolución alcalina valorada, si se anota su temperatura en el momento de operar. Bastará disponer de un frasco con lechada de cal clara, y cuando haya de emplearse, agitar, dejar sedimentar, filtrar, tomar la temperatura del líquido filtrado y practicar el ensayo acidimétrico; se lee el volumen *n* de agua de cal gastado en la neutralización, y aplicando la fórmula deducida, se obtendrá, por una sencilla operación aritmética, la acidez total que corresponde al líquido problema, referida al ácido que más nos convenga.

XXII.—Estudio general de las reacciones efectuadas con los compuestos órgano-magnésicos mixtos.

POR JOSÉ GIRAL PEREIRA Y J. CÉSAR SÁNCHEZ.

Primera Memoria.

Durante la segunda mitad del pasado siglo, la Química orgánica aumentó considerablemente el número de sus combinaciones, al mismo tiempo que facilitaba la obtención de otros cuerpos, objeto de su estudio, merced á los procedimientos sintéticos fundados en la acción de los compuestos órgano-metálicos. Pero fuerza es confesar que dichos métodos presentaban grandes dificultades, aun en manos de experimentadores tan hábiles como Wurtz, Frankland, Freund, etc., resultando á veces peligrosos, como sucedia con los derivados órgano-cíncicos, cuya fácil inflamabilidad es de todos conocida.

No entra en nuestro propósito, ni lo creemos necesario, reseñar los trabajos realizados sobre dichas síntesis orgánicas por Wurtz (*), Saytzeff (**), Wanklín (***) y otros químicos; tampoco es necesario insistir sobre las dificultades de su realización práctica, toda vez que habrá tenido ocasión de observarlas el que se dedique á esta clase de investigaciones.

Nos proponemos en la presente Memoria hacer una reseña general de la llamada reacción Grignard, exponer el estado actual de la cuestión, sintetizando en breve resumen los trabajos más importantes publicados acerca de los deri-

(*) *Bull. Soc. Chim.*, t. I, pág. 99, 1867.
(**) *Jahresbericht*, pág. 618, 1870.
(***) *J. of The. Chem. Soc.*, pág. 125, 1861.

vados órgano-magnésicos mixtos, exponiendo las observaciones que en nuestra práctica hemos hecho notar y dando cuenta de nuestras investigaciones, para demostrar lo fecundo de los medios sintéticos fundados en ella, así como orientar en este terreno á quienes no se hayan dedicado á tan especialísimos fenómenos.

Cuando se pone en contacto un haluro de alcohilo con un metal bivalente, se origina una reacción que determina la formación de un compuesto órgano-metálico; pero esta reacción general se efectúa de muy distinto modo, según el metal que intervenga en ella; entre éstos, el cinc y el magnesio han sido los más utilizados. Con el primero, la reacción prodúcese de modo que se forma *transitoriamente* un compuesto de adición, cuya fórmula general corresponde á la siguiente:

$$R - Zn - X,$$

en la cual R representa el radical alcohólico y X el cuerpo halógeno.

Este compuesto por sí sólo, ó reaccionando con una nueva molécula de haluro de alcohilo en presencia de cinc, origina como último resultado un derivado *exclusivamente* órgano-cíncico, conforme á las reacciones siguientes:

$$2R - Zn - X = ZnX_2 + ZnR_2$$
$$Zn + R - Zn - X + RX = ZnX_2 + ZnR_2.$$

Los derivados órgano-cíncicos son cuerpos volátiles, inflamables y de muy difícil y peligroso manejo; reaccionan además muy lenta é incompletamente con los diversos grupos funcionales orgánicos, y no permiten, por lo tanto, generalizar su acción ni limitar los resultados de ella.

Pensando en obviar estas dificultades, idearon Löhr (*),

(*) Liebig's, *Ann.*, t. CCLXI, pág. 72.

Fleck (*), Waga (**) y otros químicos, reemplazar el cinc por el magnesio; pero, realmente, se debe á Grignard (***) la ampliación de esta modificación, y el desarrollo enorme que ha sabido impulsarle, dotando á la Química orgánica de uno de los más fecundos procedimientos de síntesis.

En el caso del magnesio, la reacción se detiene en su primera fase y el compuesto estable es el derivado órgano-metálico mixto, según la ecuación siguiente:

$$RX + Mg = R - Mg - X,$$

siendo necesario consignar que este producto de adición se forma únicamente cuando la reacción se realiza en presencia de éter anhidro — en cuyo líquido es muy soluble — ó de otras substancias que mencionaremos más adelante, puesto que los haluros de alcohilo no reaccionan directamente y sin intermedio con el magnesio sino á temperatura elevada y en tubo cerrado á la lámpara, originando entonces derivados análogos en su constitución y en sus propiedades á los cíncicos ya mencionados (****).

Es indudable que el vehículo interviene en la reacción, estando aún en discusión entre los químicos la forma en que lo hace; pero, cualquiera que sea ella, lo cierto es que el líquido resultante de la reacción entre el haluro del alcohilo, el magnesio y el disolvente, constituye un producto de muy fácil manejo y apto para entrar en reacción con muy variadas substancias, originando productos de síntesis de constitución bien definida, lo cual le da insuperables ventajas sobre los restantes derivados órganos-metálicos.

La misma discusión acerca de la interpretación del fenó-

(*) Liebig's, *Ann.*, t. CCLXXVI, pág. 129.

(**) Idem, *Ann*, t. CCLXXXII, pág. 320.

(***) *Ann. de Ch. et Ph.*, t. XXIV, pág 433; *These Doctorat*, Lyon, 1901; *Revue générale des Sciences*, 14 année, t. 20.

(****) Fleck y Löhr, loc. cit.

meno químico, que se lleva á cabo entre las tres substancias antedichas, ha dado origen á nuevas teorías, que hacen modificar la valencia ordinaria del oxigeno y ofrece campo abierto á la Química teórica, tanto como al descubrimiento de estos compuestos lo ofrece á la Química práctica.

Hé aquí en qué consiste la llamada reacción de Grignard:

Si en un pequeño matraz colocamos un haluro de alcohilo disuelto en éter perfectamente anhidro y añadimos trozos pequeños de magnesio, se inicia una viva reacción con desprendimiento de burbujitas gaseosas, llegando el calor desarrollado en la reacción á hacer hervir toda la parte líquida y terminando por disolverse en ella todo el magnesio. El líquido resultante, incoloro y transparente, es muy alterable en el aire húmedo; se descompone violentamente por el agua y reaccionan con gran facilidad con casi todos los compuestos orgánicos, contándose actualmente por algunos centenares los derivados de síntesis que se han obtenido por su mediación. Nosotros hemos utilizado esta reacción para la preparación de varias substancias, cuyo estudio continuamos y cuyos resultados serán objeto de sucesivas Memorias. Esto nos ha obligado á obtener muchos haluros de alcohilo y sus derivados magnésicos correspondientes, teniendo que vencer en ellos dificultades de índole práctica, que habremos de indicar en el curso del presente trabajo.

Preparación de los haluros de alcohilo.

Es indispensable, para el buen éxito de la reacción de Grignard, el operar con haluros de alcohilo en buen estado de pureza, siendo forzoso seleccionar los métodos conocidos para la preparación de estos compuestos. Por eso no creemos inútil el reseñar ligeramente aquellos que nos han dado mejor resultado, tanto por la rapidez como por el rendimiento y pureza del producto obtenido.

Para los bromuros alcohólicos el procedimiento seguido por nosotros ha sido el siguiente: en un matraz de litro se coloca un peso molecular de bromuro potásico y se añade una mezcla de dos moléculas-gramos de ácido sulfúrico y dos del alcohol correspondiente (de modo que el conjunto no tenga más de un 5 por 100 de agua), y hecha la mezcla con las precauciones conocidas se obtura el matraz con un tapón de caucho parafinado, el cual lleva termómetro y tubo de desprendimiento para comunicarle con un refrigerante de Liebig, comunicando éste á su vez con un matracito rodeado de un medio frigorífico y mediado de agua destilada. Se calienta el matraz en baño de arena y se empiezan á recoger las porciones que destilen desde una temperatura inferior en cinco grados á la de ebullición del bromuro alcohólico que se busca, continuando así hasta que el termómetro marque cinco grados más que dicho punto de ebullición. Las porciones recogidas se condensan en el matraz-recipiente, depositándose en su fondo, y, por lo tanto, debajo de la capa de agua que contiene. Por medio de un embudo de llave se separan ambos líquidos, y el bromuro alcohólico, de aspecto lechoso por el agua emulsionada que contiene, se deseca por agitación con pequeños trozos de cloruro cálcico fundido, en cuyo contacto se deja algunas horas. El líquido, ya completamente transparente é incoloro, se rectifica en baño de María ó de aceite, utilizando el tubo de Le Bel-Henninger ó el de Hempel, y recogiendo únicamente el producto destilado á una temperatura constante de ebullición. Debe conservarse en frascos de vidrio de tapón esmerilado, en sitios frescos y al abrigo de la luz (*).

Operando de este modo se evita el inconveniente que presenta el manejo del bromo libre, utilizado en otros procedimientos de obtención de estos bromuros alcohólicos. No

(*) Prescindimos de consignar las ecuaciones que expresan el fenómeno químico, por ser bien conocidas.

excediendo de un 5 por 100 la cantidad total de agua en la masa reaccionante, la producción del bromuro alcohólico realízase en muy favorables condiciones. Recogiendo únicamente lo destilado entre los límites de temperatura antedichos, se abrevia la purificación del producto. La desecación de éste ha de ser perfecta para los fines de la reacción Grignard, según veremos, y por eso se hace insustituible, para conseguir este objeto, el empleo del cloruro cálcico fundido. La rectificación y conservación del bromuro aseguran sus buenas condiciones de pureza.

Para obtener los ioduros alcohólicos de escaso peso molecular, utilizamos con éxito el siguiente método operatorio: en un matraz de capacidad conveniente (de cuatro á cinco veces el volumen de la mezcla reaccionante) se colocan una cuarta parte de molécula-gramo de fósforo amorfo y una molécula-gramo del alcohol correspondiente, el cual no ha de contener más de un 4 por 100 de agua. Se sumerge el matraz en agua fría y se añade una molécula-gramo de iodo, por pequeñas porciones y agitando á cada adición. Se coloca el conjunto en sitio fresco durante veinticuatro horas, agitando con frecuencia para destilarlo después en baño de María ó de arena, empleando el mismo aparato descrito al tratar de los bromuros, y observando las mismas reglas que allí se citan. El líquido destilado y decantado resulta siempre de color amarillo-rojizo, y se purifica por agitación con una disolución al 3 por 100 de sulfato sódico hasta total decoloración; se decanta de nuevo, dejando después el ioduro descolorado en contacto de un 5 por 100 de cloruro cálcico fundido durante veinticuatro horas, y se termina por una rectificación en las condiciones ya dichas.

Para los primeros términos conviene el empleo del fosforo amorfo y la técnica operatoria que acabamos de describrir; pero cuando se trata de obtener los ioduros de butilo, amilo, etc., interesa el empleo del fósforo ordinario cortado en pequeños trozos, y entonces el aparato se modifica

de modo que el matraz productor empalme verticalmente con una alargadera rellena de trozos de vidrio y destinada á contener el iodo reaccionante, con lo cual se consigue un reflujo contínuo de los vapores del alcohol saturados de dicho metalóide, y, por lo tanto, un intimo contacto de ambos, necesario para favorecer su mutua acción. Claro es que se necesita calentar en estas condiciones todo el conjunto el tiempo necesario para la total disolución del iodo, y vigilar la operación con objeto de conducirla con toda regularidad, cosa no del todo fácil, dada la violencia con que el fósforo ordinario entra en reacción. La alargadera comunica por su parte superior con el refrigerante en posición invertida durante la reacción de los cuerpos, y en posición descendente cuando, una vez terminada aquélla, se procede á la destilación para continuarla como en el caso general.

Aparte de los fenómenos corrientes y consignados en los libros que se ocupan en estas operaciones, nosotros hemos tenido ocasión de observar una parcial disolución del fósforo empleado en el ioduro alcohólico obtenido, y una subsiguiente precipitación al rectificar el producto, depositándose el fósforo bajo la forma de un polvo amarillo-anaranjado, cuyo completo estudio hemos de continuar por creer fundadamente que nos encontramos en el caso de un nuevo estado alotrópico de dicho elemento.

También observamos, en las distintas fases de la operación, que los ioduros alcohólicos de peso molecular un tanto elevado, corroen extraordinariamente los tapones y tubos de goma, haciéndose necesario el uso de estos utensilios parafinados.

Para el inmediato empleo de estos haluros alcohólicos y su directa utilización en la reacción Grignard, es indispensable que se encuentren, no solamente anhidros, sino también desprovistos del alcohol que los engendró; pues, según veremos, pequeñas cantidades de éste bastan para retardar y hasta impedir totalmente la reacción de aquéllos con el magnesio.

Análogas precauciones son necesarias para el empleo del éter sulfúrico, que debe siempre conservarse en contacto de algunos trozos de sodio, con el cual apenas si ha de producir pequeñas burbujas de hidrógeno.

Preparación del derivado órgano-magnésico.

La práctica continuada de la obtención de estos derivados nos ha decidido á adoptar el siguiente modo operatorio, inspirado en gran parte en el seguido por el mismo Grignard (*). En un matraz de unos 150 c. c. de capacidad (**), se introduce un décimo de molécula-gramo de magnesio cortado en hilos de medio milímetro de espesor, y de cuatro á cinco milímetros de longitud, perfectamente limpios, desengrasados y desecados previamente en la estufa á 120°; el matraz va montado al aire y obturado por un tapón con dos orificios, destinados á recibir un tubo de bromo (tubo ampolla, con tapón y llave), y un codillo en ángulo obtuso que le une con un refrigerante de reflujo. Se coloca en la ampolla una mezcla formada por $^1/_{10}$ de molécula-gramo del haluro alcohólico y un volumen igual de éter anhidro, y se hace caer, gota á gota, sobre el magnesio, de modo que le cubra. La reacción se inicia ya con los primeros términos; pero es necesario calentar el matraz en baño de María para los términos elevados. Una vez iniciada aquélla, se deja que continúe lentamente con suave desprendimiento de burbujitas gaseosas, y se regula la temperatura y la caída del resto de la solución etérea de modo que la reacción no se detenga ni el líquido entre en ebullición, consiguiendo la total disolu-

---

(*) Loc. cit.

(**) Para conseguir la absoluta é indispensable desecación del matraz y demás partes del aparato, debe emplearse la corriente de aire seco y caliente que suministra el fuelle de una lámpara de esmaltar, inyectando aquél en el interior del matraz colocado sobre un foco calorífico.

ción del magnesio al cabo de 30-45 minutos. Es conveniente terminar calentando en baño de María, durante unos veinte minutos más, y diluir la masa desde el primer momento de la reacción en unos 30 c. c. de éter. Asi se consigue, como resultado final, un líquido casi incoloro, en el cual están interpuestas pequeñas partículas negras de impurezas del magnesio que no entraron en disolución.

Á pesar de las precauciones citadas acerca de la absoluta sequedad del conjunto reaccionante, siempre aparecen algunos copos blancos de hidrato magnésico adheridos á las paredes del matraz, y debidos á la fácil descomposición del derivado magnésico por el agua. Por esto, su conservación es difícil y no conviene prepararlo más que en el momento de ser utilizado en reacciones ulteriores.

La reacción es general con todos los haluros alcohólicos, y nosotros la hemos ensayado con los siguientes: bromuros de etilo, isobutilo é isoamilo, y ioduros de metilo, etilo é isoamilo. Los cloruros no reaccionan con tanta limpieza y los derivados halogenados de los carburos cíclicos entran en la regla general.

Para conseguir la total disolución del magnesio de los haluros ensayados por nosotros, basta observar las precauciones antedichas de relativa y absoluta sequedad de los cuepos reaccionantes, haciendo notar únicamente que un exceso de haluro alcohólico sobre las cantidades citadas, favorece la reacción, según hemos tenido ocasión de comprobar repetidas veces, y que el exceso de haluro no perjudica para las reacciones ulteriores del derivado órgano-magnésico. Pero en otros casos, la reacción se hace de tal modo difícil, que es necesario iniciarla agregando pequeña cantidad de los cuerpos llamados *activantes*, de acción catalizadora poco conocida; entre ellos, podemos citar el ioduro magnésico preparado según las indicaciones de Baeyer (*), el cinc-

(*) D. *Ch.* G., t. 38, pág. 2.759.

etilo (*), el iodo, el bromo y las aminas terciarias (**). También interesa consignar que, opuesta á esta acción, existe la de otros agentes *retardatrices*, tales como el alcohol, el cloroformo, la acetona, el tetracloruro de carbono y el éter acético (***), que muchas veces pueden acompañar como impurezas á los cuerpos reaccionantes.

El derivado órgano-magnésico en solución etérea, reacciona enérgicamente con el agua, es atacado por el anhidrido carbónico seco y actúa sobre la mayoría de los grupos funcionales orgánicos, formando compuestos de adición descomponibles todos por el agua, á cuyo carácter debe su importancia extraordinaria en la síntesis química la reacción Grignard. La solución etérea, evaporada á la temperatura ordinaria, deja un residuo sólido, blanco, insoluble en el éter, alterable por la luz y el aire, tomando color amarillento y *dotado de un fuerte olor á menta*, cuyo carácter no hemos visto consignado por ningún autor. Según los trabajos de Grignard, este residuo es una combinación del haluro alkil-magnésico con el éter, cosa perfectamente demostrada por Blaise y Tschelintzef.

Constitución de los compuestos de Grignard.

De todo intento hemos dejado para tratar en capítulo aparte la constitución de estas combinaciones órgano-magnésicas. La disolución del magnesio en un haluro alcohólico puede únicamente representarse por alguna de las dos reacciones siguientes:

1.ª $2RX + Mg = MgR_2 + MgX_2$

2.ª $RX + Mg = R - Mg - X$

(*) Reychler, *Bull. Soc. Chim. Franc.*, t. 35, pág. 1.079.
(**) Tschelintzef, *Journ. Soc. phys. chim. R.*, t. 39, pág. 367.
(***) Reychler, *Bull. Soc. chim. Franc.*, t. 35, pág. 803.

pero es evidente que debemos adoptar la segunda, puesto que en la reacción, tal cual la hemos descrito y practicado, no se forma nunca haluro magnésico, que habría de precipitarse en las condiciones en que se opera, ni tampoco derivado alkil-magnésico, también insoluble en el éter, según los trabajos de Löhr y Fleck (*).

Es necesario no olvidar que el haluro de alkil-magnesio no lo aislamos al estado de pureza, sino que queda disuelto en el éter, reteniendo siempre alguna cantidad de éste cuando se evapora la disolución.

Los trabajos de Grignard y los muy recientes de Tschelintzef (**) y Blaise (***) han demostrado que una molécula de éter queda realmente combinada con otra del compuesto órgano-magnésico mixto y no simplemente al estado de éter de cristalización. En las condiciones descritas es solamente una molécula de éter la que entra en combinación. Para explicar este fenómeno es indispensable admitir, como así lo hacen todos los químicos que en este asunto se ocupan, que el oxígeno del éter se hace tetravalente y que los restos del haluro de alkil-magnesio saturan estas dos valencias suplementarias, siendo la constitución del compuesto resultante la de un derivado oxónico, representable por uno de los dos esquemas siguientes, debidos respectivamente á Baeyer y Villiger (****), y á Grignard (*****):

$$\left.\begin{matrix} C_2H_5 \\ C_2H_5 \end{matrix}\right\rangle O \left\langle\begin{matrix} Mg-R \\ X \end{matrix}\right. \qquad \left.\begin{matrix} C_2H_5 \\ C_2H_5 \end{matrix}\right\rangle O \left\langle\begin{matrix} R \\ Mg-X \end{matrix}\right.$$

Remitimos al lector á los trabajos originales de los químí-

(*) Loc. cit.
(**) Loc. cit.
(***) D. *Chem.* G., t. 37, pág. 2.084; t. 38, pág. 3.664; t. 39, página 773.
(****) C. R., t. 144, pág. 83.
(*****) Loc. cit.

cos citados y de Mr. Blaise (*), en los cuales encontrará profusamente razonadas las defensas de ambas fórmulas generales, pudiendo asegurar que el estado actual de la cuestión no permite decidirse, sin reservas, por ninguna de las dos.

Es muy digno de hacer notar las investigaciones de Tschelintzef (**), según las cuales, no es solamente en el seno del éter donde se forman estas combinaciones, sino también, y de un modo general, en presencia de una amina terciaria (***), la cual queda combinada, del mismo modo que lo hace el éter, con el haluro de alkil-magnesio, conforme á los dos esquemas siguientes, análogos á los antedichos:

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 - \\ R_3 \end{matrix}\!\!> N < \begin{matrix} R \\ Mg - X \end{matrix} \qquad \begin{matrix} R_1 \\ R_2 - \\ R_3 \end{matrix}\!\!> N < \begin{matrix} Mg - R \\ X \end{matrix}$$

El citado químico ruso ha conseguido la reacción del magnesio y el haluro alcohólico operando en toda clase de disolventes neutros, tales como el benceno, tolueno, éter de petróleo, etc., con tal que contengan una pequeña cantidad de dimetil-anilina ú otra amina terciaria. Esto parece demostrar que tanto el éter como la anilina ejercen sólo papel de catalizadores, siendo únicamente necesarios para la primera fase de la reacción, conforme á las ecuaciones siguientes:

$$RX + \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix}\!\!> O = \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix}\!\!> O < \begin{matrix} R \\ X \end{matrix} ;$$

$$RX + \begin{matrix} R_1 \\ R_2 - \\ R_3 \end{matrix}\!\!> N = \begin{matrix} R_1 \\ R_2 - \\ R_3 \end{matrix}\!\!> N < \begin{matrix} R \\ X \end{matrix} ;$$

(*) *Bull. Soc. Chim. de France*, 4.ª serie, t. 1.º, pág. 611; t. 35, página 91.

(**) Loc. cit.

(***) Blaise, Zeliuski, Archibald y otros técnicos han probado que el mismo efecto se consigue empleando cualquier éter-óxido, acetal ó éter-sal.

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix}\!\!>\!\!O\!<\!\!\begin{matrix} R \\ X \end{matrix} + Mg = \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix}\!\!>\!\!O\!<\!\!\begin{matrix} Mg-R \\ X \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2- \\ R_3 \end{matrix}\!\!>\!\!N\!<\!\!\begin{matrix} R \\ X \end{matrix} + Mg = \begin{matrix} R_1 \\ R_2- \\ R_3 \end{matrix}\!\!>\!\!N\!<\!\!\begin{matrix} Mg-R \\ X \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix}\!\!>\!\!O\!<\!\!\begin{matrix} Mg-R \\ X \end{matrix} = \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix}\!\!>\!\!O + R - Mg - X;$$

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2- \\ R_3 \end{matrix}\!\!>\!\!N\!<\!\!\begin{matrix} Mg-R \\ X \end{matrix} = \begin{matrix} R_1 \\ R_2- \\ R_3 \end{matrix}\!\!>\!\!N + R - Mg - X;$$

adoptando los esquemas de Baeyer y Villiger.

Siguiendo el sistema de generalización que tan fecundo es en Química, pensamos que la acción catalítica mencionada puede extenderse á todos aquellos cuerpos que posean un elemento de valencia variable, y, en su consecuencia, tenemos en plan de trabajo el ensayar sulfuros de alkilos en sustitución del éter ó de la amina terciaria, puesto que, en dichas sustancias, funciona el azufre como bivalente, siendo susceptible de pasar fácilmente á tetravalente; todo ello se encuentra íntimamente relacionado con la estereo-isomeria del oxígeno, nitrógeno y azufre, y se puede calcular con facilidad el interés extraordinario que estos estudios tienen en la Química orgánica teórica, demostrando así que la reacción Grignard abre amplio campo á la investigación científica en todos sus órdenes.

Reacción de los compuestos de Grignard (etéreo-alkilhaluros de magnesio) con los principales grupos funcionales orgánicos.

La importancia principal que estos compuestos tienen deriva de la facilidad extraordinaria con que entran en reacción con casi todas las especies químicas. Los alcoholes y fenoles, los óxidos de etileno, los aldehídos y cetonas, los éteres-

sales, los cloruros y anhidridos de ácidos, el óxido y anhidrido carbónico, los cianatos y sulfocionatos, los nitrilos y otras muchas funciones químicas, se combinan directa é íntegramente, y en el seno del éter, con los haluros de alkilmagnesio, formando combinaciones descomponibles por el agua, para resolverse en iodhidrato magnésico y otros variados cuerpos de síntesis. Nosotros hemos practicado esta acción utilizando los bromuros y ioduros de metil, etil, isobutil é isoamil-magnesio sobre el ortonitrobenzaldehido, carbodiamida, carvona, benzofenona, undecanona, glucosa, butanona y aldehido isovalérico.

Siempre que en un compuesto exista un doble enlace entre dos átomos iguales ó distintos, puede asegurarse que reaccionará con el compuesto órgano-magnésico mixto, y que la combinación resultante se descompondrá por el agua, fijándose el oxhidrilo en uno de los eslabones del doble enlace. Esto constituye un método de obtención sintética de alcoholes á partir de aldehidos, cetonas ó éteres-sales, y cetonas á partir de cloruros, anhídridos de ácidos ó nitrilos. Por este medio hemos conseguido la obtención sintética del metil-2-butanol-2, del nitro-fenil-isoamil-carbinol, del ortodimetil-isopropenil-ciclohexanol, y continuamos las investigaciones con objeto de obtener otros varios compuestos, cuyo estudio detallado, así como el de los anteriores, reservamos para otras Memorias.

El método operatorio es simplemente el mismo cuando se trata de hacer reaccionar las combinaciones órgano-magnésicas con un aldehido, una cetona ó un éter-sal. Nosotros hemos procedido siempre del modo siguiente: En el mismo matraz en que se originó el compuesto magnésico disuelto en éter, se hace caer, gota á gota, por medio de una ampolla de llave, una mezcla de volúmenes iguales del cuerpo reaccionante y de éter anhidro; las cantidades han de ser sensiblemente proporcionales á sus pesos moleculares. La reacción prodúcese con energía variable, pero siempre inten-

sa, haciéndose necesario conducir la operación con lentitud y enfriar exteriormente el matraz. Cuando toda la mezcla ha sido introducida en éste, se calienta en baño de María durante algunas horas, terminando por verter su contenido en agua bien fría y disolver la magnesia precipitada, por adición de pequeñas porciones de ácido acético diluído. Queda así el líquido dividido en dos capas, las cuales se separan por decantación. La superior, etérea, previamente lavada con carbonato ácido de sodio y agitada con bisulfito sódico (para precipitar el aldehido ó cetona no reaccionantes), se destila con precaución con objeto de separar el éter, rectificando el residuo para purificar el alcohol que se busca. Si éste es soluble en agua, se aprovecha la capa inferior acuosa para someterla á un arrastre con vapor de agua y separar el alcohol formado en la porción arrastrada, empleando carbonato potásico.

La serie de reacciones generales que se producen, son las siguientes:

$$R-CHO+R'-Mg-X=R-C\left\langle\begin{matrix}H\\-O-Mg-X\\R'\end{matrix}\right.$$

$$2R-C\left\langle\begin{matrix}H\\-O-Mg-X\\R'\end{matrix}\right.+2H_2O=2R-C\left\langle\begin{matrix}H\\-OH\\R'\end{matrix}\right.+$$
$$+MgX_2+Mg(OH)_2$$

$$\begin{matrix}R\\R_1\end{matrix}\Big\rangle CO+R'-Mg-X=\begin{matrix}R\\R_1\end{matrix}\Big\rangle C\left\langle\begin{matrix}O-Mg-X\\R'\end{matrix}\right.$$

$$2\begin{matrix}R\\R_1\end{matrix}\Big\rangle C\left\langle\begin{matrix}O-Mg-X\\R'\end{matrix}\right.+2H_2O=\begin{matrix}R\\R_1\end{matrix}\Big\rangle C\left\langle\begin{matrix}OH\\R'\end{matrix}\right.+$$
$$+MgX_2+Mg(OH)_2$$

pudiendo repetirse, á propósito de la interpretación de estas ecuaciones, lo dicho al tratar de la verdadera constitución de los haluros de alkil-magnesio. Aun no está fuera de discu-

sión el que el elemento halógeno vaya unido directamente al carbono ó al magnesio en la primera fase de la reacción.

Practicando esta marcha, que es la recomendada por Grignard, hemos tenido ocasión de modificarla en algunos detalles, que pueden condensarse en las siguientes observaciones: si el aldehido ó cetona es insoluble ó poco soluble en el éter, como sucede con el ortonitrobenzaldehido, es necesario invertir la posición de los cuerpos reaccionantes y hacer caer la solución etérea del haluro de alkil-magnesio sobre el aldehido colocado en el fondo del matraz, debajo de una capa de éter. Es conveniente emplear un exceso del compuesto magnésico sobre las cantidades equimoleculares, porque es de más fácil eliminación en las separaciones ulteriores que el aldehido ó cetona. La calefacción de la mezcla en baño de María debe sustituirse por un reposo de veinticuatro horas, á la temperatura del laboratorio, cuando se trate de compuestos muy volátiles ó muy descomponibles, por una calefacción local fácil de producir á pesar de utilizar el intermedio del dicho baño; á veces, basta aprovechar la pequeña cantidad de calor que puede suministrar una bombilla eléctrica de 10 bujías colocada debajo del mismo.

La descomposición del compuesto resultante debe hacerse en agua destilada y en vasija rodeada de mezcla frigorífica; la descomposición por medio del hielo, que recomienda Grignard, no es práctica ni asegura la pureza del cuerpo que se trata de obtener.

Para disolver la magnesia producida en esta descomposición, conviene utilizar el ácido acético de preferencia al clorhídrico, la dilución del ácido que nos ha dado mejor resultado es la correspondiente á un 5 por 100 de ácido acético cristalizable, y su adición debe efectuarse solamente hasta muy débil reacción ácida al tornasol. El lavado de la solución etérea con carbonato ácido de sodio, tiene por objeto el no precipitar las sales magnésicas que puede haber disuelto dicho éter, y neutralizar, al mismo tiempo, el exceso

del ácido acético empleado, deteniendo, claro es, su adición cuando cese la efervescencia en el líquido y desaparezca la reacción ácida de éste. La separación del aldehido ó cetona excedente por medio del bisulfito sódico, conviene únicamente cuando aquellos cuerpos tienen punto de ebullición próximo al de la substancia que se trata de obtener, pues en caso contrario, la rectificación del producto resultante origina una buena separación de aquéllos. Debe continuarse la investigación sobre ambas capas, acuosa y etérea, puesto que en la mayoría de los casos el alcohol engendrado es soluble en ambos vehículos. Si se trata de obtener un alcohol terciario, ha de tenerse en cuenta que, deshidratándose estos cuerpos con gran facilidad, se recogerá en lugar de ellos el hidrocarburo etilénico correspondiente, lo cual cambia, como es natural, los puntos de ebullición que se hubieran previsto.

Si es sólido y fijo el alcohol obtenido, es necesario recogerlo en el resíduo de la destilación mediante un disolvente adecuado. Cuando es soluble en el agua, puede suceder que no sea arrastrable por el vapor de este líqutdo, en cuyo caso, ha de separarse de la disolución por su tranformación al estado de éter-sal ó por su insolubilidad en otro vehículo. El haluro de alkil-magnesio excedente se descompone en el tratamiento por agua originando el hidrocarburo correspondiente al radical alcohólico, cuyo producto secundario acompaña muehas veces el alcohol buscado, siendo necesaria su completa separación por vía destilatoria.

XXIII.—Sobre los cambios de conductancia de la manganina durante el recocido.

(Continuación.)

POR B. CABRERA.

Resultados.

a) Curvas de recocido.

Dificultades imposibles de vencer impidieron que las muestras estudiadas permanecieran en el baño, á la temperatura á que el recocido se efectuaba, durante todo el tiempo necesario para alcanzar el estado permanente, dentro de los límites que indicaremos más abajo. Así cada una de las curvas se ha obtenido por trozos que corresponden á tiempos variables entre dos y diez horas, trozos que enlazamos sumando al tiempo de la última lectura el intervalo que aun permaneció la muestra sometida al calentamiento. En los cuadros que siguen únicamente consignamos los tiempos transcurridos desde la primera inmersión, indicando en tipo distinto y entre paréntesis el instante de cada una de las inmersiones sucesivas.

Algunas veces la temperatura del baño B_2 difería en algunas décimas de la temperatura fija elegida; pero en estos casos los valores de las conductancias fueron corregidos, no obstante ser generalmente los errores que pueden provenir de esta causa del orden de magnitud de los errores fortuitos. Más importancia tienen los correspondientes á un cambio igual en el baño B_1; pero en este último procuramos siempre ejecutar las lecturas en las mismas circunstancias.

Ni los cuadros, ni las curvas contienen, en la mayoría de los casos, la serie completa que corresponde á cada muestra; pues para reconocer la ley general del fenómeno basta

con lo transcrito. Seguimos siempre el recocido hasta que los cambios de conductancia en algunas horas eran del orden de algunas millonésimas, y, por ende, comparables á los errores experimentales: el tiempo de recocido necesario para lograr este fin se consigna para cada muestra.

Dicho se está que tal criterio no permite afirmar que todas las muestras se encuentren recocidas igualmente al dar nosotros por terminada la operación, pues dicho fenómeno consiste en la aceleración, engendrada por el incremento de temperatura, de una modificación de estructura ó naturaleza que en todo caso se produce; de suerte que una misma velocidad de transformación tiene importancia muy diversa, según la temperatura á que tiene lugar. Por esta razón no consignamos ninguna muestra anterior al núm. 11; pues todas ellas fueron recocidas á 50° y 60°, temperaturas para las cuales los cambios son muy lentos.

El intervalo que separa las lecturas consecutivas depende de la región de la curva á que se refieren. El conjunto de todas estas lecturas se ha utilizado para el trazado de las curvas contenidas en las figuras 5, 6 y 7; pero para evitar la confusión de puntos que esto engendra en algunas regiones, en estas únicamente marcamos los necesarios para que puedan apreciarse sus distancias á la línea.

Temperatura del recocido, 74°.—Duración total, ..

FECHA	HILO, 0,5 m/m MUESTRA NÚM. 11		HILO, 0,8 m/m MUESTRA NÚM. 12		HILO, 0,8 m/m MUESTRA NÚM. 13	
	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.
1-VIII-1908....	7m 10s	.986944	1m 50s	.993896	5m 50s	.989178
	11 30	.986966	6 45	.993934	11 0	.989192
	16 10	.987000	11 20	.993951	19 40	.989238
	33 20	.987053	30 50	.994041	27 0	.989267
	51 15	.987115	51 0	.994110	48 50	.989325
	1h 13 15	.987192	1h 7 30	.994158		
	1 33 0	.987235				
3-VIII.... ..	(1h 42m 30s)		(1h 27m 0s)		(1h 8m 50s)	
	1h 46m 25s	.987274	1h 30m 15s	.994235	1h 12m 25s	.989412
	1 51 35	.987280	1 35 0	.994245	1 22 35	.989427
	1 58 15	.987289	1 39 35	.994251	1 32 20	.989432
	2 22 50	.987339	1 59 45	.994290	1 48 40	.989450
	2 43 10	.987393	2 17 40	.994309	2 5 20	.989474
	2 58 35	.987409	2 33 0	.994328	2 21 15	.989488
	3 17 45	.987435	2 50 15	.994345	2 44 35	.989510
	3 41 0	.987462	3 13 25	.994374		
4-VIII.....	(3h 57m 0s)		(1h 17m 0s)		(3h 0m 0s)	
	3h 59m 45s	.987516	3h 27m 10s	.994399	3h 3m 15s	.989548
	4 4 15	.987517	3 33 25	.994400	3 9 10	.989549
	4 12 30	.987519	3 47 30	.994418	3 19 45	.989541
	4 32 45	.987537	4 18 50	.994442	3 30 40	.989565
	4 55 10	.987569	4 26 35	.994459	3 59 45	.989570
	5 43 0	.987614	5 5 10	.994492	4 37 20	.989596
	6 3 50	.987656	5 36 20	.994544	5 6 15	.989634
	6 40 40	.987671	6 2 40	.994540	5 19 25	.989636
5-VIII.....	(6h 55m 40s)		(6h 13m 0s)		(5h 39m 0s)	
	7h 0m 50s	.987690	6h 15m 20s	.994587	5h 44m 0s	.989676
	7 15 40	.987698	6 24 0	.994571	5 53 25	.989672
	7 41 40	.987710	6 46 0	.994593	6 0 20	.989669
	8 10 30	.987758	7 12 10	.994611	6 31 50	.989673
	8 36 35	.987771	7 40 0	.994640	7 4 0	.989705
	9 7 50	.987787	8 5 25	.994659	7 33 30	.989719
			8 38 40	.994677	8 4 40	.989740

FECHA	HILO, 0,5 m/m MUESTRA NÚM. 11		HILO, 0,8 m/m MUESTRA NÚM. 12		HILO, 0,8 m/m MUESTRA NÚM. 13	
	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.
6-VIII-1908....	(9^h 18^m 0^s)		(8^h 50^m 0^s)		(8^h 24^m 0^s)	
	9h 21m 10s	.987814	8h 52m 30s	.994664	8h 28m 45s	.989749
	9 38 15	.987820	9 4 25	.994663	8 35 20	.989757
	9 43 25	.987829	9 36 30	.994686	9 11 50	.989757
	10 21 0	.987843	10 10 40	.994724	9 43 45	.989776
	10 51 40	.987862	10 48 0	.994724	10 16 20	.989783
	11 25 25	.987885	11 15 0	.994742	10 45 0	.989795
	11 51 25	.987890	11 48 30	.994751	11 20 30	.989817
	12 33 40	.987910				
7-VIII.....	(12^h 44^m 0^s)		(12^h 10^m 0^s)		(11^h 40^m 0^s)	
	12h 47m 40s	.987921	12h 12m 40s	.994800	11h 46m 15s	.989838
	12 54 50	.987918	12 18 10	.994800	11 49 50	.989828
	12 56 45	.987921	12 25 45	.994774	11 55 35	.989839
	13 2 0	.987922	12 34 35	.994786	12 10 15	.989839
	13 23 40	.987933	12 55 35	.994818	12 32 45	.989840
	14 3 15	.987948	13 27 15	.994805	13 5 20	.989867
	14 35 10	.987948	15 6 50	.994831	13 42 10	.989868
	15 3 0	.987961	15 40 5	.994830	14 21 45	.989870
8-VIII.....	(15^h 38^m 0^s)		(15^h 50^m 0^s)		(14^h 32^m 0^s)	
	15h 41m 45s	.987999	15h 52m 50s	.994863	14h 35m 0s	.989904
	15 48 20	.987985	16 7 50	.994853	14 43 20	.989912
	15 58 40	.987987	16 15 10	.994887	15 0 20	.989912
	16 30 0	.988013	16 43 50	.994903	15 33 40	.989929
	17 2 45	.988018	17 21 35	.994918	16 8 10	.989922
	17 53 50	.988037	18 14 25	.994918	16 58 0	.989930
10-VIII.....	(18^h 14^m 0^s)		(18^h 26^m 0^s)		(17^h 8^m 0^s)	
	18h 18m 0s	.988032	18h 30m 10s	.994881	17h 10m 0s	.989912
	18 23 30	.988034	18 36 30	.994854	17 15 10	.989918
	18 27 30	.988032	18 46 40	.994896	17 22 50	.989919
	18 35 0	.988034	18 52 20	.994904	17 32 20	.989921
	18 44 40	.988021	19 29 0	.994921	17 42 20	.989922
	18 51 10	.988055	20 2 50	.994938	18 6 50	.989924
	19 18 35	.988041				
	19 49 55	.988067				
11-VIII.....	(20^h 13^m 0^s)		(20^h 22^m 0^s)		(18^h 22^m 0^s)	
	20h 18m 50s	.988051	20h 36m 50s	.994943	18h 33m 0s	.989918
	20 21 50	.988054	20 49 35	.994956	18 47 50	.989924
	20 26 50	.988054	21 0 45	.994958	18 56 26	.989917
	20 33 40	.988054	21 15 10	.994963		
	20 49 0	.988061	21 37 50	.994966		
	20 54 50	.988062	22 28 0	.994973		
	22 7 30	.988084				
	22 46 40	.988134				

FECHA	HILO, 0,5 m/m MUESTRA NÚM. 11		HILO, 0,8 m/m MUESTRA NÚM. 12		HILO, 0,8 m/m MUESTRA NÚM. 13	
	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.
13-VIII-1908...	(23h 0m 0s)		(22h 40m 0s)		(19h 22m 0s)	
	23h 10m 30s	.988111	22h 45m 50s	.994970	19h 28m 20s	.989933
	23 33 0	.988105	22 58 15	.994983	19 35 0	.989932
	24 1 15	.988111	23 17 10	.994982	19 50 0	.989932
	24 47 15	.988132	23 44 40	.994994	20 3 20	.989974
	25 19 40	.988133			21 14 15	.989954
	25 52 10	.988161				
14-VIII.....	(26h 5m 0s)		(24h 0m 0s)		(21h 25m 0s)	
	26h 25m 25s	.988185	24h 5m 15s	.994955	21h 30m 45s	.989960
	27 39 25	.988186	24 23 30	.995015	22 3 15	.989970
	28 31 25	.988197	25 4 10	.995013	22 48 30	.989965
			25 48 15	.995005	23 21 30	.989979
			26 10 30	.995043	23 54 45	.989990
			26 43 45	.995023		
18-VIII.....	(31h 21m 0s)					
	31h 25m 40s	.988269				
	31 34 40	.988265				
	31 50 30	.988266				
	32 6 0	.988271				
	32 21 35	.988282				
	33 11 0	.988285				
	34 26 0	.988306				

Temperatura del recocido, 85°.—Duración total, 52h.

FECHA	HILO, 0,5 m/m MUESTRA NÚM. 14 Preparada desde Agosto de 1907.		HILO, 0,5 m/m MUESTRA NÚM. 15 (Recién preparada).		HILO, 0,8 m/m MUESTRA NÚM. 16	
	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.
22-VIII-1908...	3m 40s	1.004412	7m 45s	.998187	10m 15s	1.003781
	8 40	1.004438	16 0	.998252	18 20	1.003837
	23 35	1.004509	29 50	.998353	33 20	1.003945
	47 0	1.004611	1h 2 20	.998562	53 30	1.004006
	1h 16 45	1.004760	1 39 10	.998721	1h 27 55	1.004105
	1 51 50	1.004886	2 12 50	.998858	2 2 0	1.004172
	2 25 50	1.004979				

FECHA	HILO, 0'5 m/m MUESTRA NÚM. 14 Preparada desde Agosto de 1907.		HILO, 0,5 m/m MUESTRA NÚM. 15 (Recién preparada).		HILO, 0,8 m/m MUESTRA NÚM. 16	
	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.
24-VIII-1908 . . .	(2^h 29^m 0^s)		(2^h 28^m 0^s)		(2^h 12^m 0^s)	
	2h 34m 0s	1.005048	2h 33m 0s	.998954	2h 17m 20s	1.004214
	3 1 0	1.005086	2 55 45	.998976	2 34 15	1.004242
	3 36 30	1.005166	3 49 30	.999146	3 35 15	1.004330
	4 23 0	1.005248	4 35 0	.999212	4 21 40	1.004375
25-VIII	(4^h 33^m 0^s)		(4^h 50^m 0^s)		(4^h 40^m 0^s)	
	4h 43m 15s	1.005275	4h 53m 30s	.999257	4h 42m 15s	1.004416
	4 58 15	1.005294	5 24 30	.999261	5 8 45	1.004418
	7 21 45	1.005454	7 30 30	.999426	7 4 0	1.004503
	8 18 15	1.005514	8 14 15	.999493	7 53 0	1.004535
	10 17 0	1.005601	10 24 0	.999611	10 1 0	1.004600
	10 53 30	1.005627	10 59 30	.999622	10 38 0	1.004611
	11 45 30	1.005656	11 56 30	.999654	11 35 15	1.004613
	12 42 30	1.005700	12 44 15	.999709	12 19 45	1.004654
	13 45 0	1.005735	13 45 30	.999755	13 22 15	1.004685
	14 50 15	1.005751	14 59 30	.999771	14 36 30	1.004678
	15 16 0	1.005764	15 25 0	.999795	15 4 30	1.004714
26-VIII	(15^h 26^m 0^s)		(15^h 40^m 0^s)		(15^h 20^m 0^s)	
	15h 28m 50s	1.005817	15h 44m 10s	.999824	15h 22m 20s	1.004719
	15 31 30	1.005798	16 46 45	.999821	15 28 55	1.004703
	15 34 15	1.005796	15 59 40	.999821	15 38 5	1.004695
	15 37 50	1.005796	16 12 0	.999825	15 47 10	1.004696
	15 41 0	1.005794	16 50 30	.999828	16 38 55	1.004730
	15 46 30	1.005790	17 42 40	.999855	17 12 20	1.004728
	15 52 30	1.005790	18 12 45	.999871		
	15 57 55	1.005792				
	16 34 55	1.005802				
	17 16 40	1.005810				
	18 5 5	1.005843				
	18 35 10	1.005849				
27-VIII	(18^h 45^m 0^s)		(18^h 28^m 0^s)		(17^h 40^m 0^s)	
	18h 47m 15s	1.005890	18h 32m 11s	.999926	17h 46m 0s	1.004760
	19 5 15	1.005880	18 51 0	.999913	18 14 15	1.004740
	21 19 0	1.005918	21 2 30	.999980	20 19 30	1.004776
	22 9 15	1.005929	21 54 0	.999991	21 8 0	1.004783
	22 32 30	1.005927	22 19 0	.999993	21 33 45	1.004800
	24 33 0	1.005984	24 18 0	1.000032	23 32 45	1.004797
	25 31 30	1.005986	25 8 30	1.000047	24 25 0	1.004805
	26 18 30	1.006015	26 3 30	1.000090	25 6 30	1.004820
	27 49 45	1.006024	27 33 0	1.000113	26 49 15	1.004849
	28 46 30	1.006043	28 28 30	1.000125	27 44 30	1.004856
	29 32 30	1.006054	30 19 30	1.000185	28 34 30	1.004874

FECHA	HILO, 0,5 m/m MUESTRA NÚM. 14 Preparada desde Agosto de 1907.		HILO, 0,5 m/m MUESTRA NÚM. 15 Recién preparada.		HILO, 0,8 m/m MEUSTRA NÚM. 16	
	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.
28-VIII-1908...	(29h 43m 0s)		(30h 32m 0s)		(29h 0m 0s)	
	29h 47m 30s	1.006086	30h 36m 40s	1.000172	29h 4m 0s	1.004896
	29 52 50	1.006085	30 40 20	1.000154	29 10 20	1.004884
	30 7 30	1.006078	30 54 0	1.000148	29 17 20	1.004883
	30 17 0	1.006083	31 5 0	1.000151	29 29 0	1.004887
	30 46 0	1.006086	32 19 20	1.000166	29 38 0	1.004887
	31 0 0	1.006091			31 19 35	1.004893
29-VIII.....	(31h 10m 0s)		(32h 34m 0s)		(31h 32m 0s)	
	31h 14m 30s	1.006112	32h 38m 30s	1.000209	31h 39m 15s	1.004903
	31 53 15	1.006094	33 17 30	1.000192	32 11 0	1.004885
	33 40 30	1.006111	35 2 15	1.000215	33 56 0	1.004893
	34 25 30	1.006129	35 46 0	1.000230	34 42 30	1.004906
	35 27 30	1.006137	36 49 30	1.000246	35 43 0	1.004903
	37 30 30	1.006166	38 51 30	1.000281	37 46 15	1.004951

Temperatura del recocido, 100°.—Duración total, 65 h.

FECHA	HILO, 0,5 m/m MUESTRA NÚM. 17		HILO, 0,5 m/m MUESTRA NÚM. 18		HILO, 0,8 m/m MUESTRA NÚM. 19	
	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.
9-IX-1908.....	3m 30s	.992515	3m 0s	.998772	4m 0s	.999131
	6 45	.992645	5 45	.998865	12 30	.999247
	21 30	.992970	20 30	.999184	24 0	.999371
	49 15	.993239	43 15	.999471	46 15	.999524
	1h 12 30	.993424	1h 5 15	.999690	1h 12 15	.999645
	1 35 45	.993561	1 31 15	.999853	4 30 0	.999972
	4 44 30	.994141	4 43 30	1.000454	5 1 30	1.000013
	5 16 25	.994204	5 12 30	1.000504	5 44 0	1.000032
	6 1 0	.994268	5 59 0	1.000594	7 0 30	1.000094
	7 3 0	.994365	7 14 45	1.000718	7 52 0	1.000150
	8 3 15	.994429	7 59 15	1.000777	8 15 15	1.000171
	8 37 0	.994486	8 33 30	1.000830		

FECHA	HILO, 0,5 m/m MUESTRA NÚM. 17		HILO, 0,5 m/m MUESTRA NÚM. 18		HILO, 0,8 m/m MUESTRA NÚM. 19	
	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.
10-IX-1908	(9^h 0^m 0^s)		(8^h 48^m 0^s)		(8^h 25^m 0^s)	
	9h 1m 45s	.994505	8h 51m 30s	1.000867	8h 34m 0s	1.000186
	9 4 45	.994489	8 56 0	1.000857	8 38 0	1.000186
	9 8 15	.994465	8 59 0	1.000857	8 49 30	1.000188
	9 13 15	.994469	9 4 0	1.000853	9 26 0	1.000205
	9 15 45	.994469	9 30 0	1.000880	10 21 15	1.000236
	9 19 45	.994476	10 5 30	1.000916	13 38 0	1.000332
	9 59 45	.994545	11 2 0	1.000973	15 3 15	1.000350
	10 33 0	.994562	14 18 0	1.001162	16 7 0	1.000387
	11 32 0	.994621	15 42 45	1.001242	17 11 30	1.000397
	14 38 15	.994820	16 40 15	1.001290		
	16 10 0	.994876	17 48 0	1.001354		
	17 10 15	.994914				
	18 18 15	.994962				
11-IX.....	(18^h 40^m 0^s)		(18^h 8^m 0^s)		(17^h 21^m 0^s)	
	18h 41m 30s	.994985	18h 12m 15s	1.001372	17h 23m 50s	1.000427
	18 15 15	.994968	18 21 15	1.001358	17 27 10	1.000417
	18 51 15	.994966	18 30 0	1.001370	17 33 0	1.000417
	18 57 50	.994966	18 39 40	1.001372	17 42 0	1.000418
	19 7 20	.994975	18 47 30	1.001376	17 53 40	1.000432
	19 54 40	.995019	19 34 0	1.001401	18 5 53	1.000420
	21 5 45	.995045	20 12 10	1.001434	18 46 0	1.000443
	23 59 15	.995148	22 59 35	1.001516	21 25 20	1.000476
	25 23 50	.995216	24 26 50	1.001602	22 52 30	1.000524
	26 38 15	.995258	25 41 45	1.001639	24 14 40	1.000563
	27 45 15	.995298	26 46 10	1.001662	25 15 35	1.000576
12-IX.....	(28^h 10^m 0^s)		(27^h 1^m 0^s)		(25^h 30^m 0^s)	
	28h 12m 15s	.995330	27h 3m 15s	1.001754	25h 32m 15s	
	28 19 35	.995304	27 6 15	1.001754	25 36 55	
	28 24 15	.995304	27 10 0	1.001729	25 38 0	
	28 29 15	.995304	27 21 40	1.001723	25 54 10	
	28 55 0	.995322	27 26 45	1.001725	28 36 45	
	29 16 20	.995323	27 49 45	1.001734	29 40 35	
	32 3 20	.995404	30 35 50	1.001837	30 54 0	
	32 57 10	.995431	31 36 0	1.001846	31 50 0	
	34 12 35	.995447	32 48 30	1.001894	32 37 30	
	35 2 30	.995476	33 42 30	1.001937		
	36 0 50	.995522	34 39 0	1.001961		

Temperatura del recocido, 112°.—Duración total, 66 h.

FECHA	HILO, 0,8 m/m MUESTRA NÚM. 20		HILO, 0,5 m/m MUESTRA NÚM. 21		HILO, 0,8 m/m MUESTRA NÚM. 22	
	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.
5-X-1908....	5m 35s	.994336			5m 10s	.997744
	8 10	.994428			19 10	.997994
	15 10	.994563			32 0	.998092
	21 55	.994662			47 5	.998193
	41 30	.994813			57 15	.998248
	54 0	.994862			1h 19 35	.998289
	1h 16 25	.994973			1 28 50	.998351
	1 26 10	.995017			1 52 0	.998423
	1 49 30	.995094			2 3 0	.998456
	4 30 15	.995266			6 28 50	.998918
	5 59 10	.995588			6 45 50	.998948
	6 29 25	.995608			7 13 0	.998955
	6 48 0	.995634			7 32 20	.998993
	7 24 20	.995673				
6 X.....	(7h 34m 0s)				(7h 55m 0s)	
	7h 39m 40s	.995750	2m 5s	.991466	7h 57m 35s	.998967
	7 44 10	.995746	4 55	.991751	8 3 10	.998967
	7 48 55	.995727	12 45	.992140	8 19 20	.998988
	8 45 35	.995798	42 40	.992696	8 52 55	.999048
	9 4 40	.995826	1h 7 15	.992935	9 15 15	.999058
	9 36 30	.995839	1 34 30	.993120	12 31 30	.999474
	12 41 10	.996255	4 46 35	.994771	13 6 20	.999518
	13 32 15	.996321	5 28 15	.994843	14 52 40	.999551
	14 0 25	.996346	6 5 50	.994943	15 13 10	.999562
	14 52 50	.996381	6 40 30	.994996		
	15 25 40	.996416				
7 X.....			(9h 0m 0s)			
			9h 7m 45s	.995182		
			9 13 30	.995176		
			9 22 0	.995166		
			9 31 0	.995167		
			9 40 5	.995181		
8-X.....	(16h 55m 0s)		(10h 5m 0s)		(17h 35m 0s)	
	17h 17m 55s	.996433	10h 24m 10s	.995237	17h 44m 35s	.999616
	17 40 35	.996455	10 56 5	.995267	18 34 30	.999640
	17 21 53	.996447	11 26 40	.995311	18 54 10	.999651
	18 50 0	.996468	12 5 10	.995341	19 37 0	.999670
	19 26 15	.996458	12 33 0	.995373	19 58 40	.999677
	21 58 10	.996546	15 11 55	.995557	22 46 10	.999756
	22 51 50	.996585	16 58 30	.995575	23 19 35	.999759
	24 4 15	.996623	17 32 0	.995680	25 15 20	.999807
	26 16 15	.996661	19 22 0	.995772	26 50 30	.999850

FECHA	HILO, 0,3 m/m MUESTRA NÚM. 20		HILO, 0,5 m/m MUESTRA NÚM. 21		HILO, 0,8 m/m MUESTRA NÚM. 22	
	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.
10-X-1908.....			(19h 40m 0s)		(27h 5m 0s)	
			19h 46m 10s	.995808	27h 9m 45s	.999891
			19 53 0	.995796	27 20 30	.999866
			20 1 15	.995795	27 38 25	.999868
			20 48 0	.995838	27 55 35	.999871
					28 49 0	.999902
13-X.....	(26h 26m 0s)		(22h 50m 0s)		(29h 0m 0s)	
	29h 47m 50s	.996760	26h 21m 55s	.996090	32h 36m 0s	.999977
	31 38 0	.996766	27 51 20	.996131	33 57 30	.999997
	33 3 10	.996800	29 28 45	.996187	35 44 5	1.000022
15-X.....			(29h 48m 0s)			
			31h 16m 35s	.996137		
			32 22 10	.996200		
			36 39 45	.996334		
			37 59 40	.996354		
			39 4 0	.996394		

Temperatura del recocido, 150°.—Duración total, 30 h.

FECHA	HILO, 0,5 m/m MUESTRA NÚM. 23		HILO, 0,5 m/m MUESTRA NÚM. 24		HILO, 0,8 m/m MUESTRA NÚM. 25	
	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.
18-XII-1908....	13m 20s	.977714	11m 50s	.980753	6m 10s	.987337
	16 0	.978016	14 55	.981088	13 15	.987747
	34 10	.979101	36 35	.982373	33 35	.988402
	49 0	.979742	52 20	.982564	39 15	.988480
	1h 26 20	.980517	1h 1 5	.983039	58 30	.988946
	1 55 30	.980883	1 32 50	.983582	1h 13 20	.989098
	2 45 25	.981376	2 31 45	.884165	1 55 30	.989420
	3 33 20	.981647	3 9 15	.984405	2 12 0	.989544
	3 48 15	.981699	3 36 50	.984558	2 56 45	.989763
	4 19 40	.981826	3 57 45	.984634	3 9 15	.989826
	4 34 25	.981913	4 16 30	.984721	3 40 45	.989930
	5 20 45	.982024	4 58 45	.984830	4 9 40	.990026
	5 44 45	.982093	5 32 55	.984901	4 56 35	.990113
	7 12 55	.982246	6 36 25	.985036	5 37 0	.990172
	7 26 50	.982298	7 20 45	.985133	6 48 5	.990280
	8 26 40	.982331	8 29 30	.985195	7 7 5	.990314
	8 42 10	.982349	9 1 40	.985230	7 51 45	.990364
	9 48 15	.982461		.985267	8 12 0	.990388

FECHA	HILO, 0,5 m/m MUESTRA NÚM. 23		HILO, 0,5 m/m MUESTRA NÚM. 24		HILO, 0,8 m/m MUESTRA NÚM. 25	
	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.	Tiempo total.	Conductancia.
19-XII-1908....	(10h 8m 15s)		(9h 52m 0s)		(9h 7m 0s)	
	10h 18m 0s	.982385	9h 59m 15s	.985280	9h 19m 50s	.990388
	10 19 50	.982410	10 15 30	.985286	9 30 50	.990409
	11 5 50	.982474	10 42 55	.985338	9 50 10	.990438
	11 52 45	.982538	11 14 0	.985375	10 8 35	.990453
	12 49 45	.982582	12 24 10	.985424	11 29 0	.990537
	13 9 45	.982586	12 35 55	.985448	11 33 3	.990509
	13 30 30	.982616	13 2 30	.985470	12 19 15	.990501
	14 30 0	.982699	13 56 5	.985504	12 53 45	.990573
	14 50 0	.982710	14 26 10	.985534	13 33 20	.990561
	15 36 35	.982721	14 59 25	.985536	13 57 30	.990580
	16 6 20	.982756	15 42 15	.985572	14 47 50	.990590
	17 3 25	.982788	16 29 10	.985612	15 24 5	.990585
	17 28 50	.982791	17 10 20	.985630	16 11 20	.990631
	18 40 25	.982823	18 9 55	.985644	17 7 45	.990635
21-XII.....	(19h 0m 15s)		(18h 30m 55s)		(17h 31m 45s)	
	19h 16m 45s	.982738	18h 41m 35s	.985697	17h 33m 15s	.990592
	19 47 35	.982793	19 1 50	.985695	17 44 45	.990659
	20 20 45	.982821	19 43 5	.985707	18 34 15	.990705
	21 9 10	.982881	20 20 50	.985736	19 0 15	.990710
	22 17 30	.982930	21 41 40	.985787	20 35 10	.990761
	23 13 0	.982968	22 24 40	.985808	21 4 30	.990775
	27 39 15	.982984	23 4 5	.985851	21 56 45	.990788
	24 26 15	.982988	23 37 10	.985854	22 21 55	.990798
	25 29 45	983050	24 57 35	.985911	24 3 0	.990810
	26 35 55	.983005	26 4 45	.985934	24 51 30	.990844
	27 30 15	.983009	27 5 15	.985954	25 39 0	.990843
	28 26 30	.983041	27 31 20	.985975		

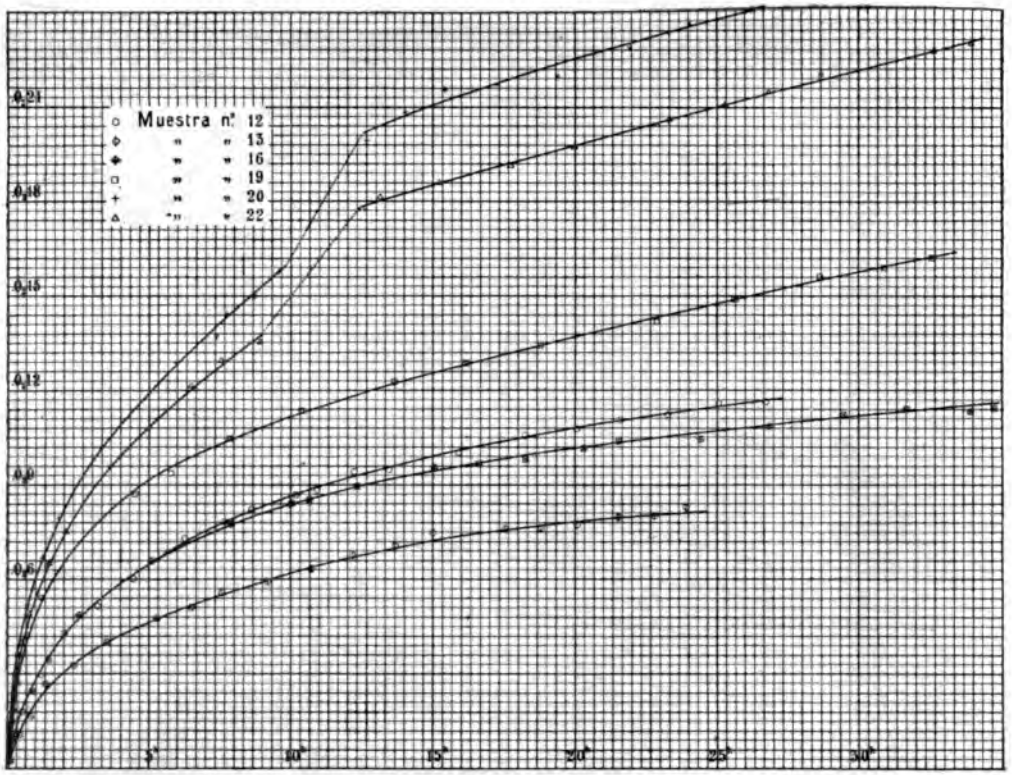


Figura 5.ª

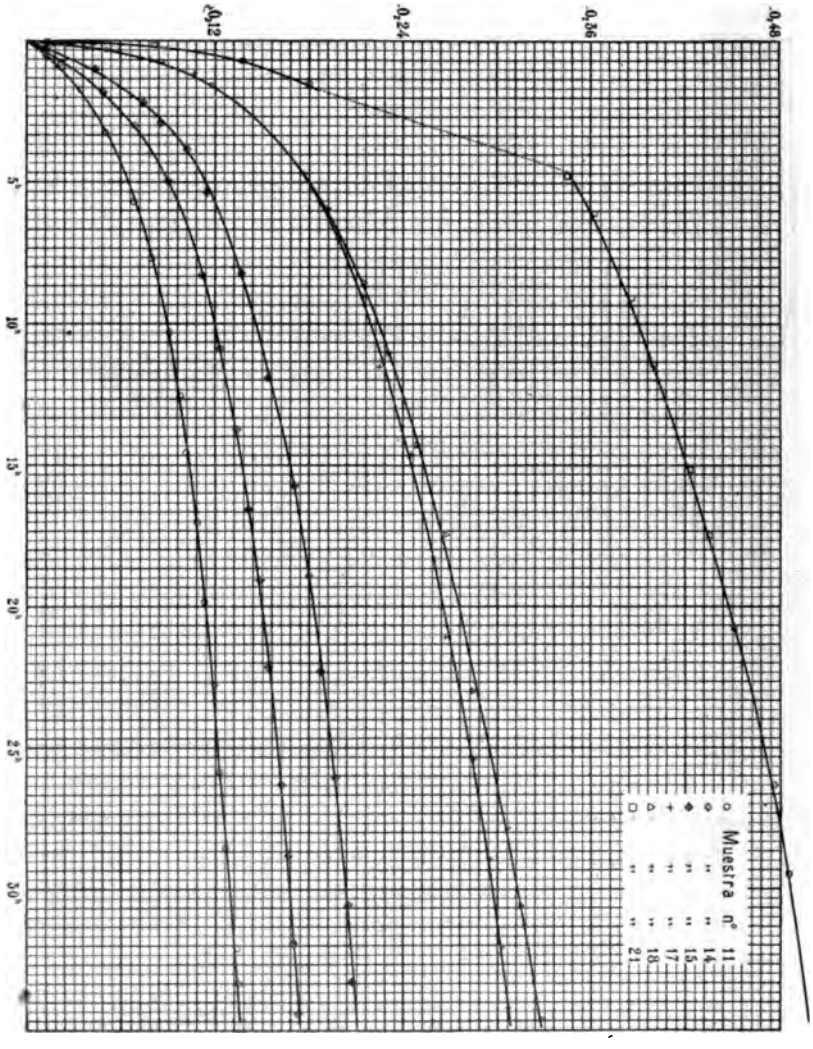


Figura 6.ª

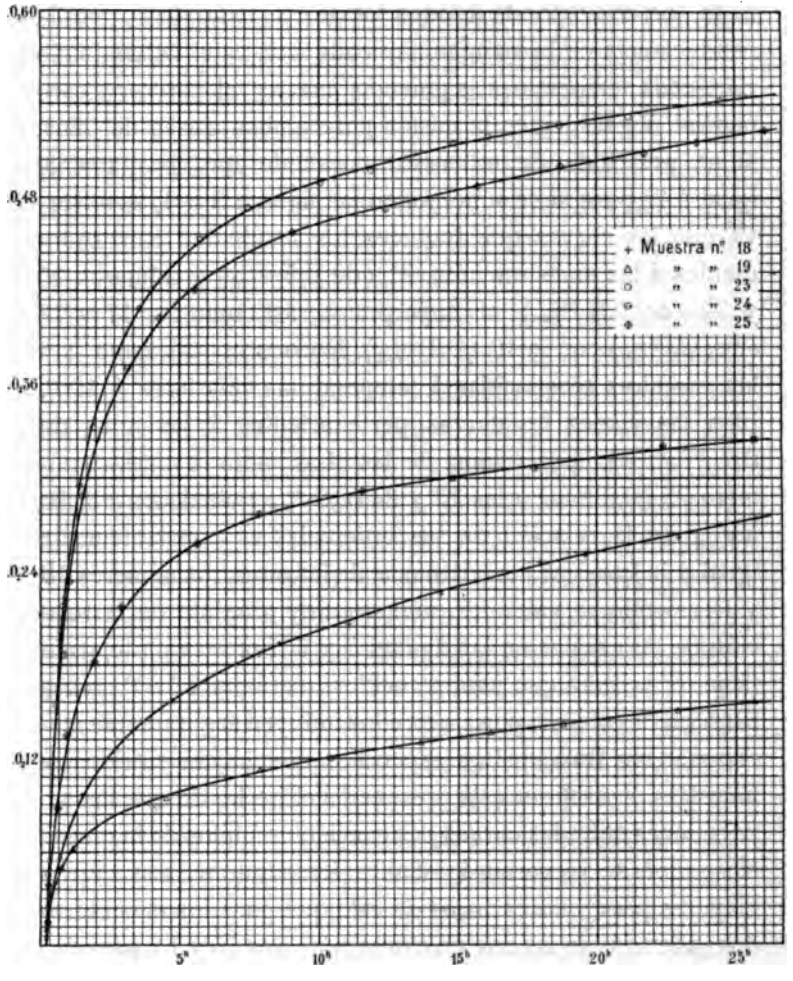


Figura 7.ª

La observación inmediata de los cuadros que anteceden, y mejor la de las figuras 5, 6 y 7 que los traducen graficamente, ponen de manifiesto que la ley general del fenómeno es la que corresponde á todos los de esta naturaleza, pues la conductancia de la manganina tiende á un valor determinado para cada temperatura, siguiendo una ley al parecer exponencial. Y esta ley es la misma para ambas clases de hilos, si se prescinde de un factor constante aproximadamente igual á 2; pues si se superponen las figuras 5 y 6, se observa que las curvas que traducen los resultados correspondientes á las muestras núm. 21 (de 0,5 $^{m}/_{m}$) y números 20 y 22 (de 0,8 $^{m}/_{m}$), se superponen, así como las 17 y 18 (de 0,5 $^{m}/_{m}$) con la 19 (0,8 $^{m}/_{m}$). No ocurre lo mismo con las muestras reconocidas á temperaturas inferiores á 100°, para las cuales las curvas pertenecientes á los hilos de 0,8 $^{m}/_{m}$ están por encima de las otras, pero la muestra número 25 (0,8 $^{m}/_{m}$) y las 23 y 24 (0,5 $^{m}/_{m}$) obedecen á dicha ley, pues la relación de sus ordenadas es constantemente igual á la que liga las ordenanas de las muestras números 18 y 19, siendo su valor 1,7, número muy próximo de la relación de las escalas en las figuras 5 y 6. Por otra parte, nada tiene de extraño que para recocidos inferiores á 100° no sea perceptible esta ley, porque en ellos influyen seguramente mucho más los tratamientos especiales que hayan sufrido las muestras. Y confirma esta presunción el hecho de que las separaciones entre las curvas pertenecientes á hilos de la misma clase que se recuecen á idéntica temperatura, son mucho mayores para valores bajos de ésta que para los más elevados; además, de las dos muestras números 15 y 14, preparadas, la primera veinticuatro horas antes de comenzar el recocido, y la segunda con un año de anticipación, aquélla determina una curva más elevada que ésta. Por último, el mismo hecho de quedar las curvas del hilo de 0,8 $^{m}/_{m}$ por encima, puede aducirse en favor de la hipótesis, por cuanto dicho hilo, por su mayor diámetro, ha sufrido una deforma-

ción mucho más importante que el otro, al envolver á ambos en un toro del mismo diámetro.

Es cierto que las muestras números 20 y 22, recocidas á 112°, muestran una separación tan notable como las 14 y 15, pero en este recocido ha ocurrido seguramente alguna anomalía, que se pone de manifiesto en la quebradura que presentan las curvas citadas y la 21, anomalía que bien pudo consistir en una elevación de temperatura por haber fallado el regulador, pues corresponde al periodo comprendido entre las 13^h y 16^h 30^m del día 6 de Octubre, durante el cual la marcha de aquél no pudo vigilarse.

Pero la circunstancia más importante que puede deducirse de los cuadros anteriormente transcritos, es la modificación de la ley, según la cual crece la conductancia de un hilo con el tiempo, cuando se la lleva rápidamente á la temperatura del recocido, después de haber sufrido esta operación durante un periodo anterior variable. Cuando se sumerge en el baño por primera vez una muestra, y siempre que la temperatura de aquél exceda en 40° ó 50° á la ambiente, la conductancia crece desde el primer momento rápidamente, pero cuando al instante de la inmersión ha precedido un recocido anterior por tiempo variable, en los primeros minutos al crecimiento sustitúyelo una disminución, de suerte que la conductancia pasa por un mínimo. Y tal modificación se produce gradualmente, como función continua de la duración total del recocido anterior, comenzando por manifestarse como un periodo de invariabilidad de dicha magnitud y terminando por convertirse su variación en una disminución relativamente rápida, seguida de un crecimiento sumamente lento é inferior á la disminución primitiva.

Ocurre, pues, como si á la curva general del recocido que hemos estudiado se superpusiera un fenómeno totalmente diferente, puesto de manifiesto por un cambio de signo de la variación, y quizas no independiente del recocido mismo. Con el fin de reconocer este extremo, sometimos brusca-

mente á la misma temperatura de 80° (*) muestras diferentes recocidas previamente á temperaturas superiores á ésta, cuyos resultados transcribimos en parte, en los adjuntos cuadros:

Calentamiento rápido á 80°.—Hilo de 0,5 m/m.

MUESTRA NÚM. 18 Recocido anterior á 100° 1-X-1908		MUESTRA NÚM. 21 Recocido anterior á 112° 7-XI-1908		MUESTRA NÚM. 24 Recocido anterior á 150° 31-XII-1908	
Tiempo.	Conductancia.	Tiempo.	Conductancia.	Tiempo.	Conductancia.
7m 30s	1.002616	4m 10s	.996567	2m 0s	.983317
20 40	1.002596	8 25	.996561	10 45	.983302
30 35	1.002584	16 10	.996547	19 25	.983302
42 30	1.002577	28 20	.996543	1h 3 50	.983296
51 45	1.002572	40 15	.996533	1 38 50	.983296
1h 8 0	1.002568	1h 14 25	.996522	2 22 45	.983296
1 27 5	1.002561	2 17 35	.996527	3 10 40	.983293
1 44 10	1.002554	3 11 35	.996515		
2 2 20	1.002560	3 23 30	.996517		
2 22 10	1.002560				
2 40 15	1.002560				
2 56 5	1.002560				
5 2 0	1.002570				
5 39 15	1.002568				
6 8 15	1.002566				

Resultados análogos se obtienen con el hilo de 0,8 m/m. De unos y otros se deduce que el fenómeno á que nos venimos refiriendo no es completamente independiente del recocido, según arriba decíamos, puesto que parece desaparecer cuando se eleva la temperatura á que ha sido previamente recocida la muestra objeto del análisis.

Por otra parte, esta disminución de conductancia es tanto mayor cuando más se eleva la temperatura á que se calienta bruscamente la muestra: así la núm. 24, que para la de 80° suministra los resultados transcritos en el cuadro anterior, para 60° y 100° se conduce como indica el siguiente:

(*) En estas determinaciones las medidas se han ejecutado sin cambiar las comunicaciones de las muestras con el puente, por tratarse de cambios muy pequeños.

Muestra núm. 24.

CALENTADA Á 60°		CALENTADA Á 100°	
Tiempo.	Conductancia.	Tiempo.	Conductancia.
1m 5s	.983213	3m 40s	.983663
11 20	.983210	13 0	.983638
22 35	.983202	30 55	.983633
40 30	.983200	50 0	.983629
58 40	.983118	1h 15 50	.983630
1h 22 35	.983193	1 38 0	.983629
1 43 0	.983194	2 7 40	.983631
		2 43 50	.983627
		3 5 35	.983629
		3 24 25	.983626

b) Curvas de temperatura.

Terminado el recocido de cada muestra, determinamos las curvas de variación de la conductancia con la temperatura hasta aquella á que se efectuó el recocido, ó hasta 100° cuando excedía este límite. En los adjuntos cuadros se consignan los resultados obtenidos á cada temperatura.

Mediante ellos, utilizando las lecturas próximas á 25°, se ha calculado, por el método de interpolación de Cauchy, la conductancia á 25°. Las ordenadas de las curvas en las figuras 8 y 9 son los cocientes de cada conductancia medida por este valor calculado, las cuales se consignan también en los cuadros correspondientes en la columna designada por Y.

19-VIII-1908.

MUESTRA NÚM. 11 Hilo 0,5 m/m. — C_{25} = .988167			MUESTRA NÚM. 12 Hilo 0,8 m/m. — C_{25} = .994734			MUESTRA NÚM. 13 Hilo 0,8 m/m. — C_{25} = .989568		
T	C_t	Y	T	C_t	Y	T	C_t	Y
26°,1	.988159	.999992	26°,0	.994714	.999980	26°,1	.989563	.999995
29 4	.988122	.999955	29 4	.994696	.999962	29 6	.989545	.999977
34 8	.988078	.999910	34 6	.994681	.999947	34 8	.989532	.999944
39 6	.988053	.999884	39 4	.994685	.999951	39 7	.989539	.999971
45 3	.988044	.999876	45 3	.994686	.999952	45 1	.989576	1.000008
49 7	.988052	.999883	49 7	.994725	.999991	49 7	.989613	1.000045
55 3	.998084	.999916	55 3	.994787	1.000053	55 3	.989678	1.000111
60 0	.988117	.999950	60 1	.994859	1.000126	60 0	.989758	1:000192
67 2	.988201	1.000034	67 1	.994982	1.000250	67 1	.989900	1.000335
73 6	.988291	1.000125	73 6	.995128	1.000397	73 6	.990065	1.000503

4-IX-1908.

MUESTRA NÚM. 14 Hilo 0,5 m/m.—C_{25} = 1.006145			MUESTRA NÚM. 15 Hilo 0,5 m/m.—C_{25} = 1.000285			MUESTRA NÚM. 16 Hilo 0,8 m/m.—C_{25} = 1.004274		
T	C_t	Y	T	C_t	Y	T	C_t	Y
13°,4	1.006382	1.000236	14°,4	1.000524	1.000236	15°,0	1.004402	1.000128
15 1	1.006359	1.000214	14 7	1.000512	1.000224	14 2	1.004422	1.000148
15 6	1.006336	1.000191	16 3	1.000475	1.000187	16 6	1.004394	1.000120
18 4	1.006272	1.000127	17 8	1.000436	1.000148	17 1	1.004378	1.000104
19 3	1.006245	1.000100	19 5	1.000394	1.000106	19 8	1.004342	1.000068
21 5	1.006209	1.000064	21 3	1.000359	1.000071	21 2	1.004322	1.000048
24 6	1.006154	1.000009	24 7	1.000294	1.000006	24 7	1.004277	1.000003
29 5	1.006074	.999928	29 3	1.000206	.999918	29 2	1.004240	.999966
34 4	1.006017	.999872	34 2	1.000124	.999836	34 0	1.004218	.999944
40 0	1.005984	.999839	40 1	1.000069	.999781	39 8	1.004220	.999946
44 8	1.005966	.999821	44 7	1.000032	.999744	44 7	1.004222	.999948
50 4	1.005948	.999803	50 6	1.000008	.999720	50 6	1.004276	1.000002
55 0	1.005958	.999813	55 1	1.000000	.999712	55 2	1.004332	1.000058
60 5	1.005985	.999840	60 2	1.000025	.999737	59 9	1.004405	1.000131
64 9	1.006019	.999874	65 6	1.000050	.999762	65 5	1.004502	1.000228
69 8	1.006070	.999925	69 6	1.000075	.999787	70 1	1.004610	1.000336
76 3	1.006153	1.000008	76 3	1.000165	.999877	76 3	1.004761	1.000485
83 6	1.006272	1.000127	83 5	1.000185	.999897	83 2	1.004954	1.000678
			83 7	1.000187	.999899			

25-IX-1908.

MUESTRA NÚM. 17 Hilo 0,5 m/m. — C_{25} = .996073			MUESTRA NÚM. 18 Hilo 0,5 m/m. — C_{25} = 1.002758			MUESTRA NÚM. 19 Hilo 0,8 m/m. — C_{25} = .999913		
T	C_t	Y	T	C_t	Y	T	C_t	Y
15°,5	.996304	1.000232	13°,8	1.003088	1.000330	12°,8	1.000089	1.000189
13 4	.996355	1.000283	14 4	1.003066	1.000308	15 2	1.000036	1.000133
14 1	.996348	1.000276	14 7	1.003155	1.000297	16 0	1.000024	1.000121
18 2	.996318	1.000246	18 2	1.002918	1.000160	18 1	.999987	1.000084
19 6	.996175	1.000101	19 7	1.002876	1.000118	19 8	.999955	1.000052
24 9	.996079	1.000006	25 0	1.002758	1.000000	25 1	.909902	.999999
29 0	.995985	.999912	29 1	1.002662	.999904	29 2	.999866	.999963
34 5	.995924	.999851	34 6	1.002584	.999826	34 7	.999855	.899952
39 7	.995870	.999796	39 7	1.002522	.999764	39 7	.999857	.999954
45 0	.995826	.999752	44 9	1.002461	.999703	45 0	.999878	.999975
50 0	.995811	.999737	50 1	1.002430	.999672	50 4	.999928	1.000025
55 4	.995792	.999718	55 4	1.002411	.999653	55 4	1.000011	1.000108
60 1	,995816	.999742	60 1	1.002419	.999661	60 1	1.000081	1.000178
65 8	.995834	.999760	65 3	1.002414	.999667	65 7	1.000171	1.000268
70 0	.995878	.999804	70 1	1.002454	.999696	70 2	1.000268	1.000365
75 2	.995915	.999842	75 4	1.002491	.999733	75 5	1.000391	1.000488
19 6	.996162	1.000089	19 6	1.002864	1.000106	19 7	.999956	1.000053
47 1	.995795	.999721	47 0	1.002443	.999685	40 9	.999895	.999992
75 9	.995940	.999867	75 8	1.002506	.999748	75 7	1.000405	1.000502
80 6	.996004	.999931	80 6	1.002547	.999789	80 6	1.000546	1.000643
85 8	.996085	1.000013	85 8	1.002626	.999868	85 7	1.000694	1.000791
91 0	.996183	1.000110	91 0	1.002730	1.000028	91 4	1.000887	1.090984
96 2	.996296	1.000223	96 2	1.002811	1.000053	96 5	1.001074	1.001171
101 6	.996408	1.000335	101 0	1.002912	1.000154	101 3	1.001256	1.002353

2-XI-1908.

MUESTRA NÚM. 20 Hilo 0,8 m/m. — C_{25} = .993621			MUESTRA NÚM. 21 Hilo 0,5 m/m. — C_{25} = .996717			MUESTRA NÚM. 22 Hilo 0,8 m/m. — C_{25} = .998785		
T	C_t	Y	T	C_t	Y	T	C_t	Y
15°,9	.995775	1.000154	16°,1	.996935	1.000218	16°,4	.999083	1.000298
20 4	.995677	1.000056	20 4	.996821	1.000104	20 4	.998853	1.000068
25 2	.995612	.999991	24 8	.996715	.999998	25 0	.998785	1.000000
30 7	.995575	.999954	30 6	.996615	.999898	30 3	.998757	.999972
35 7	.995565	.999944	35 5	.996542	.999825	35 2	.998759	.999974
41 3	.995568	.999947	41 2	.996479	.999762	41 0	.998763	.999978
44 6	.995579	.999958	45 3	.996426	.999709	45 6	.998744	.999959
50 6	.995621	1.000000	50 7	.996402	.999685	50 7	.998790	1.000005
56 4	.995698	1.000077	55 5	.996394	.999577	55 2	.998845	1.000060
60 1	.995742	1.000121	59 8	.996394	.999577	60 5	.998929	1.000144

4-XI-1908.

MUESTRA NÚM. 20 Hilo 0,8 m/m. — C_{25} = .995621			MUESTRA NÚM. 21 Hilo 0,5 m/m. — C_{25} = .996717			MUESTRA NÚM. 22 Hilo 0,8 m/m. — C_{25} = .998785		
T	C_t	Y	T	C_t	Y	T	C_t	Y
50°,4	.995627	1.000006	50°,2	.996388	.999671	50°,5	.998832	1.000047
60 1	.995789	1.000168	60 3	.996422	.999795	60 5	.998968	1.000183
66 0	.995871	1.000250	66 2	.996412	.999695	65 9	.999064	1.000279
70 9	.995961	1.000340	70 8	.996460	.999743	70 8	.999180	1.000395
76 7	.996100	1.000480	76 9	.996523	.999806	76 9	.999281	1.000496
88 7	.996462	1.000844	88 6	.996703	.999986	88 9	.999476	1.000691
98 1	.996772	1.001115	98 3	.996870	1.000153	98 5	.999986	1.001202

23-XII-1908.

MUESTRA NÚM. 23 Hilo 0,5 m/m. — C_{25} = .981440			MUESTRA NÚM. 24 Hilo 0,5 m/m. — C_{25} = .983557			MUESTRA NÚM. 25 Hilo 0,8 m/m. — C_{25} = .987208		
T	C_t	Y	T	C_t	Y	T	C_t	Y
12°,1	.981815	1.000383	16°,6	.983778	1.000230	16°,6	.987331	1.000124
16 7	.981673	1.000238	25 1	.983557	1.000000	24 8	.987212	1.000004
25 2	.981433	.999993	31 7	.983414	.999854	32 1	.987159	.999951
31 3	.981290	.999847	36 6	.983343	.999780	36 7	.987146	.999938
36 5	.981215	.999771	44 5	.983246	.999683	45 0	.987172	.999964
44 3	.981136	.999690	51 8	.983204	.999641	51 5	.987242	1.000034
52 9	.981112	.999665	19 7	.983699	1.000147	19 7	.987283	1.000076
19 9	.981513	1.000074	40 7	.983282	.999717	40 4	.987147	.999939
41 0	.981148	.999702	51 2	.983201	.999636	51 4	.987231	.999923
51 4	.981081	.999634	56 4	.983198	.999633	56 5	.987300	1.000093
56 4	.981083	.999636	65 8	.983213	.999648	65 6	.987463	1.000259
65 8	.981124	.999678	72 7	.983247	.999682	72 6	.987625	1.000361
72 9	·981185	.999740	80 5	.983227	.999763	80 8	.987850	1.000651
80 8	.981285	.999842	89 3	·983454	.999892	89 2	.988110	1.000914
89 8	.981428	.999988	95 1	.983542	.999984	95 3	.988311	1.001118
94 9	.981551	1.000113	101 5	.983649	1.000094	101 3	.988520	1.001338
101 1	·981670	1.000235						

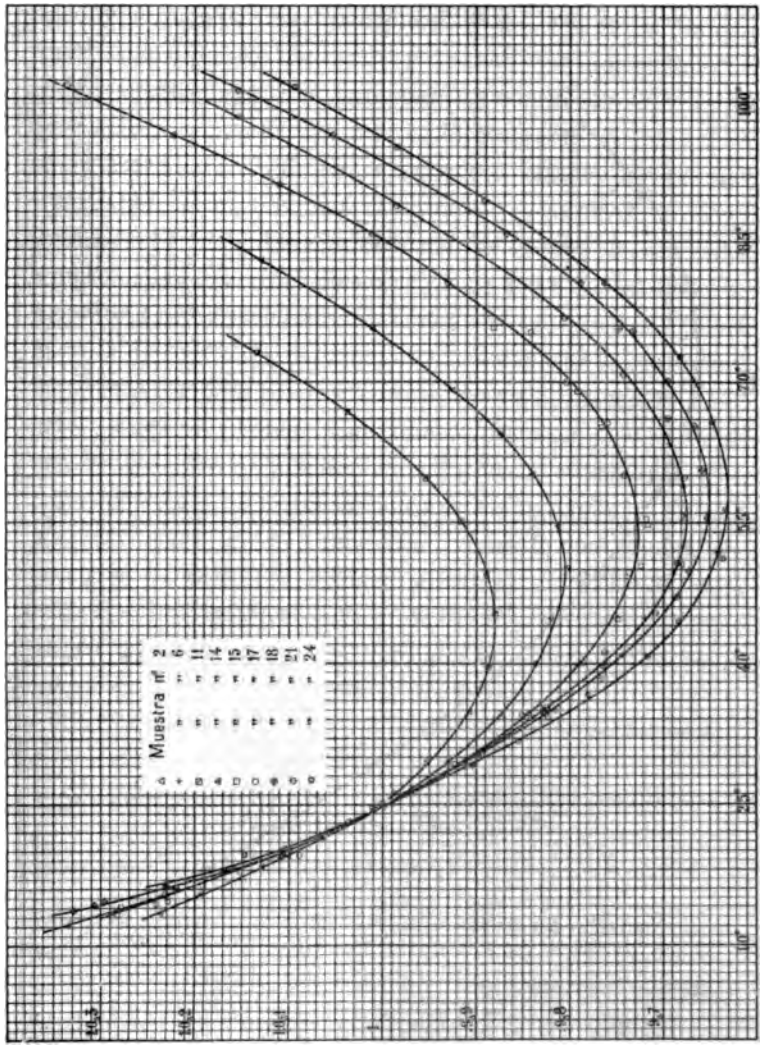


Figura 8.ª

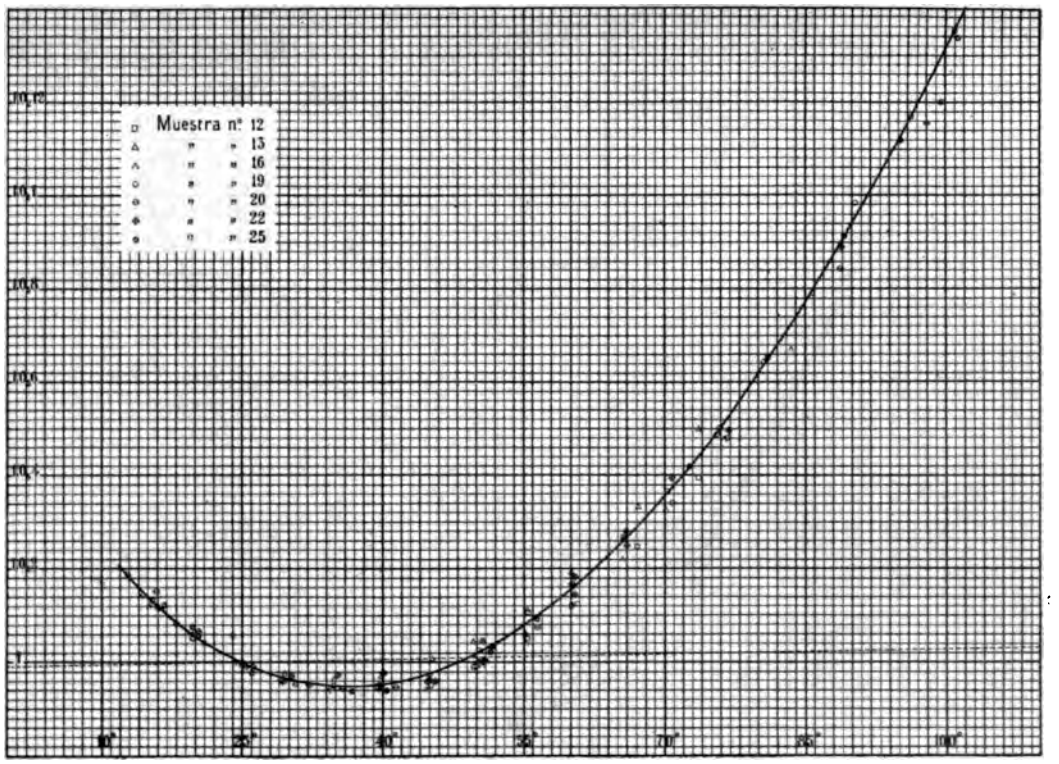

Muestra nº 12
" " 13
" " 16
" " 19
" " 20
" " 22
" " 25
10,10
10,8
10,6
10,4
10,2
1
10°
20°
30°
40°
50°
60°
70°
80°
90°
100°

Figura 9.ª

Si se comparan los anteriores cuadros, obsérvase inmediatamente una diferencia profunda en la manera de comportarse las dos clases de hilos que hemos estudiado. Mientras que las curvas correspondientes al de 0,8 $^{m}/_{m}$ se confunden casi totalmente, las de 0,5 $^{m}/_{m}$ difieren por completo, pudiéndose afirmar que el mínimum de conductancia es tanto más marcado cuanto más alta es la temperatura del recocido. Sin embargo, tal ley se encuentra modificada por las circunstancias peculiares á cada muestra, de modo análogo á lo que de manifiesto se puso en las curvas de recocido. Entre las curvas referentes al hilo de 0,5 $^{m}/_{m}$, las que traducen los resultados obtenidos para las muestras 2 y 6 son las que más se separan, pues en su marcha se aproximan á las más recocidas; pero debe advertirse que recocidas á 50° y 60°, respectivamente, seguramente distaban mucho de alcanzar el estado permanente cuando fueron obtenidas.

La diferencia entre ambos hilos se marca también de una manera notable en la temperatura, para la cual la conductancia es un mínimum. Hállase, en efecto, hacia los 37° para el de 0,8 $^{m}/_{m}$, mientras para el de 0,5 $^{m}/_{m}$ se traslada desde los 44° á los 58°, á medida que la temperatura del recocido crece.

(Laboratorio de Electricidad de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central.)

APENDICE

Análisis cuantitativo de dos muestras de «Manganina».

Los metales que en proporciones francamente apreciables constituyen las muestras analizadas de esta aleación, son: *Cobre*, *Manganeso*, *Niquel* y *Hierro*.

El método empleado en su determinación, que ha sido en su mayor parte electrolítico, es, expuesto á grandes rasgos, como sigue:

Presentado el problema en forma de conductor eléctrico, es privado mecánicamente de la envoltura aisladora que lo protege: el trozo que se juzga conveniente para el ensayo se arrolla en hélice, se lava con éter y se pesa; colócase después en el mismo vaso de Bohemia que ha de servir como cuba electrolítica, y allí se somete á la acción del ácido nítrico adicionado de unas gotas de sulfúrico; se evapora á sequedad y se calcina ligeramente hasta descomponer totalmente los nitratos formados; se añade 1 c. c. de ácido sulfúrico y agua hasta completar proximamente 150 c. c.: una vez disueltos los sulfatos, queda preparado el electrolito para la determinación del *Cobre*. Verifícase ésta haciendo uso de electrodos *Viukler*.

Al mismo tiempo que se deposita el *Cobre* en el catodo, lo hace el *Manganeso* en el anodo al estado de óxido; pero por su poca adherencia y la pequeña superficie del electrodo se desprende fácilmente, bien por sí, ó con unas ligeras sacudidas, cayendo al fondo del vaso; esta poca adherencia y la necesidad de determinar en el líquido otros dos metales, nos ha hecho renunciar á determinar el Manganeso á la vez que el Cobre, empleando para ello anodos apoyados de gran superficie como los de *Classen* ó *Herpín*.

Separado el *Cobre* como queda dicho, y añadiendo al líquido que queda en el vaso de Bohemia el que procede de lavar el depósito obtenido, se neutraliza el conjunto con Amoniaco y Carbonato amónico en exceso y se calienta: así se consigue precipitar el *Hierro* al estado de hidrato, y el *Manganeso* que aun quedase en el líquido, al de carbonato; precipitados que quedan en el fondo del vaso mezclados con los óxidos que se depositaron durante la electrolisis del *Cobre*, en tanto que el líquido queda preparado para la determinación del *Níquel* según el método de *Foregger*. Se electroliza el Níquel también con electrodos *Vinkler*, agitando de vez en cuando para lavar el precipitado del fondo. Una hora después de quedar el líquido incoloro y no dar reacción

alguna con el sulfuro amónico, se da por terminado el depósito de Níquel, que se lava, seca y pesa.

Filtrase el precipitado complejo que queda en el vaso, se lava, seca, calcina y pesa; este peso es la suma de los que corresponden al óxido manganeso-mangánico y al óxido férrico formados durante la calcinación; se determina directamente este último, que es el menor, por los procedimientos que siguen, y la diferencia nos permite obtener el *Manganeso.*

Para conocer el peso correspondiente al óxido férrico hemos procedido unas veces determinando, desde luego, el *Hierro*, por colorimetría, con el Colorímetro de Duboscq y la reacción del Sulfocianato Amónico, y otras separándole del Manganeso, por el Amoniaco en presencia de un exceso de Cloruro amónico (previa redisolución de ambos óxidos en ácido Clorhídrico) y calcinando el precipitado obtenido; en ambos casos se han obtenido resultados concordantes.

PUBLICACIONES RECIBIDAS

(Continuación.)

Direccion general de Contribuciones, Impuestos y Rentas.—1907.—Estadística de la Tributación Minera de España.—Madrid 1908.

Dirección general de Aduanas.—Memoria sobre el Estado de la Renta de Aduanas en 1907.—Madrid, 1908.

Electricidad y Mecánica.—Revista de Ciencias, Industria, etc. —Año IV, número 3.—Valencia, 1908

Energía Eléctrica (La).—Revista.—Año IX, números 19 á 22 y 24.—Año X números 1 á 10 y 12 á 20.—Madrid, 1907 y 1908.

Escuela especial de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Catálogo de la Biblioteca de la . . .—Madrid, 1875, 1883, 1896 y 1905.

España Automóvil.—Revista. Tomo I, núm. 9.—Tomo II, números 1, 3, 5, 7, 9 y 11 á 19.—Madrid, 1907 y 1908.

España en Africa.—Revista. Año III, números 16 á 19.—Año, IV, números 21 á 30.—Madrid, 1907 y 1908.

España y América.—Revista. Año VI, números 1 á 21.—Madrid, 1908.

Facultad de Ciencias de Zaragoza. —Anales de la . . . — Año I, números 3 y 4.—Año II, números 5 y 6.—Zaragoza, 1907.

Farmacia Española (La). — Revista científica. — Año XXXIX, núm. 52.—Año XL, números 1 al 5, 12 á 21 y 23 á 44.—Madrid, 1907 y 1908.

Feliu y Vegués (D. Francisco).—Algunos trabajos matemáticos de..... edición publicada por sus discípulos y ofrecida al maestro en testimonio de gratitud, con un prólogo del Dr. D. Santiago Mundí y Giró.—Barcelona-Gracia.

Fernández (Excmo. Sr. D. Gustavo).—El problema de la protección de los acorazados contra el torpedo automóvil por..... (De la Revista General de Marina, Marzo 1908).—Madrid, 1908.

Fernández Navarro (L). - Observaciones geológicas en la Isla de Hierro (Canarias).—(Veáse Memorias de la Real Sociedad Española de Historia Natural, tomo V. núm. 2.—Madrid, 1908.

Fernández Chacón (Illmo. Sr. Dr. D. Antonio).— Discursos leídos en la Real Academia de Medicina para la recepción pública del ..., el 12 Abril de 1908.—Madrid, 1908.

Fernández y Echevarría (D. Enrique).—Discurso leído ante la Universidad Literaria de Oviedo en la solemne apertura del curso académico de 1908 á 1909.—Oviedo, 1908.

Franco y Salazar (Miguel).— Las cartas de isobaras y la previsión del tiem-

po—Memoria presentada para aspirar al grado de Doctor en Ciencias Físicas. - Madrid, 1907.

Gaceta Farmacéutica Española.—Año X, números 119 á 122.—Año XI, números 123 á 142.—Barcelona, 1908.

Gaceta Médica Catalana. – Revista. – Tomo 32, números 733 á 741, 743 y 745 á 752.—Barcelona, 1908.

Gaceta Médica del Sur de España.—Año XXV, núm. 590; XXVI; números 591 á 610.—Granada, 1907 y 1908.

Caceta Médica de Caracas.—Año XV, números 13 á 17, - Caracas.

Gaceta Sanitaria de Barcelona. — Año XIX, núm. 12. — Año XX, números 3 al 8.—Barcelona, 1907 y 1908.

Gallego Armesto (Heliodoro).—Estudio analítico experimental de la inducción y auto-inducción magneto-eléctricas —Madrid, 1901.

García del Real y Alvarez Mijares (D. Eduardo).—Discurso leído en la Universidad literaria de Santiago en la solemne inauguración del Curso académico de 1908 á 1909.– Santiago, 1908.

Garcia Llausó (D. Antonio) y Masriera y Manoveus (D. José). - La joyeria y la orfebrería en España.—Memoria leida en el acto de su recepción por D. Antonio Garcia... y discurso de contestación por D. José...—(Véase Memoria de la Real Academia de Ciencias de Barcelona, vol. VII, número 1.)—Barcelona.

Giral y Pereira (D. José).—Consideraciones acerca de la enseñanza en Francia, organización de sus laboratorios químicos y trabajos de síntesis efectuados en ellos, por D. ... Con un prólogo de D. José R. Carracido.—Salamanca, 1908.

Goizueta y Díaz (Dr. D. Jesús) y Murúa y Valerdi (Dr. D. Agustín.—Reflexiones acerca de la evolución de las especies animales.—Memoria de ingreso del académico D. Jesús ... y «Algunas reflexiones sobre la evolución regresiva que se opera en España», en contestación á la misma, por D. Agustín ...—(Véase Memorias de la Real Academia de Ciencias de Barcelona, vol, VI, núm. 29.—Barcelona.

Gorria (Ilmo. Sr. Dr. D. Hermenegildo). – Aplicaciones de la electricidad á la agricultura.—(Véase Memorias de la Real Academia de Ciencias de Barcelona, vol. VI, núm. 33.—Barcelona.

Gutiérrez y González (Excmo. é Ilmo. Sr. Dr. D. Eugenio).—Discurso leído en la solemne sesión inaugural del año 1908 en la Real Academia de Medicina por ...—Madrid, 1908.

Gutiérrez Martín (Daniel).—Apuntes para la flora del partido judicial de Olmedo, é indicación de los usos medicinales que algunas plantas reciben. Memoria presentada para aspirar al grado de Doctor en Farmacia por ... Avila, 1908.

Iglesia y García (D. Gustavo la).—Obstáculos que se oponen en España al desarrollo de las iniciativas individuales y sociales.—Memoria premiada con accesit por la Real Academia de Ciencias Morales y Políticas en el concurso ordinario de 1905.—Madrid, 1908.

Iglesias y Díaz (Excmo. é Ilmo. Sr. Dr. D. Manuel).—Memoria leída en la solemne sesión inaugural del año 1908 en la Real Academia de Medicina, por su Secretario perpetuo. . .—Madrid, 1907.

Ilustración Española y Americana (La).—Año LI, números 47 y 48. — Año LII, números 1 al 40.—Madrid, 1908.

Ingeniería.—Revista industrial de minas.— Año III, números 98 y 99.— Año IV, números 100 al 127. Madrid, 1908.

Ingenieros Geógrafos y de Topógrafos Auxiliares (Cuerpos de).—Su cometido, organización, estado actual y aspiraciones.—Madrid, 1908.

Instituto de Sueroterapia, Vacunación y Bacteriología de Alfonso XIII.— Cartilla sanitaria contra la rabia.—Instrucciones destinadas á prevenir la enfermedad, entre las personas, y á combatir su propagación entre los animales.—Madrid, 1908.

Instituto de Sueroterapia, Vacunación y Bacteriología de Alfonso XIII.— Boletín del. . .—Año III, núm. 12. - Año IV, números 13 á 15. — Madrid, 1907.

Instituto Geológico de México. - Parergones del...—Tomo II, números 1 á 6 México, 1907.

Institució Catalana d'Historia Natural.— Butlleti de la. . . — Any 4, números 8 y 9 —Any 5, números 1 á 6.—Barcelona, 1907 y 1908.

Instituto Geográfico y Estadístico (Dirección general del). - Censo de la población de España en 1900.—Tomos III y IV.—Madrid, 1907.

Instituto de Higiene de Santiago.—Revista chilena de Higiene.—Tomo XI, Cuad. 1.—Santiago de Chile, 1906.

Institución libre de enseñanza.— Boletín de la. . .— Año XXXI, números 572 á 575.—Año XXXII, núms. 576 á 582. — Madrid, 1907 y 1908.

Instituto de segunda enseñanza de la Habana.—Memoria anual correspondiente al curso académico de 1906 á 1907.—Habana, 1908.

Instituto general y técnico de Navarra.— Memoria acerca del estado del. . ., durante el curso académico de 1906 á 1907, leída en la solemne apertura del curso de 1907 á 1908, por D. Fernando Romero González, Catedrático y Secretario del mismo Instituto.— Pamplona, 1908.

Instituto general y técnico de Pontevedra.— Memoria correspondiente al curso de 1906 á 1907, por D. Antonio Crespi, Catedrático y Secretario del establecimiento.—Pontevedra, 1908.

Instituto general y técnico de Teruel.—Memorias correspondientes al curso de 1905 á 1906 y 1906 á 1907.—Teruel, 1908.

Instituto general y técnico de Zaragoza.—Memoria del. . ., en el curso de 1906 á 1907.—Zaragoza, 1908.

XXIV.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia quinta.

SEÑORES:

Después de haber indicado con la rapidez necesaria, por tratarse de una cuestión incidental, la crítica que en estos últimos tiempos se ha formulado sobre el concepto de masa, empezamos un estudio análogo, y también muy sucinto, sobre el concepto de fuerza, exponiendo en la anterior conferencia algunas consideraciones generales sobre este punto.

Hoy debemos concretar más las ideas.

Como la *masa* es un concepto abstracto, que se refiere á *toda clase de materia*, algo así como un parámetro común á todos los cuerpos de la Naturaleza, simples y compuestos, parámetro que se refiere al fenómeno del movimiento, parámetro abstracto pero sujeto á medida; así el concepto de *fuerza* se refiere á *todas las fuerzas* de la Naturaleza, prescindiendo por completo en la teoría general de las fuerzas del origen de las mismas.

Se mide la fuerza por kilogramos, se representa geométricamente por una recta, y se introduce en el cálculo por sus tres componentes.

De suerte que se dice: *sobre el punto A*, que puede ser una masa ponderable ó eléctrica, y hasta un punto meramente geométrico enlazado idealmente con un sistema, actúa la fuerza F, cuyas tres componentes son X, Y, Z.

Y poco nos importa el origen de la fuerza F, puede proceder de masas ponderables que atraigan á la masa m del punto A; ó atracciones ó repulsiones de masas eléctricas, sobre una masa eléctrica también μ que acompañe á dicho

punto A; ó atracciones ó repulsiones de una corriente eléctrica ó de los polos de un imán.

Puede ser todo esto, y por el momento, y cuando sólo se trata de estudiar el movimiento del punto que consideramos, el origen de la fuerza poco nos importa; basta conocer para cada punto del espacio, que vaya ocupando A, el valor, ó más en general la expresión de X, Y, Z en función, por consiguiente, de las coordenadas x, y, z del punto, y de aquellas otras cantidades que definan la naturaleza del sistema material, que en cada instante determinado engendra ó produce, por decirlo de este modo, la fuerza en cuestión.

En la antigua Física matemática, cuando sólo se consideraban masas ponderables, las cantidades del sistema á que nos referimos eran masas ponderables también.

Cuando se empezó á estudiar la electricidad estática ya podían ser masas eléctricas.

Cuando se aplicó el cálculo á la electrodinámica, eran corrientes ó elementos de corriente.

Aun pudieran contener los sistemas engendradores de la fuerza F polos ó masas magnéticas.

Y si venimos á parar á los últimos descubrimientos de la Física, aún pudieran ser rayos catódicos, ó rayos X, ó radiaciones de los cuerpos radioactivos.

En suma, un punto que cruza un espacio puede encontrarse sometido á la acción de todas estas fuerzas procedentes de todos estos sistemas: atracciones newtonianas; atracciones ó repulsiones eléctricas; atracciones ó repulsiones de corrientes; atracciones ó repulsiones magnéticas; ó impulsos procedentes de diferentes radiaciones.

Con ser tantos los orígenes de la fuerza, la fuerza es hoy un concepto tan único y tan abstracto, como lo era en el pasado siglo, cuando comprendía presiones, tensiones, atracciones planetarias, choques cinéticos de los gases y acciones de líquidos ó de diversos flúidos,

La *fuerza clásica* es un concepto abstracto comprendido

en todos los que hemos enumerado, y que se mide siempre por kilogramos.

O si se parte, al establecer un sistema de unidades, de la unidad de la masa, podremos decir que la fuerza es igual al producto *de la masa por la aceleración.*

Y claro es que nos referimos á la *fuerza medible por kilogramos*, y prescindimos, por el momento, de otras significaciones que hayan podido darse á esta palabra.

Hay que proceder por partes; hay que seguir un orden histórico para comprender los tiempos modernos; no es posible explicarlo todo de una vez por el afán de un rigor que sólo por grados puede conseguirse.

Pero aligeremos estas consideracienes generales, que son bien conocidas de mis oyentes.

***

La crítica, después de combatir el concepto de fuerza en general, desciende al análisis de las condiciones que la Mecánica clásica atribuía á las fuerzas naturales.

Consideremos como ejemplo la atracción newtoniana, atracción ejercida entre una masa m colocada en un punto A y la masa m' colocada en otro punto A'.

Según la hipótesis de Newton, el valor de esta fuerza atractiva era, como es sabido,

$$K \frac{mm'}{r^2},$$

siendo K una constante que dependía de las unidades elegidas y r la distancia entre los puntos A y A', ó sea entre las masas de dimensiones infinitamente pequeñas en ellos situadas.

Las condiciones de estas fuerzas eran las siguientes, que se pueden expresar de este modo:

1.° *Acción á distancia.* — Se suponía que la masa *m* atraía á distancia sin intermedio ninguno, y saltando instantáneamente, por decirlo así, á través del vacío desde el punto *A* al punto *A'*.

Era, como algunos han dicho, una especie de acción espiritual.

Era como una cualidad misteriosa de la materia.

Newton no prejuzgaba la cuestión, se limitaba á decir: la materia atrae á la materia, ó las cosas pasan como si esta atracción fuese un hecho real.

Más aún, y esto es muy importante, tan importante como lo que acabamos de decir.

La fuerza de la Mecánica clásica, no sólo *actúa á distancia,* sino que su *acción es instantánea.*

La masa *m,* no sólo actúa á la distancia *r* sin intermedio ninguno, sino que no tarda ningún tiempo, por pequeño que sea, en transmitirse de *m* á *m'*.

Suponed un astro en el espacio y otro á una distancia inmensa, millones y millones inacabables de kilómetros; pues el primero atraerá al segundo, y recíprocamente, en todos los instantes, sea cual fuere la distancia *R* que separe los dos astros.

La atracción en la hipótesis newtoniana, dado que pudiera admitirse, tiene algo de divina, *es superior al espacio y al tiempo.*

La crítica moderna combate esta doble hipótesis, mejor dicho, la rechaza en absoluto, calificándola casi de inconcebible y absurda.

A las dos afirmaciones opone dos negaciones.

Un cuerpo, dice, no puede actuar sobre otro sin un sistema material intermedio.

En segundo lugar, esta acción no puede ser instantánea, ha de tardar cierto tiempo en transmitirse. La gravitación tendrá su velocidad, como tiene su velocidad la luz.

Y en tercer lugar, y por último, la acción á distancia é ins-

tantánea sólo puede tolerarse en la práctica, por la facilidad, y casi pudiéramos decir por la comodidad, que proporciona para la solución de los problemas de Mecánica, pero sin creer que responda tal hipótesis á la realidad de las cosas: es menos que una hipótesis, es un símbolo vacío, una facilidad para las teorías y para el cálculo.

***

Ejercitando una crítica severa contra estas tres conclusiones, algo pudiera alegarse; haciendo crítica de la crítica misma, no es imposible quitar valor absoluto á sus conclusiones y acaso dejar la balanza en el fiel si antes estaba torcida en el sentido de la negación.

No queremos con esto afirmar, por nuestra cuenta, que *exista la acción á distancia*, que fuera acaso acto de rebeldía cuando tantos autores insignes están conformes en rechazar la hipótesis newtoniana.

Pero es lo cierto que muchos de aquellos que la rechazan para distancias planetarias y aún para distancias terrestres ordinarias, *la aceptan* y *la emplean* en distancias muy pequeñas, en fracciones de milímetro, ó en espacios moleculares ó atómicos. Y esta es una inconsecuencia enorme, una negación de la lógica y una negación de la critica.

Es evidente que la acción á distancia choca con el buen sentido y aun con la razón positivista, que hoy domina en todas partes.

No se comprende, en efecto, como un astro saltando, digámoslo de este modo, por el vacío, sin dejar de estar donde está, ha de atraer á otro astro que se halla á millones y millones de kilómetros.

Mas la dificultad *es la misma* para distancias de un millón de kilómetros, que para una millonésima de milímetro.

La dificultad estriba en el salto de esta influencia atractiva ó repulsiva, no en la magnitud del salto.

Que estas atracciones decrecen con la distancia, ya se advierte; que puedan despreciarse las influencias lejanas como simplificación de las fórmulas, y para detenerse en cierto grado de aproximación, siempre lo hizo la Física matemática y lo hicieron y lo siguen haciendo los autores; pero no se nos ocurre más que un medio de suprimir en absoluto la acción á distancia, y es admitir en el espacio la continuidad adsoluta de la materia, y no admitir en cada punto más que fuerzas de contacto ó compresiones. Algo así como la teoría de los torbellinos de Thomson y Helmholtz, que explicaremos en otro curso.

Desde el momento en que para explicar la presión en una superficie que se imagine alrededor de un punto, se tiene en cuenta la acción que ejercen, una sobre otra, porciones de materia situadas á un lado y otro de dicha superficie, *la acción á distancias es inevitable.*

Pero, más aún, la crítica de Kant supone que el universo es un conjunto de fenómenos, manifestación de algo oculto, que no conocemos; no la realidad misma, sino una especie de fantasma ó un simbolismo en el espacio y en el tiempo, de esta realidad, como los conceptos de nuestra inteligencia son simbolismos especiales, desarrollados en el cerebro humano, del mundo fenomenal.

Y admitiemdo esta especie de escepticismo filosófico, sabio, sistemático, y que en sí no nos parece agresivo contra la realidad misma, sino acto de humildad de nuestra inteligencia, ¿quién nos dice que la acción á distancia no sea manifestación fenomenal de una realidad que no alcanzaremos á descubrir?

Sobre este punto, algo aún más concreto, hemos expuesto en años anteriores; pero no debemos detenernos en él, porque poco á poco iríamos á dar en plena metafísica, que sería impropia de nuestras lecciones.

Por otra parte, conviene recordar que se han buscado explicaciones mecánicas de la acción á distancia.

Recordemos la célebre teoría de Lesage.

Supone dicho autor, que el espacio está cruzado, en todos sentidos, por infinita lluvia de infinitos corpúsculos, que caen sobre todos los cuerpos que ocupan la extensión.

En un cuerpo aislado, como estas granizadas le baten todo alrededor, y en todos sentidos, el efecto es nulo y el cuerpo queda inmóvil.

Pero si existen *dos cuerpos* en presencia, por ejemplo, dos astros, cada uno de ellos es, por decirlo así, una pantalla respecto al otro, pantalla que detendrá, en cierto modo, los corpúsculos que desde el fondo del espacio van á caer sobre este último, con lo cual las granizadas opuestas en la dirección de ambos cuerpos tenderán á unirlos, precipitando á uno contra otro, como si se atrajesen. Y no es *que se atraen*, es que mecánicamente *los empujan* desde fuera.

En su tiempo, en la colección de opúsculos del abate Moignó, recordamos que se publicó uno, en que se aplica el cálculo matemático á la teoría que estamos indicando.

Ahora bien; contra esta teoría se ha formulado una objección de gran fuerza.

Se ha dicho: no basta considerar las dos granizadas de corpúsculos exteriores, hay que tener en cuenta los choques de los corpúsculos que van de uno á otro cuerpo chocando con ambos.

Si estos corpúsculos son absolutamente elásticos, la explicación cae por su base, porque los corpúsculos exteriores, detenidos por uno de los cuerpos, estarán sustituídos por los interiores, que llegarán á la región cubierta por la pantalla, en la misma dirección y con la misma velocidad que los que vienen de afuera.

Cada cuerpo estará en las mismas condiciones que si el otro no existiese y permanecerá inmóvil.

En cambio, la explicación subsiste, admitiendo que los corpúsculos interiores *no son elásticos*, y al chocar con cada uno de los dos cuerpos pierde una cantidad de fuerza viva.

Siendo esto así, las velocidades de los corpúsculos interiores no llegarán á las de los corpúsculos que vienen de fuera, ó de otro modo, la presión de *dentro* será inferior á la presión de *fuera*, y los cuerpos tenderán á unirse fingiendo la atracción newtoniana.

Desgraciadamente la objeción adquiere al llegar aquí todo su valor crítico, porque si los corpúsculos van perdiendo fuerza viva, esa fuerza viva en los dos cuerpos queda, y naturalmente se convertirá en calor: calor que se calcula muy superior al que podrían resistir ambos cuerpos.

La atracción planetaria explicada de este modo, y si los cálculos á que nos referimos no tienen correctivo, hubiera volatizado todos los astros.

Pero demos por terminada esta primera discusión.

***

2.° *Fuerzas centrales.*—Las condiciones, ó si se quiere también, los caracteres de este concepto de fuerza en la Mecánica clásica, son tres.

La primera condición de la fuerza, ó el primer carácter, ya hemos dicho que consiste en suponer que los cuerpos actúan á distancia.

La segunda hipótesis, que es la que vamos á discutir ahora, es la de las fuerzas centrales.

Se suponía, porque al parecer era la hipótesis más natural, que si una masa m estaba en presencia de otra masa m', la fuerza F que resultaba de la acción de m sobre m' se ve-

rificaba *según la línea recta que unía ambos puntos* ó ambas masas.

Las fuerzas iban de *punto* á *punto*, de *centro material* á *centro material*, salvando el espacio; por eso, á tal hipótesis se le da el nombre de *hipótesis de las fuerzas centrales;* y lo que hemos dicho para dos masas ponderables, pudiéramos repetir para dos masas eléctricas reconcentradas en dos puntos, para dos polos de dos imanes y para dos elementos de corriente.

Los matemáticos y los físicos de aquella época no adivinaron, ni esta duda moderna, ni esta objeción que ahora vamos á explicar.

Creyeron natural, y evidente casi, que la acción entre centro material y centro material actuase en línea recta de uno á otro.

Esta evidencia no lo es hoy: la hipótesis, unas veces será verdadera; pero otras veces es falsa, como vamos á demostrar.

Si se considera que cada uno de los dos puntos materiales es una esfera de homogeneidad absoluta, sean masas ponderables ó sean átomos eléctricos, parece evidente que las fuerzas han de ser centrales, no se comprende de otro modo; la razón se resiste tenazmente á cualquiera otra hipótesis; el célebre principio de la *razón suficiente*, que aquí podríamos llamar principio de simetría, se aplica con todo su vigor lógico.

Si otra distinta fuera la dirección del esfuerzo, haciendo girar la figura alrededor de la recta de los centros, tendríamos infinitas otras soluciones, que formarían un cono de revolución, y que aun sin acudir á las reglas de composición, por cierto instinto geométrico, podemos asegurar que darían una fuerza única en la dirección del eje de revolución mismo, y, por lo tanto, tendríamos una resultante central.

Pero este postulado, que en el caso que acabamos de in-

dicar es algo, que por sus propias condiciones se impone á la razón con carácter de evidencia, pierde esta evidencia cuando *los dos centros materiales no son homogéneos*, ó no son esféricos, ó en general son sistemas complejos, hipótesis que en estos tiempos que corren no es hipótesis aventurada, cuando hasta los átomos se descomponen en sistemas subatonómicos.

Porque si los centros son *complejos*, es evidente, que las resultantes de los esfuerzos parciales puede no seguir la línea de los centros, y esto es evidente con sólo aplicar la regla de la composición de fuerzas de la Mecánica clásica.

Ya en el primer curso de esta asignatura (pág. 219) presentamos ejemplos que así lo demuestran.

Por eso la acción de un polo sobre un elemento de corriente, con ser sistemas pequeñísimos, no determinan una fuerza central.

Por eso no es fuerza central la acción de una masa eléctrica en movimiento sobre un punto del éter, como hemos visto en este mismo curso.

En resumen, porque deseo abreviar estos prelimiminares, la simetría en los dos puntos que se consideran y en el *medio ambiente*, podrá justificar la hipótesis de las fuerzas centrales; pero esta hipótesis podrá caer en defecto por la disimetría de los dos sisiemas materiales ó del medio en que se hallan.

Y nos interesaba dar estas explicaciones, porque en el método de Mr. Poincare para el problema de la elasticidad se prescinde de dicha hipótesis de las fuerzas centrales, y esto constituye una mayor perfección de dicho método, comparado, por ejemplo, con el de Cauchy.

Como que en rigor pudiera decirse que la física matemática clásica es la física de las fuerzas centrales y la acción á distancia, y que la física matemática moderna no parte de ambas hipótesis, y de este modo se eleva á un grado mayor de generalidad.

No es que se niegue en la nueva teoría, que puedan existir fuerzas centrales, es que en ella se resuelven los problemas, no sólo para este caso, sino para otro cualquiera en que las fuerzas no fueran de un centro material á otro centro material.

Y pasemos ya á la tercera hipótesis que respecto á las fuerzas formuló la mecánica clásica.

3.° *La reacción igual y contraria á la acción.*—Según la mecánica racional, que aceptó la hipótesis newtoniana, si un punto material m atrae á otro con una fuerza F, el segundo punto m' atraerá al primero con la misma fuerza F, siempre sobre la línea de los centros y siempre á través del espacio.

Y esta ley se supone que es universal: la reacción, se decía, siempre es igual y contraria á la acción.

Lo mismo se aplica á dos puntos materiales de materia ponderable, que á dos átomos de éter, que á dos polos magnéticos, que á dos elementos de corriente; lo mismo al caso en que las fuerzas son centrales, que al caso en que no lo son; y, ya lo hemos dicho, lo mismo á las atracciones que á las repulsiones.

Y claro es que igual aplicación tiene cuando se trata de fuerzas de contacto, de compresión ó de tensión en diferentes puntos de la superficie, que divide en dos partes el sistema.

En estos últimos tiempos han surgido dudas sobre este principio clásico, que habia sido constantemente aplicado, y que había pasado casi al lenguaje vulgar y á la filosofía de las sociedades humanas.

Todo el mundo lo dice y todo el mundo cree comprenderlo: la reacción es igual y contraria á la acción, si no lo fuera, la diferencia entre ambas sería en cierto modo, ó así nos parece, una creación partiendo de la nada.

Véase á este propósito la objeción de Mr. Poincare á la teoría eléctrica de Mr. Lorentz.

Sobre esta cuestión, como en nada afecta á las doctrinas

que hemos de exponer en el presente curso, nos contentaremos con algunas brevísimas observaciones.

Si se admite la acción á distancia sin ningún intermedio material, el principio de *la reacción igual y contraria* á la acción parece natural y sencillo; á él está acostumbrada nuestra inteligencia; hasta ahora á ninguna contradicción ha dado lugar, y jamás en la práctica ha caído en defecto.

Pero si se desecha la hipótesis de la acción á distancia deben hacerse algunas consideraciones.

Supongamos una masa m, colocada en el punto A, y á cierta distancia r, otra masa m', situada en el punto A'.

Entre A y A', consideremos una serie de elementos del espacio b, b', b''..., á través de los cuales, y por influencia de los que, se transmiten las acciones de m y m'.

De suerte que A, no influye sobre A' directamente, sino sobre el elemento contiguo b. Este, á su vez, transmite su acción á b', y así sucesivamente hasta llegar á A'; es decir, á la masa m' que en él está colocada.

En esta hipótesis, sólo el enunciado de la acción y la reacción directas de m y m', carece de sentido; y no es evidente que la acción de m sobre m' deba ser igual y contraria á la acción de m' sobre m.

Lo extraño en el caso general, y mientras no se defina la naturaleza de los elementos b, b', b'' ....., sería lo contrario; es decir, que en este caso, la reacción fuese igual y contraria á la acción.

Se comprenden mil sistemas distintos para los elementos intermedios en que la transmisión de acciones dependa del sentido de transmisión.

No podemos detenernos en este problema, pero basta su enunciado para comprender la posibilidad de nuestra precedente afirmación.

En términos generales diremos: que desde el momento en que la acción se transmite por sistemas intermedios, sean continuos, sean discontinuos, por ejemplo, masas eléctricas

que circulasen entre *A* y *A'*, la fuerza transmitida podrá depender del sentido de la transmisión; y además, *la acción y la reacción no serán instantáneas.*

Puede, por ejemplo, ir ganando la fuerza desde *A* hasta *A'*, y puede ir disminuyendo en sentido contrario.

Lo que no se comprende en ningún caso, como indicábamos antes, es que en una superficie en equilibrio, las presiones en un sentido y en otro puedan ser distintas.

Ni en un equilibrio estático ni en un equilibrio dinámico.

Pero el estudio de este nuevo problema nos llevaría muy lejos, y tratado de paso, tememos no expresar con toda claridad nuestro pensamiento.

En suma; las fuerzas de la mecánica clásica obedecen á estas tres condiciones: *Acción á distancia; fuerzas centrales, reacción igual y contraria á la acción.*

Prescindiendo de las dos primeras, se prescinde de dos hipótesis, y es indudable que se da más rigor al método que de este modo se establezca.

Pasemos al tercero de los elementos que antes hemos enumerado.

El éter.—El éter es una hipótesis, y agreguemos más, una hipótesis mal definida.

El éter es una necesidad de la física: se impone aun mal definido.

Pero el éter hasta hoy no cumple con las condiciones que exige la lógica para dar por buena una hipótesis cualquiera.

Porque el éter no está bien definido, volvemos á repetirlo.

Cada escuela, cada sistema, cada autor, lo define á su manera, y á veces no lo define, y aun cuando se den varias definiciones, casi todas son incompletas y poco precisas.

Unos suponen que el éter es un flúido eminentemente elástico, que llena los espacios interplanetarios, que impregna y empapa, por expresarnos de este modo, toda la materia ponderable, extendiéndose entre las moléculas, entre los

átomos, y hoy se diría que entre los mismos huecos infinitamente pequeños de cada átomo, dado que los átomos se van convirtiendo en verdaderos sistemas astronómicos en miniatura.

Mas la palabra flúido, aunque se agregue que es eminentemente elástico y que es eminentemente sutil, es muy vaga.

Habría que decir, si es un flúido continuo ó si está compuesto de átomos etéreos, colocados á distancia y sujetos á atracciones y repulsiones recíprocas, como suponía Cauchy y como suponen casi todos los autores que exponen la teoría de la luz según los métodos clásicos.

En el primer caso se formula esta otra pregunta: ¿Un flúido continuo, que no tiene huecos ó intervalos, puede ser elástico?

Permítasenos que por hoy no contestemos á esta interrogación ó que contestemos con otra. ¿Por qué no?

En esta última acaso hay un problema casi metafísico, que por el momento no podemos abordar.

En la segunda hipótesis, es decir, admitiendo que el éter sea discontinuo, y sujetos sus átomos ó elementos á fuerzas recíprocas, venimos á parar de nuevo al problema de la acción á distancia, á no ser que supongamos, entre los átomos de éter, otro éter más sutil, una especie de subéter para el cual volverían á plantearse los mismos problemas; y así sucesivamente á la manera que se trata de agotar una línea fijando en ella puntos muy próximos y en los intervalos nuevos puntos.

***

Pero hay más, ¿el éter es homogéneo ó heterogéneo? ¿En cada punto, la intensidad de éter (valga la palabra), es la misma ó puede ser distinta?

Todo esto y cuanto hemos dicho antes, y cuanto nos queda por decir, valía la pena de que se explicase para cada éter

hipotético, porque de lo contrario, al aplicar la teoría mejor concebida y más ingeniosa á uno de estos flúidos á que nos referimos, se corre el peligro de que la teoría quede en el éter, lo cual es mucho peor que quedar en el aire.

Además, autores hay que no consideran al éter como una substancia simple y única, sino como la superposición de dos substancias iguales y opuestas, como son iguales y opuestas la electricidad positiva y negativa. Superposición, repetimos, íntima, profunda, interna, y perdónesenos si á fuerza de adjetivos queremos expresar algo que no puede expresarse por medio de palabras; porque en rigor nos rozamos con lo que pudiera llamarse la metafísica del espacio, y nos empeñamos en dar forma sensible á lo que no es susceptible de tal representación.

***

Y siguiendo en esta enumeración de sistemas etéreos, sistemas que, hay que reconocerlo, se parecen mucho al caos, podemos citar nuevas hipótesis: hay quien supone en el éter una constitución análoga á la de los dieléctricos; es decir, que los átomos ó partículas de éter sólo pueden separarse á distancias pequeñísimas de su posición de equilibrio. Cada perturbación está encerrada en un espacio muy pequeño alrededor de la posición primitiva. Este espacio, en cierto modo, constituye una celdilla, de suerte que la perturbación se detiene en las paredes de la celdilla expresada.

Y todavía otra hipótesis más: la del fluido inductor de Mr. de Poincaré, que ni siquiera supone que exista. Es para el insigne autor una especie de andamiaje.

A todas estas hipótesis hay que agregar la hipótesis de los torbellinos, que tampoco es única; y, en suma, las hipótesis que resultan de combinaciones diversas de las ya indicadas.

El estudio de todas estas hipótesis nos ocuparía muchas conferencias si hubiéramos de dedicar á ellas nuestra atención.

Pero como no es éste el objeto del presente curso, ni con él se relaciona de una manera inmediata, aquí terminaremos la incompleta enumeración que precede.

***

A las hipótesis sobre el éter se unen íntimamente las hipótesis sobre la electricidad, que también son numerosas, y en las que tampoco, por las razones expuestas, podremos detenernos.

En terminos generales, se dice que la electricidad es un fluido; pero esto es decir muy poco.

Y todo lo que explicábamos hace un momento respecto al éter, podemos repetirlo respecto á la electricidad.

¿Es un fluido único en que el exceso ó el defecto, á partir de un estado medio, constituyen las dos modalidades, ó dicho de otro modo, las dos electricidades, positiva y negativa?

Hipótesis que hace pocos años era la predilecta.

¿O el fluido eléctrico está compuesto de dos fluidos contrarios, que al separarse dan lugar á la electricidad positiva y á la electricidad negativa, y al reunirse en cantidades, que podemos llamar equivalentes, crean un estado neutro?

Esta hipótesis, que fué la primitiva, que dominaba en todos los libros de Física, que siguió dominando, á pesar del triunfo de la *hipótesis unitaria*, pero sólo en cuanto era cómoda para el estudio y los cálculos de la electricidad, hoy vuelve á prevalecer, aunque bajo otra forma.

Y podemos continuar nuestras interrogaciones, diciendo: ¿Es la electricidad un fluido continuo, como al principio se creía, aunque sin fijar bien este concepto de continuidad, ó

está formada por partículas ó átomos eléctricos, á que se da el nombre de electrones, á saber: electrones positivos y electrones negativos, ó, según otros autores, por iones de diferente signo?

Estos electrones, ¿están formados todos ellos de materia eléctrica, ó llevan núcleo ponderable, como se admite en el cálculo de los rayos catódicos y de su velocidad, y como se supone evidentemente al buscar la relación entre la masa eléctrica y la masa ponderable de cada electrón?

Terminemos esta serie de interrogaciones, que poco trabajo nos costaría prolongar indefinidamente.

Y es lo triste que tales interrogaciones no se dirigen á la naturaleza, á la realidad misma, sino á los diferentes autores que formulan unas y otras hipótesis.

No se les pregunta lo que es, porque en rigor no lo saben, ni se puede exigir que lo sepan.

Lo que se les pregunta es lo que suponen que sea; ó de otro modo, que expliquen la hipótesis que aceptan en términos claros y precisos.

Y no siempre la supuesta contestación es tan clara ni tan precisa como fuera de desear.

***

Y aún queda el problema más difícil, más hondo y más intrincado.

¿Qué relación existe entre el éter y la electricidad?

¿Es la electricidad algo distinto del éter, que en el éter flota, como flotan los corpúsculos en el aire, ó es la electricidad el mismo éter condensado en una ó en otra forma, ó acaso dilatado?

Las imaginaciones de los autores se han dado rienda suelta en todos estos problemas; llegando á forjar teorías generales del universo material; haciendo brotar la electri-

cidad del éter, para disolverla en el mismo al fin de alguna evolución; suponiendo aun más: que la materia ponderable no existe, sino que cada átomo ponderable es un conjunto de electrones.

Y, en suma, tendiendo á sustituir, en gran parte, la solución clásica del siglo XIX, fundada en la hipótesis mecánica y de la materia ponderable, por la que pudiéramos llamar la hipótesis eléctrica; y agregaremos por nuestra cuenta, en una nueva Mecánica de lo imponderable, complemento natural de la Mecánica clásica de las masas ponderables.

Pero, sobre todo cuanto llevamos dicho en esta última parte de nuestra conferencia, no cabe una crítica general, porque no se trata de un sistema definitivo, sino que en todo caso, cabrían críticas parciales sobre cada hipótesis particular.

Y estas críticas no podemos hacerlas por incidencia; quedan, pues, para cuando tratemos en años sucesivos, según es nuestro deseo, de las teorías modernas de la Física, y sobre todo, de las teorías modernas de la electricidad.

Por el momento, y después de las observaciones que preceden sobre *la masa, la fuerza, el éter* y *la electricidad*, debemos pasar al examen, siquiera sea rapidísimo, del *movimiento*, y de las hipótesis que sobre el mismo se establecían en la Mecánica clásica.

Tal será el objeto, ó uno de los objetos, de la conferencia inmediata.

XXV.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia sexta.

SEÑORES:

Como preparación al estudio de la Elasticidad, según el método de Mr. Poincaré, y al mismo tiempo, y casi pudiéramos decir, aprovechando la ocasión, como introducción á las teorías de la nueva Física y de los nuevos problemas que plantea, hicimos en las conferencias anteriores un resumen rapidísimo de las críticas que se han formulado sobre los conceptos fundamentales de la Mecánica clásica, á saber: la *masa*, la *fuerza* y el *éter;* y prometimos decir algo en esta conferencia respecto al *movimiento.*

Algo diremos, pero será muy poco; porque si en esta cuestión nos engolfásemos, no llegaríamos al fin con la rapidez con que deseamos llegar; y, por otra parte, es el punto que menos se relaciona, ó que se relaciona de una manera más remota, con este problema de la Elasticidad.

Se admite el espacio, el espacio vulgar, por decirlo de este modo, el de las tres dimensiones, dejando aparte lucubraciones metafísicas y teorías fisiológicas. Se admite el espacio, repetimos, infinito, según unos, indefinido, según otros, nueva forma de la sensibilidad, según los kantianos.

Se admite el movimiento y se admite el tiempo para deducir los conceptos de velocidad y aceleración.

Y á propósito de la teoría de la elasticidad, nada tenemos que agregar á estas diferentes hipótesis, ó á estos diferentes conceptos.

Mas surge aquí un problema, que es general para toda la Mecánica racional y para todas sus aplicaciones, ya á la Astronomía, y principalmente á la Astronomía; ya en grado menor, y del cual puede prescindirse por el pronto, á la Física matemática.

Este problema es el de los movimientos relativos y el del movimiento absoluto.

En la Mecánica racional, sobre todo en su enseñanza, ta problema casi no existía.

Se daba por buena la existencia del *movimiento absoluto* de cualquier móvil en el espacio infinito y en el tiempo infinito también: era una especie de postulado, porque se pensaba que las cosas de algún modo habían de ser en definitiva.

Y admitiendo los movimientos absolutos de dos sistemas, era un problema de Geometría pura el de los movimientos relativos.

No había más que referir en cada momento las posiciones de uno de estos sistemas á la posición del otro, como si estuviera inmóvil, y de aquí se deducían para cada punto de ambos sistemas una serie de conceptos y magnitudes definidas con todo el rigor, y sólo con el rigor, que en aquellos tiempos se exigía.

Tiempos de fe, un tanto ciega é inconsciente, pero firmísima y fecunda en muchas cosas, que la crítica moderna y un análisis implacable ponen hoy en duda.

Y así se decía: el punto A del primer sistema describe una *trayectoria absoluta* en el espacio; y para valores arbitrarios del tiempo ocupa en dicha trayectoria posiciones determinadas.

En los instantes definidos por los valores t, t', t''..... del tiempo, contados desde un origen, el punto en cuestión ocupa las posiciones A, A', A''.....

Y en esos puntos tiene velocidades perfectamente determinadas, absolutas también, V_a, V'_a, V_a''.....

Y en esos instantes está sometido á aceleraciones, también absolutas, F_a, F_a', F_a''.....

De suerte, que para el sistema de que A forma parte, y para este punto, tenemos trayectorias absolutas, que el espacio recoge en su seno, velocidades absolutas y aceleraciones absolutas también.

Este movimiento no hay que referirlo á nada; existe en sí, y por las causas que lo han determinado, sin depender de ninguna otra cosa. Son determinaciones internas, por decirlo de este modo, de un espacio inmóvil, infinito, eterno.

En cierto modo cada punto del espacio tenía su existencia inconfundible é inalterable, dando á la palabra existencia un sentido metafísico, que hoy pocos autores aceptarían.

Lo que hemos dicho del primer sistema podemos decir del segundo; cada punto B describe una trayectoria absoluta, como si el primer sistema no existiese; ocupa posiciones B, B', B'', absolutas también, camina con velocidades V_b, V_b', V_b''..... que llevan esta calificación constante, de ser absolutas; y otro tanto podemos decir de las aceleraciones F_b, F_b', F_b''.....

Definidos de esta manera ambos sistemas, el movimiento relativo se define sin dificultad; basta considerar las posiciones del segundo sistema con relación al primero, de este modo.

Un sistema de ejes inmóviles en el espacio, al cual se refiriesen los movimientos de los puntos del primer sistema y del segundo, bastaba para definir la relatividad, por emplear esta palabra, del movimiento de un punto del segundo sistema con relación á otro punto del primero, como si este estuviera fijo; y así tendríamos distancias relativas, trayectorias relativas, velocidades relativas también y aceleraciones con el mismo carácter.

Como todo esto se estudia en la Mecánica clásica, no hemos de insistir en ello, considerado el problema en su ge-

neralidad, y sólo diremos, que si ambos sistemas son rígidos, ó si se quiere sólidos, con esa solidez ideal, que según ciertos autores es el origen de la Geometría y de sus postulados, la definición de los movimientos absolutos y de los movimientos relativos es de una sencillez extraordinaria.

Basta considerar tres sistemas de ejes.

El primero fijo en el espacio, invariable como el espacio mismo, inconfundible con ningún otro sistema de ejes, con carácter absoluto, gozando, por decirlo así, de cierta *individualidad inalterable* é inconfundible.

El segundo perteneciente al sistema sólido *A*, unido á él por manera invariable y participando de su movimiento en el espacio absoluto.

El tercero presentando los mismos caracteres que el segundo, pero formando cuerpo sólido con el sistema *B*.

Para obtener el movimiento absoluto del sistema *A*, basta estudiar el movimiento de sus ejes, que serán los del segundo grupo, con relación á los ejes fijos.

Para hacer el estudio del movimiento del sistema *B*, basta conocer el movimiento de sus ejes, que serán los del tercer grupo, con relación siempre á los ejes fijos.

Para conocer el movimiento relativo de ambos sistemas, basta conocer la figura geométrica que en cada instante forman los ejes del sistema *A* y los ejes del sistema *B*.

Si aparte, en el espacio, sin tocar, por decirlo así, las primeras figuras que hemos descrito, que anchuras hay en el espacio para todo, trazamos tres ejes, que supondremos que representan los del sistema *A*, y que por de contado llevan consigo y sujetan dicho sistema *A*, y copiando las figuras que antes considerábamos para los diferentes instantes del tiempo, trazamos las diferentes posiciones de los ejes del sistema *B*, tendremos una especie de movimiento aparentemente absoluto en esta última representación del sistema *B*, con relación al *A*, que será en el fondo el movimiento relativo de ambos sistemas.

Y podremos determinar, como se hacía en la Mecánica clásica, las trayectorias, las velocidades y las aceleraciones de este movimiento relativo en función de las trayectorias, de las velocidades y de las aceleraciones de los movimientos absolutos de *A* y *B*.

Con solo la hipótesis de un espacio absoluto y de movimientos absolutos, todo lo que sigue tiene un rigor matemático indiscutible.

Y es claro que estas nociones pueden extenderse á movimientos relativos de diversos órdenes, complicando, superponiendo, enchufando, si se nos permite lo vulgar de la palabra, unos movimientos relativos en otros, como en el ejemplo vulgarísimo de una persona que se mueve en el coche de un tren, *primer movimiento relativo*; mientras el tren camina sobre sus carriles subiendo rampas, bajando pendientes, trazando curvas y vibrando todo él, *segundo movimiento relativo* del tren con relación á la Tierra; mientras la Tierra gira sobre su eje y alrededor del Sol con sus complicados movimientos que estudia el astrónomo, *tercer movimiento relativo;* mientras el sistema solar camina todavía por el espacio, y así sucesivamente.

Y aquel viajero que se agitaba en el coche, participará de todos estos movimientos relativos, y se pregunta: ¿la resultante de todos estos movimientos, será un movimiento absoluto?

En suma, ¿existe el movimiento absoluto?

***

Ocurre aquí, que este problema pudiera tener ciertas analogías con el problema de las series numéricas.

Cuando se considera el conjunto indefinido de una serie de términos numéricos, dos casos se presentan: ó la serie es

convergente y tiende hacia un número fijo y determinado, ó no tiende hacia éste límite, ya porque oscile, ya porque crezca, pudiendo ser mayor que cualquier número por grande que sea.

Y decíamos, que una cosa análoga pudiera suceder con esta serie de movimientos, suponiendo siempre que sea una serie ilimitada.

Pudiera suceder que el conjunto de todos estos movimientos dieran un movimiento resultante finito; ó que por el contrario, crecieran los movimientos totales sin límites, ú oscilasen sin tender á una especie de resultante general.

Esto, en cuanto los movimientos compuestos; que así como los términos de una serie pueden decrecer ó pueden crecer sin límite, ó puede oscilar su módulo, según cierta ley, y aun pasando por infinito, así los movimientos parciales pueden estar sujetos á variaciones semejantes á las que acabamos de señalar.

Más aun, en el conjunto de cantidades numéricas, unidas por sumas ó por restas, el número de dichas cantidades puede ser finito; pues también pudieran ser *en número* finito los movimientos del sistema á que antes nos referimos, y que se iban en cierto modo superponiendo.

Bien comprende el lector, que no son cuestiones estas para tratadas á la ligera, pero bien comprende que para no separarnos en forma divergente, por decirlo así, del objeto de este curso, no podemos hacer otra cosa que ir apuntando ideas generales.

Cuestiones son estas, por lo demás, en que á cada momento tenemos que emplear una palabra y que usar de un concepto que el espíritu positivo de la época rechaza, que la vieja metafísica acarició siempre como el predilecto y que es dédalo en que se pierde, abismo en que se hunde la razón humana, gérmen de inagotables antinomias, monstruo, por decirlo así, que se impone al pensamiento, y que si el pensamiento

lo acepta se desvanece; desesperación, en suma, del que se empeña en perseguirlo y alcanzarlo.

Nos referimos al concepto *del infinito*.

Muchos filósofos niegan que sea un concepto aplicable á la realidad, considerándolo tan sólo como un fantasma del pensamiento.

Niegan en absoluto el *infinito realizado;* en lo finito se detienen por ser lo único, que, según ellos, está al alcance de la inteligencia humana, y, cuando más, transigen con lo *indefinido*.

Así, no admiten que el número de astros sea infinito: no lo admitía Cauchy.

Niegan que el número de movimientos relativos pueda ser infinito tampoco, como infinito actual y realizado.

Pero ¡cuántas dudas, cuántas objeciones ocurren, al abordar estos problemas, contra unos y contra otros, contra los que afirman y contra los que niegan!

¡Si en lo finito, por finito que sea, volvemos á encontrar lo infinito, por lo menos en estado potencial!

¡Si lo infinitamente pequeño, según decía Pascal, es un gigante disfrazado de enano!

Y si acudimos á lo indefinido, ¿es que *la posibilidad* de lo indefinido no se desarrolla en el seno de un infinito?

Lo que el matemático sabe de cierto en todas estas cuestiones, salvando ciertas teorías modernas en que no podemos penetrar, es que, *suponer al infinito realizado y maneiarlo como si fuera cantidad finita*, puede conducir á resultados absurdos ó contradictorios.

Demos, pues, de mano á problemas que nos arrastrarían consigo por esas misteriosas atracciones que el abismo tiene sobre el ser humano, contentándonos con caminar paso á paso por terreno, al parecer más firme, ó contentémonos, cuando más, con ir al borde de la sima, sin acercarnos mucho á ella.

***

Entre todas las cuestiones que al movimiento se refieren, se encuentra la de la *relatividad.*

Aunque la palabra no está en el Diccionario, permítasenos que la empleemos, porque, á decir lo cierto, no sabemos con qué palabra substituirla.

La relatividad del movimiento no es una convención, ni es una definición tampoco, ni es una hipótesis; más bien pudiéramos decir que es un postulado de la Mecánica clásica, que tiene ciertas relaciones de parentesco, por decirlo de este modo, con el postulado de las paralelas.

En la vieja Mecánica tiene un sentido claro y preciso, y puede explicarse en términos concretos, y para ello empleemos el siguiente ejemplo:

Supongamos un sistema de masas materiales enlazadas por medio de fuerzas y situadas en el espacio absoluto, dicho sea con perdón de los que lo niegan, y admitamos, además, que dicho espacio está completamente vacío: ni éter, ni electricidad, ni fluido de ninguna clase; es el espacio abstracto é inerte de la Geomería pura, una especie de potencialidad geométrica, y, cuando más, cinemática.

En él no existen más que las masas ponderables y las fuerzas que hemos indicado.

Para abreviar, llamémosle sistema *A*.

Y dice el principio de la relatividad: Si á este sistema *A* se le comunica un movimiento de traslación rectilíneo y uniforme, los movimientos que en el sistema se verificasen no sufrirán por este nuevo orden de cosas alteración ninguna.

Las trayectorias se transportarán íntegras; otro tanto les sucederá á las masas, á las velocidades, á las aceleraciones, á las fuerzas.

Todo este mundo *A* funcionará, perdóneseme la palabra, como funcionaba antes de que se le aplicase el movimiento de traslación á que nos referimos, y que también, para mayor sencillez, llamaremos *T*.

De suerte, que un sabio, un físico, un observador cual-

quiera, que participase de este sistema *A* y que con él caminara, no podría darse cuenta de dicho movimiento de traslación *T*, y no se comprende bien qué experiencias podría combinar para demostrar experimentalmente dicho movimiento.

En suma: el movimiento de traslación á que nos referimos no alteraría las condiciones del movimiento del sistema *A*, y hasta podría intentarse, dentro de la hipótesis sencillísima que hemos establecido, una demostración matemática del postulado de la relatividad.

***

Pero compliquemos más el caso que vamos examinando.

Supongamos que el sistema *A* no se encuentra en el espacio vacío, sino en el espacio lleno de éter.

Y en esta nueva hipótesis consideremos dos casos.

Primero. Que el éter participa del mismo movimiento de traslación que el sistema *A*.

Parece, á primera vista, que nada hay que modificar en las conclusiones obtenidas.

El sistema *A* se complica, se extiende, y ya no se compone sólo de masas ponderables, sino de dichas masas y de un ambiente de éter que participa con ellas del movimiento de traslación.

Y, sin embargo, aquí asalta una primera duda.

Si respecto á las masas ponderables nada hay que cambiar á lo dicho, porque las fuerzas que actúan entre los diversos puntos ponderables del sistema son independientes de las velocidades de dichos puntos, según la hipótesis fundamental de la Mecánica clásica, no podemos asegurar lo mismo respecto al éter, ni respecto á la electricidad, que acompaña en casi todas las hipótesis de la Física al éter mismo.

Dos elementos de electricidad del mismo nombre se rechazan cuando están inmóviles; pero cuando están en movimiento, según las experiencias de Rowland, equivalen á dos corrientes del mismo sentido y se atraen; de suerte que la fuerza primitiva de repulsión resulta disminuída; en general resulta modificada y aun esta fuerza depende de la orientación de la recta que une los dos puntos.

Luego aquí cae en defecto el principio de la relatividad.

El movimiento de traslación general que suponemos, teóricamente no es indiferente para el sistema; la magnitud del cambio nada importa para la teoría: en poco ó en mucho modifica las fuerzas eléctricas que en el sistema se desarrollan.

En este caso existe una incompatibilidad entre el postulado en cuestión y el experimento de Rowland; y una de dos: ó aquel postulado no es aplicable, ó el experimento de Rowland cae en defecto *cuando la electricidad se mueve con el éter.*

Segundo. Que el sistema *A* se mueva en el éter inmóvil.

Por las razones expuestas, y por otras que indicaremos después, aun cuando el principio de relatividad en su pureza abstracta pudo admitirse, no podría admitirse en teoría sino como aproximado en este caso; y esto nada tiene de extraño, porque el sistema *A* ya no se mueve en el vacío, sino que se mueve abriéndose paso por el fluido etéreo, y aun ocurre que en estas circunstancias, al menos *à priori*, la Física pudiera combinar experiencias sumamente sutiles para poner en evidencia el movimiento de traslación, á que venimos refiriéndonos.

Es un caso análogo, valga lo vulgar y tosco del ejemplo, al de un automóvil que camina con gran velocidad en el seno de la atmósfera.

El aire no se ve: cuando el automóvil está inmóvil, no se puede sospechar la existencia de dicho fluido; pero cuando el automóvil se pone en movimiento, crea, por decirlo así

un viento en sentido contrario que oprime, en cierto modo, al vehículo y á los que en él van, tendiendo á aplastarlos.

Esto explica, ó por lo menos da una imagen material, por grosera que sea, de la hipótesis de Lorentz et de Fitz-Gerald.

Estos dos físicos, dice Mr. Poincaré, suponen que todos los cuerpos llevados en un movimiento de traslación, se contraen en el sentido de dicha traslación, al paso que las dimensiones perpendiculares á ella permanecen invariables. Tal contracción es la misma para todos los cuerpos, siendo por decontado pequeñisima: alrededor de doscientas mil millonésimas para una velocidad como la de la Tierra.

Nuestros instrumentos de medida, continúa diciendo el insigne matemático, no podrían apreciar esta contracción, aun cuando fuesen mucho más precisos, mucho más exactos, porque los metros que empleásemos para medirla, experimentarían la misma contracción que los objetos que hubiera que medir.

¿Podría, sin embargo, medirse no empleando un metro material, sino el tiempo que la luz emplea en recorrer una distancia determinada?

Esto es lo que ha hecho precisamente Michelson.

Claro es, ó al menos así nos parece, que esta contracción de los cuerpos no podría explicarse si el éter estuviera en movimiento con la misma velocidad de todos los cuerpos en él contenidos, obedeciendo el sistema *A*, y el éter que le rodea, á un mismo movimiento de traslación.

Para estudiar todos estos efectos delicadísimos, se han empleado muchos sistemas, y puede verse un estudio muy interesante y digno del insigne maestro, en varios trabajos de Mr. Poincaré, por ejemplo: en un artículo de la *Revue des Sciences*, y en sus obras tituladas *La Valeur de la Science* y *Science et Méthode*.

El problema es éste:

El principio de relatividad, ¿puede considerarse como un principio fundamental de la Mecánica?

¿Puede el físico llegar á un experimento qué ponga en evidencia un movimiento general de traslación, como el que antes indicábamos?

¿O es, por el contrario, absolutamente imposible combinar ningún experimento para demostrar experimentalmente un fenómeno de esta naturaleza?

Aquí suspendemos esta discusión, que no podríamos, no ya agotar, sino desarrollar convenientemente en muchas conferencias.

De todo lo expuesto, sólo nos interesa retener dos ideas; pero estas son fundamentales.

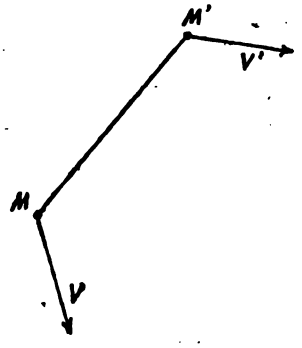


Figura 16.

En la Mecánica clásica, no sólo se admitía la acción á distancia, no sólo se partía de la hipótesis de las fuerzas centrales, sino que se suponía que la acción de dichas fuerzas era *instantánea*, y que era independiente de las velocidades de que estuvieran dotados los puntos, que por sus atracciones ó repulsiones determinaban la existencia de las fuerzas, que ponían en juego para sus cálculos los matemáticos del último siglo.

Más claro: supongamos dos puntos materiales M y M' y entre ellos una atracción.

Pues esta atracción sólo dependía de las masas de ambos puntos, que representaremos también por M y M', y de la distancia entre ellos, que llamaremos R.

De suerte que representando por f un coeficiente, que dependerá de las unidades que se elijan, la atracción entre los dos puntos M, M' (fig. 16) será

$$f\frac{MM'}{R^2}$$

Esta será la fuerza de atracción si los puntos están inmóviles; pero aunque dichos puntos estén en movimiento, el punto M con la velocidad V, el punto M' con la velocidad V', la atracción entre ambas será la misma y se expresará por la misma fórmula: ni ambas velocidades, ni sus orientaciones entrarán en ella.

Dicha hipótesis se enlaza, como se ve desde luego, con el principio de relatividad; sin ella dicho principio no podría existir, porque la fórmula que expresase la acción entre ambos puntos contendría V y V' y sus cosenos directores.

Esto afirmaba la Mecánica clásica, y de este modo se simplificaban todos los problemas.

Lo que pasaba en cada instante era independiente de lo que había pasado en los instantes anteriores; las acciones entre las masas no dependían de la *historia* de éstas, si se nos permite expresarnos de este modo.

La Física moderna, la crítica de estos últimos tiempos, los nuevos puntos de vista en que se colocan los matemáticos, los nuevos descubrimientos de la ciencia, han quebrantado grandemente todas estas ideas.

O dicho con más exactitud: para la Mecánica clásica, ó sea de las masas ponderables, tal como se constituyó en el pasado siglo, el peligro no es grande ni la ruina es inminente, como suponen algunos; la ciencia clásica subsistirá, al menos, como una primera aproximación de la verdad. Pero cuando al lado de la vieja Mecánica se construya una nueva para el éter, la electricidad y el magnetismo y para sus relaciones con la materia ponderable, ó cuando para ambas Mecánicas se construya una gran síntesis, es evidente que las hipótesis antes señaladas deberán modificarse profundamente.

Ya la teoría de la electricidad había planteado problemas y había levantado dudas que la vieja Mecánica no podía ni resolver ni desvanecer tampoco,

Fijemos bien las ideas, procurando que nuestro pensamiento sea claro.

Supongamos dos masas eléctricas e, e' (fig. 17) á la distancia r.

Mientras se estudiaban efectos electro-estáticos, las hipótesis de la Mecánica de las masas ponderables se aplicaban sin dificultad.

Si la distancia de las dos masas e, e' era r, resultaba una fuerza atractiva ó repulsiva, según los signos de ambas electricidades, que estaba representada por

$$K\frac{ee'}{r^2},$$

siendo K un coeficiente numérico.

Dicha fuerza actuará en la dirección de la recta $e\,e'$.

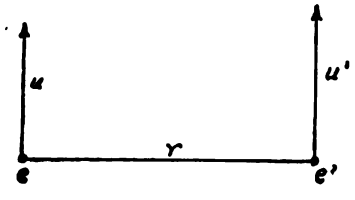


Figura 17.

Pero al pasar á la electrodinámica, aparecía una circunstancia nueva, sin ejemplo en la Mecánica de las masas ponderables.

Admitamos para más sencillez la exactitud de las experiencias de Rowland, y supongamos que á las dos masas e, e' se les comunica las velocidades u y u', que para simplificar, supondremos perpendiculares á la línea de las masas.

Pues en este caso, asemejando los movimientos de ambas masas eléctricas á dos corrientes, la fuerza atractiva ó repulsiva de ambas corrientes estaría representada por la fórmula

$$K'\frac{eu\,.\,e'u'}{r^2},$$

en que eu, $e'u'$ son cantidades proporcionales á ambas corrientes.

Fórmula que ya depende de las dos velocidades u y u'.

Y si en general consideramos dos corrientes I, I' en dos orientaciones cualesquiera, la fórmula de la acción mutua de dos elementos, ó sea la fórmula de Ampere, contendrá además, como se sabe, cosenos que determinarán la orientación relativa de ambos elementos de corriente.

En suma, en la nueva Mecánica hay que tener en cuenta para determinar la acción de dos elementos, no sólo las masas eléctricas, no sólo la distancia, sino las velocidades y la orientación de estas velocidades.

La Mecánica clásica es impotente para resolver estos problemas á causa de esta circunstancia, que venimos repitiendo: porque hay que tener en cuenta las velocidades y las direcciones de ambas.

Por ahora no hacemos más que adelantar ideas generales, sobre las cuales no podemos insistir en este momento.

***

Y aquí pondremos término á esta especie de estudio preliminar ó de introducción al método de Mr. Poincaré para el problema de la Elasticidad.

Claro es que una gran parte, la mayor, de todo lo que llevamos dicho en estas seis primeras conferencias, no tiene aplicación á dicho método.

Hemos apuntado muchas ideas que pertenecen á la nueva Física matemática; son anticipaciones, en cierto modo, á cuestiones y problemas que trataremos en su día con toda la extensión que podamos.

Pudiera decir, que hemos intentado, siempre con carácter elemental, hacer para la nueva Física matemática, ó, mejor dicho, para una parte de ella, algo de lo que hicimos en el primer curso de esta asignatura para la Física matemática clásica.

Si el título no pareciera excesivamente ambicioso, pudiera decirse que estas seis primeras conferencias son una *introducción* á la nueva Mecánica, que hoy se está elaborando para la electricidad y el éter, y, por lo tanto, para la nueva Física matemática.

No nos atrevemos á tanto; es decir, á emplear este nombre de introducción á la nueva ciencia; en primer lugar, porque no hemos hecho otra cosa que apuntar ideas; en segundo lugar, porque aun prescindiendo de lo superficial del estudio que llevamos hecho, dicho estudio resulta incompleto, aunque en el curso próximo procuraremos completarlo en cierto modo.

Pero es que la nueva ciencia, las nuevas teorías, los nuevos descubrimientos y lo profundo de la nueva crítica, siquiera á veces parezca exagerada y cruel, han sido una constante tentación que nos ha hecho separar en estas primeras conferencias del camino recto, que nos habíamos propuesto seguir, dentro del programa formulado desde el principio.

***

Volvamos, pues, á este programa; es decir, á la exposición del método de Mr. Poincaré, para el problema de la Elasticidad.

No todo lo que hemos dicho en las conferencias precedentes es inútil para nuestro objeto; es decir, para el estudio de la obra sobre la teoría de la Elasticidad que publicó hace algunos años el insigne maestro.

Ya lo dijimos en una ó en varias de las conferencias anteriores.

El método de Mr. Poincaré es fundamentalmente distinto de los métodos empleados por sus predecesores, aunque tenga, como no podía menos de suceder, varios puntos de contacto con ellos.

Mr. Poincaré procura reducir el número de hipótesis, prescindiendo de aquellas que con más energía combate la crítica moderna.

Y extractando, por decirlo de este modo, todo el estudio de estas primeras conferencias y no tomando sino lo que es pertinente para nuestro caso, podemos formular esta especie de lista.

El nuevo método prescinde de la hipótesis de la acción á distancia, según la comprendía la Mecánica clásica.

No lo dice explícitamente Mr. Poincaré, y aun en el curso de su obra hay momentos en que hipotéticamente la admite; pero en rigor, al establecer las ecuaciones fundamentales, no usa en forma directa de dicha hipótesis.

No creemos, pues, interpretar equivocadamente la intención del ilustre maestro, diciendo que prescinde de la acción á distancia.

Prescinde, asimismo, de la hipótesis de las fuerzas centrales; y esto sí lo dice y lo consigna explícitamente. En esto se separa por completo del método de Cauchy, y la suya es más general que la teoría de aquel inmortal matemático.

Pero no es que niegue en absoluto la posibilidad de que en un sistema existan fuerzas centrales, es que se eleva á un mayor grado de generalidad.

El caso en que las fuerzas sean centrales está comprendido en el nuevo método; pero está comprendido como caso particular, porque dicho método es independiente de aquella hipótesis restrictiva.

Por último, al principio *de las fuerzas centrales*, y esto es fundamental, y lo desarrollaremos en la conferencia próxima, substituye el principio de la *conservación de la energía.*

Estos son los tres puntos principales del método de monsieur Poincaré: prescindir de la acción á distancia, prescindir de las fuerzas centrales como hipólesis para el desarrollo del método y substituir á este principio el de la conservación de la energía.

Antes de terminar esta conferencia debemos insistir sobre la importancia de los dos últimos puntos que acabamos de indicar, que será, en el fondo, repetir lo que ya en varias ocasiones hemos dicho.

En la Física matemática clásica, que era en cierto modo, ó por lo menos en su mayor parte, la de la Mecánica de las masas ponderables, la hipótesis de las fuerzas centrales parecía la más natural y la más sencilla.

Natural y sencillo, y casi evidente parecía, que si dos puntos materiales, m y m', ejercían cierta acción uno sobre otro, ya fuese de atracción, ya de repulsión, este esfuerzo se ejerciera según la recta $m\,m'$ que unía ambos puntos; ni se comprendía que pudiera ser de otro modo.

Y en esta hipótesis, ó en este postulado, casi pudiéramos decir en este axioma, se fundaban todos los métodos de la Física matemática.

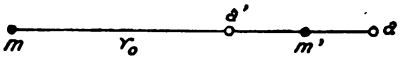


Figura 18.

La fuerza actuaba según la recta $m\,m'$ (fig. 18), era proporcional á ambas masas y era función de la distancia. Esta $f(r)$ es la que llamábamos en nuestro primer curso, para abreviar la explicación, la función de Saint-Venant.

Función que para cierto valor de r, que llamaremos r_0, se reducía á cero; que cuando r crecía, representaba una fuerza atractiva; que, por el contrario, cuando decrecía, haciéndose menor que r_0, representaba una fuerza repulsiva. De suerte que r_0 representaba la posición de equilibrio de las dos masas m y m'; y de equilibrio estable, porque si el punto m' venía á parar á a, ó del lado opuesto á la posición a', en ambos casos el móvil tendía á volver á su posición de equilibrio m'. Pero siempre el esfuerzo entre m y m' seguía la dirección de esta recta. Así lo exigía el principio de las fuerzas centrales.

Mas la circunstancia de poder cambiar de signo la fuerza $m\,m'\,f(r)$ debió hacer pensar algo á los matemáticos.

Mientras m y m' sean dos masas homogéneas muy pequeñas, en efecto, apenas se comprende que la atracción ó la repulsión no siga la dirección de la línea $m\ m'$, aun no siendo esféricas dichas masas m y m'; porque en pequeñas esferas pueden descomponerse, y la atracción de cada esfera de m sobre cada esfera de m' no se puede admitir que deje de ser central, como ya lo explicamos en otra conferencia. Y, como después de todo, las masas m y m' son muy pequeñas por hipótesis, la resultante de todos estos esfuerzos parciales tampoco es posible que deje de ser una fuerza que vaya de un punto de m á otro punto de m'; es decir, que deje de ser fuerza central.

Pero como desde el momento en que esta fuerza puede cambiar de signo, á menos que no se acumulen hipótesis ya casi de carácter metafísico, y que no se acuda á las cualidades ocultas; suponiendo, repetimos, que la fuerza en cuestión cambie sin que se sepa por qué con la distancia r, ya todo el argumento que precede queda grandemente quebrantado, porque es necesario admitir que las masas m y m' no son homogéneas, que hay en cada una de ellas un elemento que representa la atracción, y otro que representa la repulsión, y que al variar la distancia r, según prepondere uno ú otro, la resultante de atracciones y repulsiones podrá cambiar de signo.

Al menos esta es la hipótesis más natural y aun me atreveré á decir menos metafísica.

Lo dicho conduce á rechazar por completo la hipótesis, explícita ó implícita, de la Física matemática clásica, y, por lo tanto, del método de Cauchi para el problema de la Elasticidad.

Quiero decir, á rechazar la hipótesis, que suponía á los cuerpos, compuestos de puntos materiales homogéneos, para los que no había que tener en cuenta más que fuerzas centrales actuando sobre ellos.

Y claro es que en todo lo dicho hasta aquí suponemos las

masas m y m' en el vacío ó en un éter inmóvil, de cuya acción sobre las masas m y m' prescindimos; porque si no prescindiésemos de esa circunstancia, aun el problema sería más complicado.

Pero sigamos el hilo de nuestro pensamiento.

***

Desde el momento en que las masas m y m' no son homogéneas, y en que aun siendo pequeñísimas contienen elementos de distinta naturaleza, por ejemplo, núcleos de materia ponderable, representantes, por decirlo así, de la fuerza atractiva, y atmósferas etéreas ó eléctricas como elemento representativo de las fuerzas repulsivas; ó bien otra combinación cualquiera de elementos diversos, de los qne definen las últimas hipótesis relativas á la constitución de la materia; desde el momento, repetimos, en que m y m' puedan estar formadas, aun siendo muy pequeñas, de un electrón central electro-positivo y alrededor, de varios electrones electronegativos, que graviten sobre el centro, constituyendo algo asi como un sistema planetario de electrones, en cualquiera de estas hipótesis la de las fuerzas centrales no es ya legítima.

Para convencernos de ello, no tenemos más que recordar lo dicho en el primer curso de esta asignatura, reproduciendo un caso que allí presentamos con motivo de la acción de una corriente sobre el polo de un imán.

Tomemos (fig. 19) un elemento infinitamente pequeño a en la masa m. Y dos elementos b, b' de distinta naturaleza en la masa m'.

Y supongamos que la acción de los demás puntos del sistema á que pertenecen m y m' han colocado á b y b' en la posición que indica la figura.

Para fijar las ideas admitiremos que *a* representa un elemento de electricidad positiva.

b' otro elemento de electricidad positiva también;

Y *b*, ó un elemento ponderable, ó un elemento de electricidad negativa.

a y *b* se atraerán según la fuerza central *ad*.

a y *b'* se rechazarán según la fuerza, también central, *ae*.

Y las dos fuerzas *ad* y *ae* determinarán una fuerza *af*, que en términos generales podemos decir que no será central; es decir, que no encontrará al cuerpo infinitamente pequeño *m'*.

Ahora bien; en un cuerpo elástico, según las teorías y los

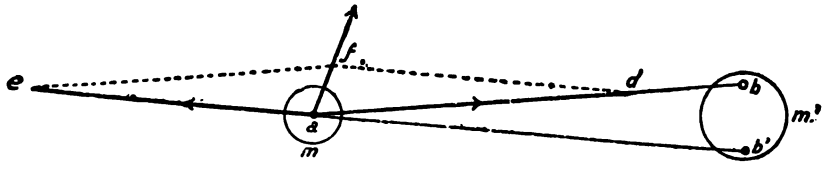


Figura 19.

descubrimientos modernos, y casi nos atreveríamos á decir según la lógica inductiva, los cuerpos materiales que constituyen el cuerpo elástico no son centros simples y homogéneos, son sistemas complejos sobre los cuales pueden hacerse muchas hipótesis. Acaso contengan, dirán algunos, materia ponderable, si existe; seguramente contendrán electricidad, y actuarán unos sobre otros, perturbando en cada uno de estos elementos *m*, *m'*..... la distribución de las masas ponderables y la distribución de ambas electricidades, dando lugar á algo parecido, aunque de mayor complicación, á lo que hemos figurado en el elemento *m'* de la figura 19.

Esto sin contar con el medio ambiente, ó sea con el éter en que los elementos *m*, *m'*..... del cuerpo elástico están sumergidos, y cuyas acciones sobre estos elementos se comprende ó se pretende adivinar, que podrán ser muy complicadas.

Porque, no lo olvidemos, en la física matemática moderna y aun en la física matemática clásica, hay que contar, siquiera sea provisionalmente, con todos estos elementos:

La materia ponderable.

La electricidad positiva.

La electricidad negativa.

El éter.

Elementos de estas cuatro clases estarán entre sí en relación de actividad.

Y á todo esto hay que agregar que la transmisión del esfuerzo de un elemento á otro elemento no será probablemente instantánea, sino que dichos esfuerzos caminarán con cierta velocidad al pasar de un elemento á otro.

Estas consideraciones podrán convencernos una vez más de que importa, para la exactitud de las teorías, prescindir, sin negar del todo la acción á distancia, de la transmisión instantánea, de la hipótesis de las fuerzas centrales como única, y de la homogeneidad de los puntos materiales que constituyan los sistemas elásticos.

XXVI.—Los principios fundamentales de la Mecánica racional.—Un primer capítulo de dinámica.

POR JOSÉ RUIZ-CASTIZO.

Constitución científica de la Mecánica racional.— En todo tiempo, desde que Galileo, Huyghens y Newton echaron los cimientos de esta Ciencia, han dado motivo sus principios fundamentales á objeciones y comentarios desde múltiples puntos de vista; pero ahora últimamente, desde hace unos treinta años, la crítica y el análisis han llegado á un grado de verdadera exaltación, y dichos principios están siendo en la actualidad examinados, comentados, refutados, defendidos y reformados por autores y escritores científicos de diversos países con tanto interés que, en toda clase de publicaciones, son miles de páginas las que cada año se dedican á su estudio.

Todos los pensadores que han escrito sobre Mecánica coinciden en afirmar que esta Ciencia no puede constituirse como ciencia de razón pura, al modo que el Algebra y la Geometría, y que, en substitución de verdades axiomáticas, como las que á éstas sirven de base, aquélla tiene necesidad de acudir á experimentos é hipótesis, ó á intuiciones mucho menos francas y de común consenso que aquellos axiomas, para establecer algunas proporciones de partida, ó fundamentos á que referir las últimas razones de las leyes cuantitativas de los fenómenos mecánicos. Pero si en esta apreciación general existe perfecto acuerdo, no así en el valor y sentido lógico de dichas proposiciones, ni en el carácter de generalidad, de verdadera universalidad, que se ha pretendido asignarles. Para algunos autores, son verdades contin-

gentes, ó siquiera postulados sujetos á revisión, condicionales y subordinados á los resultados de nuevas investigaciones, y que sólo como inducciones ó generalizaciones hipotéticas cabe admitir en la Ciencia; para otros, al contrario, han llegado á merecer el concepto de verdades necesarias, universales é inmutables, que si bien han sido descubiertas no más que empíricamente, han logrado, una vez enunciadas y discutidas, imponerse á la mente humana, con caracteres de evidencia nada remota, como principios poco menos que axiomáticos, cuando no, en cierta medida, accesibles al raciocinio deductivo, esto es, casi con el valor de teoremas racionales.

No entra en nuestros propósitos historiar el desarrollo y los alcances que cada época y cada analista han dado á la opinión ó tendencia por la que se han pronunciado, ni mucho menos extendernos en una crítica amplia de dichos principios. Más fecunda labor que esa, en la cual es dificilísimo aportar, no ya una idea nueva, pero ni una nueva modalidad de las antiguas, creemos puede resultar un ensayo de nueva redacción y exposición de la doctrina criticada. Así, pues, en el siguiente *Primer capítulo de Dinámica*, de Mecánica propiamente dicha, damos á conocer la forma con que á nuestro entender pueden y deben exponerse los fundamentos de esta Ciencia, procurando los mayores elementos de claridad y convicción para la mente del principiante.

Criterio de nuestra exposición. — La elegancia y las ventajas de unidad y generalidad del procedimiento deductivo en la exposición de toda ciencia, han seducido á la mayoría de los analistas, habituándolos á prescindir, siempre que lo han creído posible, de la experiencia y la inducción como bases de los conocimientos mecánicos. Sin embargo, no puede olvidarse que el proceso de la evolución científica es siempre una sólida base del método didáctico, ni cabe desconocer que muchas de las objecciones hechas á la Mecánica clásica se deben á este empeño, acaso exagerado, de condenar la

vía experimental é inductiva (*). Según estas ideas, nuestra exposición tiene el carácter de «mezcla de postulados y de experiencias más ó menos precisas, con algo de antropomorfismo», según frase de un autorizado analista (**), considerando, de acuerdo con otro matemático no menos ilustre (***), que «ninguna rama de nuestros conocimientos escapa á este reproche, dado que toda ciencia lleva forzosamente el sello de nuestros conceptos mentales». Y así, procurando sistematizar los conocimientos *empíricos* debidos á la observación de los hechos y á la experimentación, en cuanto se relacionan con nuestra Ciencia, formulamos, con el valor lógico de *postulados ó principios*, todas aquellas proposiciones que, en nuestra opinión, participan del carácter de hipotéticas, como generalizaciones que vienen á ser de los resultados de observaciones y experimentos *no siempre precisos, á veces incompletos, y en todo caso, de restringida significación.*

I. — Fuerza y movimiento. — Inercia.

1. **Sujetos móviles. Punto material.** — Al tratarse ya de movimientos reales, es claro que no debemos tomar por sujetos móviles los cuerpos geométricos como en Cinemática, sino *los físicos, volúmenes ocupados por materia, con todas sus propiedades fundamentales.* Pero, concretándonos por ahora á los movimientos de los sólidos, los consideraremos por abstracción, mientras otra cosa no se advierta, incompre-

---

(*) Dice *M. Poincaré*, «La sciencie et l'hypotèse»: «Los ingleses enseñan la Mecánica como ciencia experimental; en el continente se la expone más ó menos cumplidamente como ciencia deductiva y *a priori*. Son los ingleses quienes tienen razón: ello es de pura evidencia.

(**) *M. Picard.* «Quelques réflexions sur la Mécanique, suivies d'une première leçon de Dynamique.»

(***) *M. Ch. de Freycinet.* «Sur les principes de la Mécanique.»

sibles, inextensibles é inelásticos, constituyéndose así los que llamamos *sólidos rígidos ó teóricos.* Esta abstracción es permitida, siempre que las acciones mecánicas á ellos aplicadas no sean excesivamente grandes, respecto de su resistencia á la deformación y á la ruptura, y conduce, como fácilmente se colige, á una primera aproximación de las soluciones, con frecuencia suficiente; y cuando la índole de los problemas exija mayor rigor y delicadeza, partiendo de los resultados así obtenidos, se pueden determinar las correcciones necesarias para acercarse más á la realidad de los fenómenos naturales.

Requiere especial definición el sujeto móvil llamado *punto material*; esto es, *el punto geométrico dotado de propiedades materiales.* Se le concibe como un elemento material inextenso: prescindiendo de las dimensiones efectivas de los cuerpos móviles, los reducimos en nuestra imaginación á un solo punto, para facilitar las investigaciones. Y conviene advertir que esta abstracción es legítima, no sólo como operación auxiliar de la mente, sino por virtud de ciertas conclusiones analíticas; pues según veremos en lugar oportuno, el centro de gravedad, que es un punto geométrico, goza de propiedades que permiten mirarlo rigorosamente como punto material, en el sentido estricto de aquella definición.

Además, para evitar confusiones, es de interés precisar la natural distinción entre *punto material aislado y elemento material integrante de un cuerpo extenso.* Por la integración de puntos de extensión nula, es claro que jamás lograremos obtener un cuerpo finito; y así, cuando la cuestión en estudio exija considerar un sólido material como agregado de elementos, no deberán ser los elementos integrantes puntos materiales, sino volúmenes infinitamente pequeños, como en Geometría, si bien aquí dotados de propiedades materiales, ó sea ocupados por materia, á los cuales aplicaremos después las operaciones de integración del análisis.

Ciertamente, cabe oponer una seria objeción á este procedimiento. Sea cualquiera la hipótesis que se adopte sobre la

constitución de la materia, es sabida la imposibilidad de concebir un cuerpo físico como un todo contínuo que en todos sus puntos geométricos ofrezca iguales propiedades materiales: indudablemente, en unos puntos hay mayor condensación que en otros; moléculas, átomos, sistemas de electrones, etc., se distribuyen dejando ciertos espacios vacíos ó poros, de modo que la indicada integración de elementos materiales, puesto que supone la continuidad analítica, no parece legítima operación. Y en efecto, no lo es, conforme á las exigencias del análisis rigoroso; pero, sobre que la Ciencia no ha logrado aún eludir ó vencer esta dificultad, existen razones para reputarla de escasa transcendencia.

Porque al operar una integración analítica admitiendo continuidad de la materia en el volumen ocupado por ella, lo que hacemos es imaginar dilatados los núcleos de condensación, de modo que resulten los espacios vacíos (ó de menor condensación) ocupados hasta suponer al volumen en todos sus puntos la misma densidad (*), *la media* que apreciamos por las propiedades externas. Por otra parte, la alternación de condensaciones y dilataciones es periódica, con período tan exiguo, que aun para un cuerpo de dimensiones pequeñísimas podemos asegurar existen millones de máximos y mínimos en una dirección cualquiera; por donde se ve que los errores introducidos, reproduciéndose con grandísima frecuencia, iguales y de sentidos contrarios, deberán compensarse lo suficiente para que el error final sea despreciable. Y efectivamente, los resultados de cálculos fundados en tales operaciones concuerdan siempre con los de las experiencias, dentro del alcance asignable á los errores de ob-

(*) Esto suponiendo el cuerpo homogéneo. Si no lo es, pero de modo que pueda expresarse la densidad por una función continua de las coordenadas, es fácil ver que el mismo razonamiento es perfectamente aplicable.

servación: comprobación satisfactoria, *a posteriori*, del precedente razonamiento.

2. **Causa y efecto en un movimiento. Fuerza.** – Nuestro sentido de la vida física es, á saber, el hábito que nuestra inteligencia adquiere de conocer y juzgar de los fenómenos físicos en que intervenimos, y por extensión, de los que observamos producidos sin nuestro concurso, nos conduce insensiblemente á admitir como verdad axiomática que *todo movimiento real es efecto de una ó varias causas que, obrando sobre el sujeto móvil, le obligan á cambiar de posición en los sucesivos instantes del tiempo.* Ahora bien, el valor lógico de esta proposición sólo puede deducirse *a posteriori*, mediante la discusión de las remotas conclusiones á que conducen las más profundas investigaciones analíticas; pero en todo caso, para quien se inicia en el estudio de la Mecánica, es perfectamente aceptable, siquiera como concepción auxiliar, que dé sentido científico á nociones intuitivas adquiridas en el conocimiento ordinario de la naturaleza. Aceptado, pues, así, aparece como cuestión primordial de nuestro estudio el precisar y definir lógicamente *qué se entiende por causa y efecto en un movimiento, y cómo se originan entre una y otro las relaciones cuantitativas fundamentales que hacen posibles las aplicaciones del análisis matemático al estudio de los movimientos.*

Las causas de los movimientos se llaman genéricamente *fuerzas.* No conocemos nada esencial sobre ellas; pero al analista le basta reconocer sus efectos y evidenciar en ellos afecciones geométricas y cuantitativas, para poder asignar atributos á dichas causas y concebirlas COMO SI FUESEN *entidades substanciales agentes de los movimientos,* siempre en la inteligencia, repetimos, de que ésta es sólo una concepción auxiliar de la mente.

Puesto que el efecto de una fuerza es originar un movimiento, en los elementos de éste habrá que buscar aquellas afecciones. Consideremos el caso simple de *un punto mate-*

rial, situado *en reposo* en el punto M del espacio, en el instante t_0 que inicia la acción de una fuerza: supuesto además libre de todo obstáculo, emprenderá en seguida el movimiento, y en el instante $t_0 + dt$ se hallará en otro M′, apareciendo así determinados:

Un elemento de trayectoria, y con él, *una dirección*, la suya, y *una longitud* el espacio ó corrimiento MM′;

Una velocidad, la que poseerá el móvil en el dicho instante $t_0 + dt$;

Y *una aceleración*, puesto que hemos pasado de la velocidad cero á esta última.

Pues bien:

1.° *La dirección* MM′, ya que depende exclusivamente de la manera de obrar de la fuerza, es una afección geométrica de ésta, se considera atributo suyo y se la llama *dirección de la fuerza.*

2.° Los elementos cuantitativos: MM′, corrimiento elemental, que llamaremos μ; v, velocidad elemental adquirida, y j, aceleración de este movimiento infinitesimal, acusan un QUANTUM de la acción de la fuerza, una afección cuantitativa de la misma, que, por lo tanto, es natural considerar revestida de otro atributo: *la intensidad.*

Aparece así la entidad *fuerza aplicada á un punto material*, dotada de los dos atributos fundamentales *dirección é intensidad, que bastan para definirla;* siendo oportuno advertir, desde luego, que entre los elementos μ, v y j existen las dos conocidas relaciones

$$v = j\,dt, \qquad \mu = \frac{1}{2} j\,dt^2,$$

mediante las cuales *basta uno de ellos para determinar los otros dos.* Tomaremos, pues, como elemento determinativo de la intensidad aquel que mejor se preste á dar claridad y sencillez á las expresiones: como veremos después, es la aceleración.

3.° **Necesidad de postulados.**—No es, sin embargo, suficiente lo dicho para dar por resuelta la complicada cuestión que nos ocupa; pues nuestro razonamiento ha recaído sobre el caso particularísimo de un punto material que se hallara en reposo en el instante inicial de la acción *elemental* de la fuerza que determinó este *primer* movimiento, y bien se comprende que dicho móvil, á partir del instante $t_0 + dt$, y en general todo móvil en un instante cualquiera, no satisfará á aquella condición, sino que aparecerá en movimiento determinado anteriormente, sea por la acción de la misma fuerza que estudiamos, sea por la de otra ú otras distintas de ella. De modo que para conocer los efectos de la acción *continua* de una fuerza dada, será necesario dilucidar previamente, de una parte, *el efecto subsistente de una acción ya ejercida*, es decir, el estado cinemático que subsigue á la cesación de la causa agente, y de otra, *el modo cómo el efecto de una acción actual se suma mecánicamente, se compone, con el de otras acciones anteriores.*

Pues bien: tanto uno como otro extremos son cuestiones absolutamente irresolubles por el raciocinio puro, y ni aun la misma observación, ni los experimentos mejor dirigidos, han sido hasta el día capaces de proporcionarnos otra cosa que indicios en que poder apoyar algunas inducciones. Solamente en forma de *postulados,* debidos á la intuición genial de algunos grandes pensadores, aceptados generalmente por los analistas y comprobados en lo posible *a posteriori* mediante la concordancia entre los resultados de la teoría y de la experimentación, es como la Mecánica analítica ha logrado formular afirmaciones categóricas sobre las cuestiones susodichas y fundar en ellas las ecuaciones del movimiento, del modo que pasamos á exponer.

4. **Efecto subsistente de una fuerza: principio de la inercia.**— En términos generales, y con sujeción á esclarecimientos posteriores, podemos decir que *el efecto subsistente de una fuerza es la velocidad comunicada por ella al móvil.*

Así, en el caso que veníamos analizando, la velocidad v, adquirida por el móvil bajo la acción de la fuerza que determinó su movimiento, es efecto subsistente de dicha acción; lo cual significa que si ésta cesara en el instante $t_0 + dt$, el estado cinemático del móvil continuaría siendo en el tiempo subsiguiente el mismo de dicho instante, ó sea que *el móvil conservaría la velocidad* v, *en la misma dirección absoluta, invariable é indefinidamente, en tanto no surgiese un nuevo efecto debido á una nueva causa.*

Así lo establece el *principio de la inercia*, que en los términos más precisos y concretos posibles, puede enunciarse como sigue:

POSTULADO PRIMERO (*primer enunciado*). *Siempre que un punto material está animado de una velocidad y no se halla sometido á la acción de fuerza alguna, el movimiento continúa indefinidamente en línea recta con la misma velocidad.*

Evidentemente, siendo un caso particular el de la velocidad cero, ó sea el estado cinemático de reposo, en el anterior enunciado se comprende la afirmación de que *el estado de reposo de un punto material se continúa indefinidamente en tanto no actúe sobre el punto fuerza alguna.* Afirmación ésta que, por otra parte, puede considerarse envuelta en la misma definición de la fuerza: puesto que hemos establecido que todo movimiento obedece á una causa, aseguramos que no habrá movimiento mientras no actúe una causa ó fuerza sobre el móvil.

Si del móvil ideal punto material aislado, pasamos á considerar un móvil real, *cuerpo extenso*, veremos fácilmente que el principio de la inercia se traduce en esta otra proposición, más comprensible como expresión de un fenómeno real.

POSTULADO PRIMERO (*segundo enunciado*). *Siempre que un sólido material invariable está animado de una traslación y no se halla sometido á la acción de fuerza alguna* EXTERIOR AL MISMO, *el movimiento se continúa indefinidamente en traslación rectilínea y uniforme.*

OBSERVACIÓN. Los efectos de la inercia en todo otro movimiento (de rotación, de líquidos, etc.) son consecuencias razonadas de este principio, como en su lugar se demostrará.

5. **Composición de efectos: principio de la independencia.**— Volvamos á considerar el punto material de que antes tratábamos. Según el principio anterior, si en el instante $t_0 + dt$ dejase de obrar la fuerza, el punto móvil continuaría su movimiento rectilíneo con la velocidad constante v en la dirección M M′, que es la suya, y al cabo de un nuevo elemento dt_1, se hallaría en un punto m'', en línea recta con M y M′, tal que se tuviese $M' m'' = v\, dt_1$. Imaginemos ahora restablecida la acción de la fuerza en el instante $t_0 + dt$: durante ese nuevo elemento dt_1, á la vez que el móvil recorre por la inercia el elemento $v dt_1$, la fuerza, actuando según su ley, deberá determinar un nuevo efecto, que habrá de incorporarse con el anterior; de modo que la verdadera posición del móvil en el instante $t_0 + dt + dt_1$, ya no será m'', sino otro punto M″, cuya posición dependerá de ambas causas, de la inercia y de la fuerza. Pero si llamamos μ_1 al espacio que la fuerza ha hecho recorrer al móvil en el tiempo dt_1, *obrando en las circunstancias actuales,* es claro que la posición del punto M″ satisfará á la condición

$$\overline{\overline{M'M''}} = \overline{\overline{M'm''}} + \mu_1 = \overline{\overline{v dt_1}} + \mu_1, \qquad (*)$$

puesto que la incorporación de ambos efectos no es otra cosa, geométricamente considerada, que la suma geométrica de ambas cantidades espaciales.

Sentado esto, el segundo de los postulados á que antes

(*) Designamos por la doble raya superpuesta la condición vectorial; por manera que esta suma es vectorial ó geométrica, y de ningún modo escalar.

nos referimos, conocido con el nombre de *principio de la independencia*, establece con aplicación al caso que analizamos:

1.° Que $\overline{\overline{v\,dt_1}}$, *como vector*, no sufre alteración alguna bajo la acción de la fuerza;

2.° Que en $\overline{\overline{\mu}}_1$, *como vector*, tampoco introduce alteración alguna la circunstancia de hallarse el punto en movimiento: por manera que si la naturaleza de la fuerza subsiste la misma del primero al segundo elemento del tiempo, es decir, si sus atributos, dirección é intensidad no han sufrido variación, se tendrá $\overline{\overline{\mu}}_1 = \overline{\overline{\mu}}$; y si estos atributos han cambiado, $\overline{\overline{\mu}}_1$ será el mismo corrimiento que esta causa habría determinado para el punto material considerado, si hubiese partido del reposo.

Penetrado el lector de estas explicaciones particulares, fácil le será ya interpretar el siguiente enunciado general del segundo principio:

POSTULADO SEGUNDO. *Siempre que sobre un punto material obran simultáneamente dos ó más causas de movimiento, los efectos dinámicos*, GEOMÉTRICOS Ó VECTORIALES, *es decir, los corrimientos que cada una de ellas comunica al móvil, son independientes entre sí. Cada uno es el mismo que si su respectiva causa agente obrase sobre el móvil aisladamente, y el corrimiento efectivo del móvil es la suma geométrica de todos ellos.*

OBSERVACIÓN. Los actuales razonamientos y afirmaciones se refieren á los corrimientos infinitesimales correspondientes á elementos infinitesimales del tiempo. Las consecuencias de este postulado para los corrimientos finitos, habrán de ser deducidas después por el raciocinio.

6. **Efecto actual de una fuerza.**—Apoyados en estos dos principios, fácil nos será ya llegar á las conclusiones que nos hemos propuesto. En un instante t, sea cualquiera la velocidad adquirida, el corrimiento $\overline{\overline{\mu}}$ debido á la acción de la fuerza durante el elemento dt del tiempo, es independiente

de dicha velocidad; por otra parte, el $\overline{\overline{v\mathrm{d}t}}$ debido al *estado de inercia* que dicha velocidad supone, es independiente de la fuerza; luego el corrimiento efectivo elemental estará en todo instante del movimiento expresado por la ecuación

$$\overline{\overline{\mathrm{d}s}} = \overline{\overline{v\mathrm{d}t}} + \overline{\overline{\mu}}, \text{ ó sea } \overline{\overline{\mathrm{d}s}} = \overline{\overline{v\mathrm{d}t}} + \frac{1}{2}\overline{\overline{j\mathrm{d}t^2}},$$

suma geométrica de los debidos á ambas causas. Y así, el *efecto actual* de la fuerza es, en cada elemento del tiempo, introducir un elemento vectorial μ, que habrá de sumarse al $\overline{\overline{v\mathrm{d}t}}$ debido á la inercia, ó bien, según hemos visto en *Cinemática*, producir la aceleración

$$j = \frac{2\mu}{\mathrm{d}t^2}$$

en el movimiento del punto material; y por consiguiente, sumar geométricamente con la velocidad $\overline{\overline{v}}$ del instante t la infinitesimal $\mathrm{d}\overline{\overline{v}} = \overline{\overline{j\mathrm{d}t}}$.

7. **Efecto continuo de una fuerza. Fuerzas constantes y variables.**—Repitiéndose, pues, en los sucesivos elementos de tiempo esta composición de los corrimientos μ, que constituyen los correspondientes efectos actuales, con los subsistentes debidos á la inercia, se ve que el efecto continuo de la fuerza es incrementar sucesivamente el vector velocidad en el vector infinitesimal $\overline{\overline{j\mathrm{d}t}}$, ó sea *determinar la aceleración* j *del movimiento, así como los consiguientes elementos* d*s que resultan de la composición de unos y otros efectos,* elementos de cuya integración geométrica resulta la trayectoria.

Y así resulta evidenciado:

1.° *Que los efectos cuantitativos de la fuerza, los que mi-*

den su intensidad, son en cada instante proporcionales á las respectivas aceleraciones del movimiento que produce.

2.° Que si el vector infinitesimal μ, y, por consiguiente, el vector aceleración son siempre los mismos, la fuerza es una causa constante, es decir, que obra idénticamente á sí misma en todos los instantes del tiempo. Tal fuerza se llama *constante;* y si el punto material á ella sometido partió del reposo, en todos los instantes del tiempo se cumplen las condiciones del movimiento rectilíneo. La trayectoria será en tal caso una línea recta, y la ecuación del movimiento en la trayectoria,

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = j \quad \text{(constante)}, \qquad (1)$$

que ya sabemos es la del movimiento uniformemente acelerado. Así, *una fuerza constante, actuando sobre un punto material libre que parte del reposo, le imprime, durante el tiempo de su acción, un movimiento uniformemente acelerado.*

Y 3.° Que si el vector μ y la aceleración son variables con el tiempo, la fuerza es también *variable* en su acción. El movimiento, en general, será curvilíneo, y sus ecuaciones, referido á ejes cartesianos, serán

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = j_x, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = j_y, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = j_z, \quad (2)$$

siendo j_x, j_y, j_z los componentes coordenados del vector aceleración: bastará conocer estos componentes en función del tiempo, ó de otras variables que de él dependan, para poder escribir las ecuaciones del movimiento.

En resumen, pues, tenemos que *una fuerza puede ser constante ó variable*, y que, en todo caso, el conocimiento de los que hemos llamado efectos actuales de la misma, traducidos por la aceleración, en función directa ó indirecta del tiempo,

permite escribir inmediatamente las ecuaciones diferenciales del movimiento del punto material libre sometido á la acción de dicha fuerza.

8. **Composición de efectos debidos á dos ó más fuerzas.**— La cuestión es ya fácil de resolver, como nueva aplicación del segundo postulado; pues si las fuerzas F′ y F″ obran simultáneamente sobre un punto material libre, la independencia de sus efectos significa que los corrimientos elementales $\overline{\overline{\mu}}'$ y $\overline{\overline{\mu}}''$ debidos en cualquiera posición del móvil á cada una de ellas, serán los mismos que si obrasen aisladamente. El corrimiento efectivo total será, por lo tanto, la suma geométrica de aquellos dos; se tendrá así:

$$\overline{\overline{\mu}} = \overline{\overline{\mu}}' + \overline{\overline{\mu}}'', \quad \text{de donde} \quad \overline{\overline{j}} = \overline{\overline{j}}' + \overline{\overline{j}}'',$$

llamando j, j', j'' las aceleraciones respectivas.

En general, pues, *si varias fuerzas obran simultáneamente sobre un punto material libre, la aceleración del movimiento que este punto tomará será en cualquier instante la suma geométrica de las aceleraciones que cada una de ellas produciría obrando separadamente sobre el mismo móvil.*

II.—Fuerza y equilibrio.

9. **Concepto de la ecuación dinámica de un movimiento.**— La expresión

$$\frac{d^2s}{dt^2} = j$$

que hemos llamado *ecuación* del movimiento producido por una fuerza constante (y lo mismo diremos de las correspondientes al caso general de una fuerza variable), no es *todavía* en realidad tal ecuación, sino sólo *una identidad*, puesto que uno y otro miembros son representaciones distintas del

mismo elemento del movimiento, de su aceleración, deducida de su ley cinemática, que suponemos conocida. Su valor analítico sería, pues, ilusorio si no consiguiésemos dar al segundo miembro una representación cuantitativa intrínseca anterior á dicha ley: sólo de este modo llegaremos á constituir dicha igualdad en una verdadera ecuación que, ligando la magnitud causa á la magnitud efecto, nos permita *expresar la verdadera ley dinámica del movimiento.*

Según esto, necesitamos poder expresar las diversas aceleraciones de las fuerzas en función de la producida por una fuerza tipo ó *unidad de fuerza*, ó de otro modo, comparar las fuerzas por sí mismas, *medirlas* como propias magnitudes independientes de sus efectos dinámicos.

10. **Efectos potenciales ó estáticos: equilibrio.**—Para ello hay que recurrir á otras manifestaciones de la fuerza que no sean las de producir movimiento. La experiencia enseña que *las fuerzas pueden actuar sobre un cuerpo material sin conseguir sacarlo del reposo, originando el estado llamado de equilibrio;* luego cabe en lo posible conocer la acción de una fuerza por otros efectos que no sean los dinámicos ó de movimiento.

Parece al pronto contradictorio afirmar que una entidad sólo cognoscible por sus efectos de movimiento, puede manifestarse sin producirlos; pero es de notar que esos efectos de movimiento, en que apoyamos nuestra noción de fuerza, aparecen en el equilibrio *en estado potencial*, es decir, con tendencia á producirse, ó que pueden producirse, y se producen efectivamente tan luego como cesan de verificarse *ciertas condiciones llamadas de equilibrio.* Esto nos dice claramente que también en tal estado la fuerza actúa, aunque produciendo efectos de distinta naturaleza de los dinámicos; efectos que se llaman, en virtud de lo dicho, *potenciales* y también *estáticos*, por referencia á la parte de la Mecánica llamada *Estática*, que los estudia al tratar, como sabemos, *del equilibrio de los sistemas materiales.*

11. **Necesidad de nuevos postulados.**—Y acontece con este nuevo aspecto de las acciones de las fuerzas lo mismo que con el anterior: que el raciocinio deductivo es también incapaz de establecer *a priori* las proposiciones fundamentales ó de partida en que poder apoyarnos para establecer sus leyes, y solamente la inducción, aplicada á los resultados de la observación y la experiencia, permite formularlas con carácter de *postulados*. Tratemos de explicarlos y enunciarlos.

12. **Anulación estática de dos acciones: principio de la oposición.**—Desde el momento en que una fuerza, al actuar sobre un cuerpo que suponemos previamente en reposo, no produce movimiento, el contraste con los casos en que lo produce nos lleva á afirmar la existencia de otra segunda causa que contrarresta y anula aquella acción. Y como es lógico admitir que *el movimiento* y *el no-movimiento* son estados de existencia de una misma categoría, también lo es asignar á esta segunda causa la misma categoría que á la primera; de otro modo, es legítimo *considerar á esta segunda causa como una fuerza antagónica de la primera*, puesto que anula sus efectos dinámicos. En muchos casos acontecerá que ambas causas reconozcan orígenes físicos distintos; pero mecánicamente tienen la misma significación como causas de movimiento, y hay derecho á llamarlas fuerzas á una y otra. Deducimos así la conclusión de que *el estado de equilibrio de un cuerpo material exige el concurso, por lo menos, de dos fuerzas*, capaces de anularse mutuamente, de contrarrestar sus efectos dinámicos, de *equilibrarse*, como se dice en lenguaje mecánico.

Con estas premisas, podemos ya enunciar el siguiente principio, inducido del estudio experimental de los casos en que existe equilibrio.

POSTULADO TERCERO. *Siempre que solas dos causas ó fuerzas, actuando simultáneamente sobre un punto material en estado de reposo, son incapaces de sacarlo de ese estado,*

dichas dos fuerzas tienen la misma dirección, igual intensidad y sentidos opuestos.

En términos abreviados, podemos también enunciarlo así: *Dos fuerzas que se equilibran son iguales y opuestas.*

Y de aquí el siguiente

COROLARIO. *Dos fuerzas capaces de equilibrar separadamente á una tercera, son iguales entre sí;* puesto que, según el postulado, tendrán la misma dirección, la misma intensidad y el mismo sentido.

Se aprecia fácilmente el gran valor de estas proposiciones, considerando que suministran los indispensables elementos de juicio para reconocer la identidad de una fuerza consigo misma en experimentos sucesivos, ó bien para comparar las intensidades de dos fuerzas diferentes, todo ello necesario á la importante operación de que vamos á tratar.

13. **Medición estática de la fuerza.**—La noción fundamental de fuerza que hemos establecido, y cuyos efectos venimos analizando, se ha originado por extensión de las ideas de *esfuerzo muscular, peso y tensión elástica,* que son las tres causas de movimiento que primitivamente se revelaron á la humanidad, y con las cuales estamos más familiarizados. Prescindiendo, por ahora, de toda crítica sobre la legitimidad de esta generalización, diremos que el mecánico halla natural, para iníciar el estudio de investigación de las leyes dinámicas, concretar su análisis á dichas tres causas, más aun, á las dos últimas, porque la primera responde á sensaciones orgánicas, cuyos elementos cuantitativos no se ha logrado aún ver sometidos á medición.

En esas dos causas, pues, peso y tensión elástica, hemos de elegir la fuerza tipo, ó bien digamos, *la unidad* á la cual podamos referir nuestras medidas. Y entre ellas dos, en *el peso*, por razón, principalmente, de su constancia; así, elegida la unidad *kilogramo* (*), bastará disponer un aparato

(*) Sabido es que esta unidad se definió originariamente, para po-

deformable y resistente (articulado como *la balanza*, ó elástico como el *dinamómetro*), en que la acción que estudiamos se compara con otra *ya conocida*, es decir, cuyos efectos estáticos sobre el aparato métrico han sido previamente determinados. Por este procedimiento, mediante experimentos convenientes, que no debemos describir aquí, pero que es fácil ver equivalen á aplicar de modo adecuado el postulado anterior y su corolario, se llega á esta nueva conclusión, base de las operaciones métricas.

Dos fuerzas que actúan sobre un mismo punto material en la misma dirección y sentido, producen el mismo efecto estático que una sola fuerza cuyo número de unidades sea la suma de los números que miden aquéllas separadameute. Más brevemente: *Dos fuerzas superpuestas en el mismo sentido, equivalen á su suma.*

Y de aquí, como corolario, esta otra general:

El efecto estático de un número cualquiera de fuerzas que obren simultáneamente sobre un punto material en la misma dirección, unas en un sentido y otras en el opuesto, es el mismo que el de una sola fuerza cuya intensidad esté medida por la suma algébrica de las intensidades de aquéllas.

O en otros términos: *Varias fuerzas superpuestas en una misma recta, se componen estáticamente en una sola, igual á la suma algébrica de aquéllas.*

14. **Aplicación y transmisión de una fuerza. Reacción.**— En las anteriores proposiciones y en las sucintas referencias

---

nerla en relación con el sistema *terrestre* de medidas, como «peso en el vacío y en París, de un litro de agua pura á 4,1 grados centesimales»; y que las dificultades prácticas de las pesadas han aconsejado, por último, definirla como «peso de un tipo ó patrón de platino que se conserva en París», del que existen copias ó reproducciones esparcidas por las naciones civilizadas. De todos modos, este patrón se aproxima á la definición teórica lo suficiente para poder valerse de la relación que ésta establece, en la resolución práctica de problemas.

precedentes sobre experimentos y operaciones métricas, hemos hecho caso omiso de algunas circunstancias de que realmente no podemos desentendernos: Primero, el punto material no es objetivamente realizable; segundo, aun concediendo que nos aproximemos grandemente á él, no hay modo práctico de aplicar varias fuerzas simultáneamente á un punto único. De modo que los experimentos aludidos han de ejecutarse con cuerpos físicos: las fuerzas son acciones físicas por contacto entre superficies extensas, y se aplican por intermedio de otros cuerpos, cuerdas ó varillas de transmisión.

Ante estas consideraciones, procede esclarecer los dos conceptos de aplicación y transmisión de las fuerzas, no tanto por su interés práctico (aunque grande, secundario en nuestro estudio), como por las conclusiones teóricas á que hemos de ser conducidos. En estos esclarecimientos, de todos modos, hemos de concretarnos al punto de vista que interesa á nuestro plan, sin detenernos á discutir el mecanismo físico de la acción de contacto, ni el juego de las fuerzas internas mediante el cual se transmite la acción por el interior de la masa de un cuerpo, hechos obscurísimos, cuya explicación corresponde á la alta Filosofía de la Ciencia.

Cuando un cuerpo A es solicitado á moverse hacia otro B, estando ambos en contacto por una porción de sus superficies, se considera el hecho como aplicación de una fuerza sobre este último; supuesta la superficie de contacto bastante pequeña para poderla imaginar reducida por abstracción á un solo punto geométrico, *este punto es el de aplicación de aquella fuerza, y la recta trazada por este punto según la dirección de la misma, su línea de acción ó recta de posición.* En la práctica podemos aproximarnos á dicha abstracción lo suficiente: unas veces disponiendo el contacto entre dos superficies convexas, ó mejor, entre una punta cónica y otra superficie cualquiera; otras, haciendo actuar la arista viva de un filo ó *cuchillo* sobre un plano, en cuyo caso, al

proyectar el sistema sobre un plano perpendicular á la arista, la proyección de ésta será el punto de aplicación; etcétera.

Pues bien: imaginemos ejercida por una punta cónica de A una acción sobre una superficie plana de B; por efecto de la llamada impenetrabilidad de los cuerpos físicos, este cuerpo *resiste á la penetración*, ó lo que es lo mismo, desarrolla una *reacción,* es decir, una acción contraria á aquélla. Supongamos primeramente que el cuerpo B está necesariamente fijo; *esta reacción podrá equilibrar ó no á la acción, según la dirección de ésta.* La experiencia enseña que *si tal dirección es normal al plano,* admitido éste bastante duro para no fracturarse ni dejarse penetrar, *el equilibrio se alcanza necesariamente*; mientras que *si es oblícua, sólo habrá equilibrio cuando el ángulo que forme con la normal no exceda de cierto límite*, distinto en cada caso, pero tanto menor cuanto más pulimentado sea el plano; en términos de Física, cuanto menor sea el rozamiento.

Apoyados en estas observaciones, y teniendo en cuenta el postulado tercero, los analistas han inducido el principio llamado *de la reacción normal*, que se enuncia así:

POSTULADO CUARTO. *Siempre que un punto material está solicitado á moverse hacia una superficie que no se deja penetrar, ejerciendo así sobre ella una presión, la resistencia de esta superficie equivale á una fuerza, reacción, que tiende á ser normal á la misma, y lo es rigorosamente cuando no hay rozamiento. La acción y la reacción son iguales y opuestas y tienen la misma recta de posición.*

En segundo lugar, si el cuerpo B es móvil, la acción de A sobre él tenderá á producir su movimiento; mas si imaginamos un tercer cuerpo C, fijo, sobre el que B esté á su vez apoyado, C podrá oponerse al movimiento de B, y éste, por tanto, al de A. La acción de A se ha transmitido así á C por intermedio de B; y estudiando las condiciones en que el equilibrio se logra, somos conducidos á afirmar que las rectas de posición de las dos acciones, la de A sobre B y la de

B sobre C, son una misma, y que sus intensidades son iguales. Es decir, que la primera ha sido transmitida por el cuerpo B del A al C; y aplicando la inducción, podemos generalizar formulando este nuevo principio, que se llama *del transporte ó de la transmisión de la fuerza.*

POSTULADO QUINTO. *Toda fuerza puede considerarse aplicada á un punto cualquiera de su recta de posición, sin que se alteren sus efectos, con tal que los diversos puntos de esa recta estén invariablemente unidos entre sí.*

Quédanos, sobre el importante particular de la aplicación de acciones sobre superficies, examinar el caso en que necesariamente se ejerzan sobre extensiones que de ningún modo puedan considerarse reducidas á un punto; pero esto será tratado más adelante, cuando poseamos los necesarios elementos analíticos.

15. **Principio de la igualdad entre la acción y la reacción.**—En las consideraciones precedentes, hemos visto aparecer el concepto de *reacción*, ó acción recíproca del cuerpo B sobre el A, coexistente y correlativo con la de éste sobre aquél. Esta reciprocidad, en el caso que hemos analizado, es una consecuencia inmediata del postulado tercero, puesto que la acción sufre una resistencia que la anula ó equilibra. Un cuerpo pesado, por ejemplo, descansa en equilibrio sobre un soporte, ejerciendo así sobre éste la fuerza representada por el peso: es natural é inmediato el concepto de reacción ó resistencia del soporte, igual y opuesta á la acción.

Pero hay en la Naturaleza física numerosas otras formas de acciones que no se nos ofrecen con la misma claridad de concepto, en las que ni vemos el origen y el modo de ejercerse, ni mucho menos surge indicio alguno aparente de acción recíproca ó reacción. En la atracción, verbigracia, que imaginamos ejercida por la Tierra sobre la Luna, no observamos nada que por el pronto nos haga pensar en que la segunda deba ejercer acción recíproca sobre la primera.

Sin embargo, del estudio analítico de multitud de fenóme-

nos en que hay manifestaciones estáticas ó dinámicas, se ha llegado por inducción á generalizar el resultado particular susodicho, y admitir un nuevo postulado, llamado como indica el anterior epígrafe, ó abreviadamente, *principio de la acción-reacción*, y también *de Newton*, porque éste fué el primer pensador que lo enunció. Comprende este principio las siguientes afirmaciones hipotéticas:

Primera. Que no hay en el Universo otras acciones físicas sino las originadas en la materia, ó dicho de otro modo, que toda fuerza ejercida sobre un cuerpo material emana de otro cuerpo material, y se manifiesta por una alteración, efectiva ó potencial, de la distancia entre ambos cuerpos.

Segunda. Que cada acción elemental de un punto material sobre otro se efectúa según la recta que los une, y da origen á una acción recíproca de éste sobre aquél.

Y *tercera.* Que ambas acciones son iguales y opuestas.

Sintetizando todo esto en un solo enunciado, diremos:

POSTULADO SEXTO. *Toda acción física es ejercida por la materia sobre la materia, y da origen á una reacción igual y opuesta á la acción, según una misma recta de posición.*

Las consecuencias inmediatas de este principio, tanto interesan bajo el aspecto estático, como bajo el dinámico, para el esclarecimiento de la doctrina fundamental que estamos exponiendo. Estáticamente, resulta de él que en todo equilibrio intervienen necesariamente dos ó más cuerpos, cada uno de los cuales contribuye al equilibrio de los restantes. Desde el punto de vista dinámico, podemos desde luego establecer, en términos generales, que si la acción de un cuerpo A es causa del movimiento de otro B, la reacción de éste sobre aquél determinará á la vez el movimiento de dicho A. Valiéndonos de un ejemplo sencillo, diremos que al caer un cuerpo pesado hacia la Tierra, atraído por ella, deberemos imaginar que también la Tierra, atraída por el cuerpo, tendrá movimiento hacia él, siquiera sea este movimiento de tal modo insignificante, por efecto de la enorme diferencia de

las masas (como veremos muy pronto), que deberemos mirarlo como nulo.

16. **Observación sobre el equilibrio.**—Por claridad en la exposición, no hemos hablado en lo que antecede de más estado de equilibrio que el establecido cuando las fuerzas que consideramos se nos aparecen incapaces de sacar al punto material que sufre sus acciones, del estado de reposo en que previamente lo suponíamos; pero sin dificultad advertiremos que existe un concepto más general del equilibrio. Para evidenciarlo sencillamente, basta acudir á la consideración del reposo y el movimiento relativos: si al ejercer el cuerpo A su acción sobre el B, suponemos que éste se hallaba en movimiento por otra ú otras causas, y aquella acción es incapaz de producir movimiento de B respecto de A, por ejercerse de modo que A participe del mismo movimiento anterior de B, ó sea que A y B estén *en reposo relativo*, este sistema estará en equilibrio, sin que, no obstante, deje de hallarse en movimiento respecto de otros ejes. Un ejemplo vulgar y convincente nos lo muestra *un fardo pesado en equilibrio sobre un vagón en movimiento.*

(Continuará.)

XXVII.—Sobre la síntesis de la forona y de la ionona.

POR JOSÉ GIRAL PEREIRA

Tratando de extender y generalizar el conocido método sintético de Friedel y Crafts para la obtención de carburos bencénicos á otros grupos funcionales orgánicos, pensamos en utilizar la poderosa acción condensante y deshidratante que el cloruro de aluminio anhidro ejerce sobre muy variadas especies químicas.

De dos reacciones tan sólo habré de ocuparme en la pre-

sente Nota: la transformación de la propanona en óxido de mesitilo y forona; y la condensación de la misma acetona con el citral para originar ionona.

Por tratarse de dos hechos no consignados en ningún libro ni publicación, y por el excelente resultado que he conseguido con ellos, creo de interés hacer esta comunicación, que permite prever una mayor extensión del reactivo citado (*).

1.° *Transformación de la propanona en óxido de mesitilo y forona.*—Buscando en los trabajos prácticos, efectuados por mis alumnos, un medio expedito y seguro que sustituyera al clásico de obtención de dichos cuerpos, fué encargado D. Ernesto Caballero de ensayar el cloruro de aluminio en sustitución de la corriente gaseosa de ácido clorhídrico seco, que requiere el concurso de varias semanas para determinar la deshidratación y condensación de la propanona, conforme á las siguientes ecuaciones:

$$2CH_3-CO-CH_3 = CH_3-\underset{\underset{CH_3}{|}}{C}=CH-CO-CH_3 + H_2O$$

propanona (acétona)

metil-2-penteno-2 ona 4 (óxido de mesitilo)

$$3\,CH_3-CO-CH_3 = CH_3-\underset{\underset{CH_3}{|}}{C}=CH-CO-CH=\underset{\underset{CH_3}{|}}{C}-CH_3$$

dimetil-2-8-heptanodieno-2-5-ona-4 (forona)

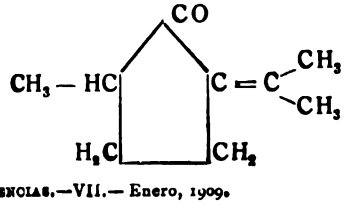
Hé aquí en dos palabras cómo procedió el Sr. Caballero. En un matraz de 250 c. c. se colocaron 150 gramos de propanona (previamente desecada sobre cloruro cálcico fundi-

(*) El cloruro de aluminio utilizado por mí es el sublimado anhidro de la casa C. A. F. Kahlbaum, de Berlín, perfectamente envasado en frascos de tapón esmerilado y parafinado.

do) y 10 gramos de cloruro de aluminio sublimado; se unió el matraz con un buen refrigerante de reflujo y se calentó á b. m. á unos 40°c. durante cuatro horas, observando fuerte reacción y tomando la masa color pardo. Transcurrido aquel tiempo, se añadió un litro de agua alcalinizada con sosa cáustica al 10 por 100, dividiéndose el líquido en dos capas; decantada que fué la superior, se desecó sobre cloruro cálcico y se destiló á b. m. para separar el exceso de acetona que no había reaccionado, y después en baño de aceite recogiendo la porción destilada entre 130° — 135° c.

Rectificada esta porción á 130°, se obtuvieron unos 15 gramos de óxido de mesitilo, habiendo observado que la forona se produce en muy pequeña cantidad, puesto que apenas queda residuo destilable á más de 135°. Se identificó el producto obtenido por su penetrante y peculiar olor, caracterizando su función cetónica por la reacción *Legal-Denigés* y la producción de su fenilhidrazona, y su doble enlace por decolorar enérgicamente y en frío el agua de bromo y el permanganato potásico; quedando pendiente su análisis cuantitativo y la determinación de su peso molecular para establecer su fórmula (*). Interesa consignar que ni el polvo de cinc ni su cloruro dieron el resultado buscado. El rendimiento del óxido mesitilo, 10 por 100 de la acetona empleada, fué conseguido después de algunos ensayos, variando las cantidades relativas de acetona y cloruro de aluminio, y es muy superior al obtenido por el método clási-

(*) En cuanto á la forona se refiere, conviene indicar que en Química orgánica se conoce con este nombre una otra substancia que no es producto de condensación de la acetona, cuya fórmula es:



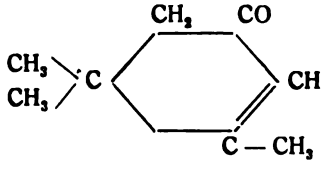
co de *Kasanjeff (Journ. phys. Chim.*, R.-7-173) y *Claisen (Ann. Chem.*, 180-4), puesto que en él no llega dicho rendimiento al 8 por 100. Prescindo de consignar más pormenores de esta reacción, pues el Sr. Caballero piensa continuar su estudio detallado con objeto de publicar el resultado de sus investigaciones; pero lo expuesto confirma mis predicciones acerca de la acción condensante del cloruro de aluminio.

2.° *Condensación del citral con la acetona.*—Hace algún tiempo que constituye para mí un objeto fundamental de investigación la obtención sintética de la ionona, substancia á la cual debe su agradable olor la esencia de violeta. Ya en mís trabajos efectuados en la Sorbona (Laboratorio de investigaciones de Química orgánica de M. Haller) (*) inicié varios procedimientos que hube de continuar en esta Facultad de Ciencias de Salamanca. Entre ellos se encuentra el conseguir la transformación directa del citral en ionona, efectuando una sola condensación, buscando el medio de sustituir el procedimiento de Tiemann por otro más expedito.

En el método operatorio de dicho autor se procura primeramente la condensación del citral con la acetona, mediante el hidrato sódico diluído, para obtener pseudoionona, la cual se isomeriza, transformándose en ionona, por agitación con ácido sulfúrico de 65 por 100, análogamente á como lo hace el nitrilo geránico, y según las siguientes reacciones:

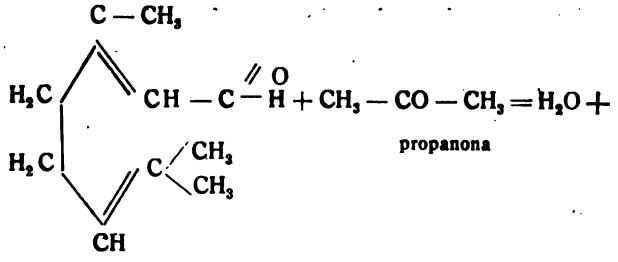
---

y que se obtiene por destilación seca del canforato cálcico. Y aún existe la isoforona, de fórmula:



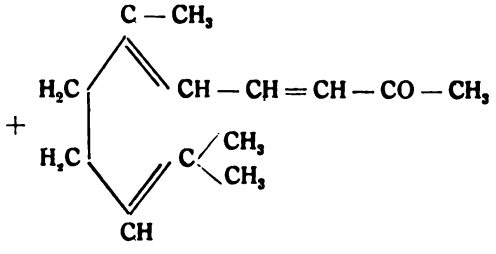
y que se origina por condensación de la acetona mediante la cal ó el etilato sódico. Ambas son isomeras con la forona que nos ocupa.

(*) Véase mi *Memoria del pensionado en el extranjero.*

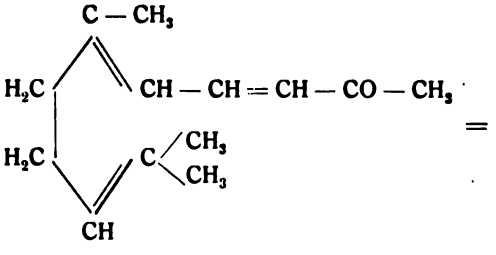


propanona

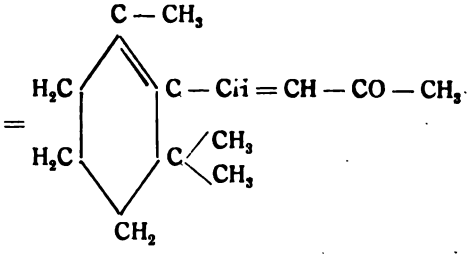
dimetil-2-6-octanodieno-2-6-al-8
(citral)



dimetil-2-6-undecanotrieno-2-6-8-ona-9
(pseudoionona)

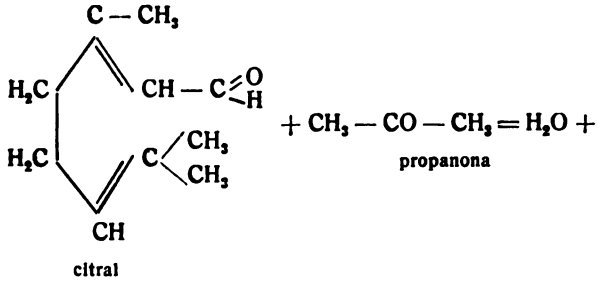


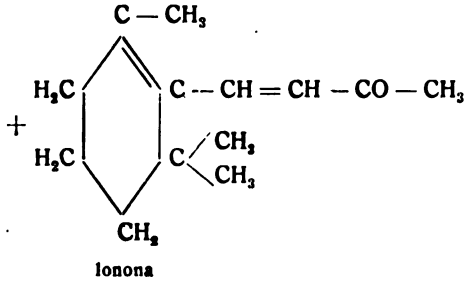
pseudoionona



metil-1-dimetil-3-3-propenonil-2-ciclohexeno-1
(ionona)

En el procedimiento ideado por mí, basta poner en contacto el citral con la acetona en cantidades equivalentes á sus pesos moleculares, y añadir á la mezcla un 5 por 100 de su peso de cloruro de aluminio sublimado; agitando con frecuencia y prolongando el contacto á la temperatura ordinaria durante veinticuatro horas, se consigue de una vez la producción de ionona, perceptible por su penetrante y característico olor:





La escasa cantidad de citral de que dispuse, dado su elevado precio, me ha impedido comprobar por repetidos ensayos si se origina como producto transitorio la pseudoinona, y si la reacción citada se acelera empleando otras proporciones de cloruro de aluminio.

Acerca del modo de entrar en reacción dicha sal, y de la teoría de las condensaciones reseñadas, nada se puede aventurar, ni ese es mi propósito; pero guiado del criterio de analogía con el clásico procedimiento de Friedel y Crafts,

podría explicarse la acción catalítica por la formación de un derivado cloro-alumínico, descomponible para regenerar el cloruro de aluminio. En el caso de la acetona sería el ciclo siguiente:

$$CH_3-CO-\dot{C}H_3+AlCl_3=CH_3-CO-CH=Al-Cl+2ClH$$

$$CH_3-CO-CH=Al-Cl+CH_3-CO-CH_3=Al\begin{matrix}\diagup O\\ \diagdown Cl\end{matrix}+$$

$$+CH_3-CO-CH=\underset{\underset{CH_3}{|}}{C}-CH_3$$

$$Al\begin{matrix}\diagup O\\ \diagdown Cl\end{matrix}+2ClH=AlCl_3+H_2O$$

y aun cuando no se han aislado los productos intermedios de la reacción, si se ha observado la producción de abundantes humos blancos de ácido clohídrico, pudiendo también referirse la condensación de la acetona á la acción de dicho ácido, tal como sucede en el procedimiento de Kasanjeff y Claisen para obtener óxido de mesitilo y la forona. La coloración parda que el líquido toma desde los primeros momentos de la reacción, tanto en el caso del óxido de mesitilo como en el de la ionona, creo sea debida á alguno de dichos cuerpos intermedios, pues se conocen casos en los cuales el cloruro de aluminio es reactivo colorante de varias substancias orgánicas.

De todos modos, mi objeto no fué otro que el consignar las dos originales condensaciones descritas, para hacer resaltar la acción catalítica tan extensa que el cloruro de aluminio ejerce sobre los compuestos orgánicos.

Salamanca, Octubre, 1908.

Laboratorio de Química orgánica de la Facultad de Ciencias.)

XXVIII.—Los «Nysson» de España (Insectos Himenópteros).

POR RICARDO GARCÍA MERCET.

I

El género *Nysson* comprende insectos conocidos desde hace mucho tiempo por los naturalistas, pues ya Forster, en 1771, describió una de sus especies, el *N. spinosus*, aunque atribuyéndola al gen. *Sphex*. Este mismo himenóptero es probable que hubiera sido estudiado antes (1767) por Linneo, pero considerándolo como una *Vespa*, pues la descripción de la llamada *V. bidens* por el célebre naturalista sueco se acomoda bastante bien á los caracteres morfológicos del *N. spinosus*. Sin embargo de ello y de haberse descubierto en 1790 y 1793 otras dos formas (el *trimaculatus* Rossi y el *maculatus* F.) genéricamente análogas á la primeramente conocida, su separación de los *Sphex*, *Crabro* ó *Mellinus* no fué acometida hasta el año 1796, en que Latreille creó el género *Nysson* sobre la especie *N. spinosus*, única que hasta entonces él había observado.

Pero aun después, durante no poco tiempo, fueron confundidos los *Nysson* con insectos de otros géneros, describiendo Fabricio el *interruptus*, en 1798, como un *Mellinus* y, en 1804, como un *Oxybelus*, y llevando Lamarck en 1817 y Deshayes en 1835 el *N. spinosus* al género *Larra*.

Empresa larga é impropia de un trabajo conciso y limitado como el que yo voy á emprender, sería la enumeración cronológica de todas las especies de *Nysson* que se han ido describiendo y de los nombres que cada una ha recibido; así es que, prescindiendo de acumular datos históricos, que aquí holgarían, consignaré sólo que el género *Nysson* da hoy nombre á una importante tribu de la familia de los Es-

fégidos (los *Nisoninos*) y que con las especies en él contenidas han tratado algunos entomólogos (Guerin, Costa, Smith, Cresson y Ashmead) de crear varios géneros, cuya diferenciación, al menos por lo que á algunos respecta, no se funda en caracteres todo lo fijos y precisos que fuera de desear. Por esto, y porque entre los *Nysson* españoles solamente el *N. scalaris* corresponde á uno de los géneros de nueva creación (el *Brachystegus*, Costa), paso por alto las subdivisiones génericas que han pretendido establecerse y, dando al género la amplitud con que lo caracterizó Latreille, asignaré a las especies en él contenidas los caracteres siguientes:

Labro corto, nunca más largo ni aun igual que el clipeo; ojos ovales, ligeramente sinuados, que llegan hasta la base de las mandíbulas; antenas de 13 artejos en los ♂♂ y 12 en las ♀♀; escapo corto y grueso; último artejo del funículo, en los machos, generalmente conformado de un modo especial; callos humerales separados de la base de los escámulas; alas anteriores con estigma pequeño, célula radial no apendiculada, y tres células cubitales, de las que, la segunda, con peciolo, recibe uno ó dos nervios recurrentes; metatórax corto, sus ángulos posticolaterales espinosos; tibias intermedias con dos espolones; fémures posteriores ni dilatados ni truncados en el ápice; tarsos alargados y finos; sexto segmento del abdomen (♀) provisto de un área pigidial bien señalada; último segmento (♂) terminado por dientecillos ó espinitas visibles. Especies pequeñas ó de tamaño medio y de cuerpo rechoncho.

El género *Nysson* comprende insectos repartidos por todo el mundo, y está representado en la fauna paleártica por 48 especies conocidas, de las que 19 viven en la Península ibérica. Ningún otro país, de los comprendidos en dicha región, es tan rico en formas de este género como el nuestro. Además, la mayoría de los *Nysson* de España eran desconocidos, pues de las 20 especies que estudiaré en el presente trabajo, 10 serán descritas ahora por vez primera y, una,

el *N. Laufferi*, también propiamente española y descubierta por mí, la publiqué el año 1904 en el *Boletín* de Noviembre de la Real Soc. Esp. de Hist. Nat.

Los *Nysson* son insectos de primavera y verano, que aparecen á mediados de Abril y se encuentran hasta fines de Septiembre. Sin embargo, la mayor parte de las especies que viven entre nosotros son estivales y sólo pueden recogerse en los meses de Junio, Julio y Agosto.

La biología de estos animales ha sido muy poco estudiada; cabe decir que nos es casi completamente desconocida. Nidifican en la tierra, en parajes bien expuestos al sol. Los adultos se encuentran volando á ras del suelo ó sobre diversas plantas euforbiáceas, umbelíferas, borragíneas, labiadas, etc., que en la provincia de Madrid suelen ser las *Euforbia lathyris* L., *serrata* L. y *helioscopia* L., la *Tapsia villosa* L, el *Pœucedanum stenocarpum Boiss*, el *Heliotropium europœum* L, el *Marrubium vulgare* L, etc. La proximidad de los ríos y arroyos ó de los manantiales son los sitios que estos artrópodos buscan preferentemente para vivir.

No abundan los *Nysson* en las colecciones entomológicas, y ello ha de deberse, sin duda, al pequeño tamaño de estos animales; á que la mayor parte aparecen en la estación canicular y salen de sus nidos á las horas en que con más fuerza calienta el sol, y á la limitada área de dispersión de muchas de sus especies. Todo esto dificulta la captura de los *Nysson* y explica el que, en una época en que los estudios entomológicos alcanzan por el resto de Europa tanta extensión, pueda un observador modesto como yo, describir de ellos un crecido número de formas que eran desconocidas.

He aquí ahora, enumeradas con arreglo á sus afinidades, según mi criterio, las especies que comprenderá el presente trabajo:

Nysson scallaris, Illiger; — *N. spinosus*, Forster; — *N. interruptus*, F.; — *N. trimaculatus*, Rossi; — *N. fulvipes*, Costa; —

N. Konowi, G. Mercet;—*N. fraternus*, G. Mercet;—*N. Castellanus*, G. Mercet;—*N. Miegi*, G. Mercet;—*N. militaris*, Gersteacker;—*N. Varelai*, G. Mercet;—*N. maculatus*, F.;—*N. parietalis*, G. Mercet;—*N. monachus*, G. Mercet; —*N. dimidiatus*, Jurine;—*N. Alicantinus*, G. Mercet;—*N. Laufferi*, G. Mercet;—*N. Ibericus*, Handlirsch; —*N. Dusmeti*, G. Mercet, y *N. pratensis*, G. Mercet.

Las formas nuevas comprendidas en la precedente enumeración son las que siguen:

Nysson fulvipes, *Costa.*

Esta especie fué descrita por su autor, en 1859, sobre ejemplares machos procedentes de Nápoles. Con posterioridad se ha encontrado en otras varias localidades de Italia, en Alemania y en Hungría. A pesar de ello la ♀ continuaba siendo desconocida, tal vez por haberse confundido con la de alguna otra especie. He aquí su descripción:

Media, robusta, nigra, corpus infra argenteo pubescens. Pars inferior temporum os versus postice marginata; clipeo convexo in margine antico carinulis duabus longitudinalibus instructo; frons inermis; antennae forma consueta, artículo último rotundato. Thorax et abdomen valde punctatus; spinis lateralibus metathoracis robustis; alae posticae cellula anali post originem vena cubitalis terminata; abdominis segmento ventrali secundo rotundato, reliquis haud ciliatis; area pygidiali elongata, opaca, punctata.

Corpus nigrum; fascia abbreviata pronoti, calli humerales, plerumque macula scutelli, maculæ utrinque segmentorum abdominis 1-3, pallide flavis; segmento primo rufo; pedes rufis.

Long. 8 mm.

Madrid! Aranjuez! Escorial! Montarco! Barcelona (Bofill)!

El *N. fulvipes* ♀ es un insecto bastante común en los alrededores de Madrid, y que puede recolectarse con abun-

dancia durante el período de floración de las tapsias y los Peucedanum. Se parece mucho á la hembra de otras especies que describiré á continuación, indicando al hacerlo los caracteres que las distinguen.

Nysson Konowi sp. nov.

Mas. Medius, robustus, niger, opacus, corpus infra argenteo pubescens. Pars inferior temporum os versus postice marginata; clipeo convexo, in margine antico carinulis duabus longitudinalibus instructo; frons inermis; antennae robustae versus apicem dilatatæ, artículo último vix curvato, inferne leviter exciso et duobus praecedentibus aequae longo. Thorax forma consueta; spinis lateralibus metathoracis satis longis, acutis; alae anticae versus apicem infumatae, posticae cellula anali post originen vena cubitalis terminata; tibiæ posticæ inermes. Abdominis segmento ventrali secundo rotundato; 3-5 breviter albido ciliatis; ciliis brevioribus quam in *N. fulvipe*; segmento ultimo apice bidentato.

Corpus nigrum, clipeo argenteo pubescente; fascia abbreviata pronoti, calli humerales, maculæ utrinque segmentorum abdominis 1-3 pallide flavis; abdominis segmento primo (macula apicale triangulari nigra excepta) rufo; pedes nigri, rufo variegati.

Long. 8-8,5 mm.

Fem. Similis. Antennae forma consueta, artículo último rotundato; segmentis ventralibus haud ciliatis; área pygidiali minus elongata quam in *fulvipe*; tibiis tarsisque rufis; femoribus basi nigra.

Long. 8-8,5 mm.

Madrid! Aranjuez! Escorial!

El *N. Konowi* es una especie próxima al *N. fulvipes* y también al *N. Castellanus,* que describiré más adelante.

Los ♂♂ del *fulvipes* y *Konowi* se distinguen bien por el

color del abdomen, que es completamente negro en el primero y rojo y negro en el segundo, y también por las pestañitas de los segmentos ventrales 2-5, mucho más cortas en el *Konowi* que en su semejante.

Las ♀♀ de una y otra especie son más difíciles de distinguir entre sí. La del *Konowi* presenta la puntuación del abdomen menos profunda, pero más densa que la del *fulvipes*, y las patas de color más obscuro, con los fémures casi completamente negros. La ♀ del *fulvipes* suele llevar en el escudete una mancha de color blanquecino.

Dedico esta especie á la memoria del sabio entomólogo alemán F. W. Konow, ya fallecido.

Nyason fraternus nov. sp.

Mas. Submedius, robustus, niger opacus, corpus infra paulo argenteo pubescens. Pars inferior temporum os versus postice marginata; clipeo convexo, in margine antico carinulis duabus longitudinalibus instructo; frons inermis; antennae robustae, versus apicem dilatatae, articulo ultimo vix curvato, inferne leviter exciso, duobus praecedentibus fere aequae longo. Thorax forma consueta; spinis lateralibus metathoracis brevis sed acutis; alae posticae cellula anali post originem venae cubitalis terminata; tibiae posticae inermes. Abdomen subtilior et sparsius punctato quam in *Konowi;* segmento secundo rotundato; segmento ultimo apice dentis duobus parvis instructo.

Corpus nigrum; maculae utrinque segmentorum abdominis 1-2 albis. Segmento primo rufo; pedes nigri; tibiis tarsisque rufescentibus.

Long. 5,5 mm.

Madrid, Mayo de 1905!

Especie muy parecida al *N. Konowi*, del que se distingue por la puntuación, más fina y esparcida; por el cuerpo negro, con manchas blancas solamente sobre los anillos del

abdomen 1-2, y por los dientes pequeñísimos en que termina el septimo segmento.

Nysson Castellanus nov. sp.

Mas. Medius, robustus, niger, opacus, corpus infra argenteo pubescens. Pars inferior temporum os versus postice leviter marginata; clipeo convexo, in margine antico carinulis duabus longitudinalibus instructo; frons inermis; antennae robustae versus apicem dilatatae, articulo ultimo vix curvato, inferne leviter exciso et tribus praecedentibus paulo breviore. Thorax forma consueta, sparse punctato; spinis lateralibus metathoracis satis longis, acutis; alae anticae parum fumatae; posticae cellula anali post originem vena cubitalis terminata; tibiae posticae inermes. Abdomen minus grosse punctato quam in *Konowi;* segmento ventrali secundo rotundato; segmento ultimo apice bidentato, dentibus fortioribus et brevioribus quam in *Konowi.*

Corpus nigrum; clipeo, fascia abbreviata pronoti et scutelli, calli humerales, maculae utrinque segmentorum abdominis 1-3 flavis; abdominis segmento primo toto et secundo ventrali versus basin rufis; pedes rufo-flavi; antennarum articulis 1-5 flavo pictis.

Long. 7-7,5 mm.

Fem. Similis. Antennae forma consueta, nigræ, versus basim pallidiores; clipeo nigro; scutello nigro vel flavo maculato; area pygidialis angustiore quam in *Konowi.*

Long. 7-7,5 mm.

Madrid, Junio de 1902, 2 ♂, 3 ♀!

Afin del *N. Konowi*, del *fulvipes* y del *Miegii,* que describiré á continuación. Se diferencia del *Konowi* por la puntuación del abdomen, menos gruesa, menos profunda y más apretada; por la longitud del último artejo de las antenas del ♂, más largo que en el *Konowi*; por los dientecillos en que termina el séptimo anillo abdominal, más cortos y más

fuertes en el *Castellanus*; por la forma del área pigidial de la ♀, más estrecha hacia el ápice que en el *Konowi*; por la coloración del clipeo, amarillo en el *Castellanus* ♂ y negro siempre en el *Konowi*; por el color de las patas, más claro; por el de las antenas, cuyos artejos basilares están manchados de amarillo en el ♂ y son amarillento-rojizos en la ♀. De la hembra del *N. fulvipes* se distingue por la puntuación del abdomen, menos gruesa, menos profunda y más apretada, por el color rojizo de las antenas, por el segundo anillo ventral, casi completamente rojo, y por las sienes, cuya quilla tiende á borrarse ó desaparecer antes de llegar á la boca.

Nysson Miegi nov. sp.

Fem. Magna, robusta, nigra, opaca, corpus infra argenteo pubescens. Pars inferior temporum os versus postice marginata; clipeo convexo, in margine antico carinulis duabus longitudinalibus instructo; frons inermis; antennae forma consueta, articulis 3-6 longioribus quam latibus. Thorax et abdomen sparsius punctatis quam in *Castellano*; spinis lateralibus metathoracis parvis, robustis; alae anticae parum fumatae, posticae cellula anali post originem vena cubitalis terminata. Area pygidialis latiore et breviore quam in *Castellano*.

Corpus nigrum; fascia pronoti et scutelli, calli humerales, macula utrinque segmentorum abdominis 1-3 flavis vel aurantiatis; abdominis segmento primo sapæssime rufo; antennarum articulis basalibus rufescentibus; pedes rufi; calcaribus posticis dimidio metatarso distintissime brevioribus.

Long. 11-13 mm.

España.

Esta especie es muy próxima al *N. Castellanus*, del que se distingue por su mayor tamaño, por tener las sienes fuertemente aquilladas hasta la boca, por la puntuación del ab-

domen más esparcida, por el área pigidial más ancha y menos estrechada hacia el ápice; por el color amarillo ó anaranjado de los dibujos claros, por presentar, á veces, el primer anillo del abdomen negro, con solo dos manchas rojas laterales. La describo sobre tres ejemplares de la colección Mieg, que se conservan en nuestro Museo de Historia Natural y que deben proceder de España, pues la mayor parte de las especies de dicha colección estaban recogidas en la Península, y las que procedían de otros países llevan una indicación especial de localidad, que no se encuentra en los individuos de referencia.

Nysson Varelai nov. sp.

Mas. *N. militare* similis et affinis. Submedius, niger, corpus infra argenteo pubescens. Pars inferior temporum os versus postice marginata; margo anterior clipei leviter sinuato; frons inermis; antennae breves et robustae, articulo ultimo incurvato, subtus inferne exciso, apice truncato, duobus præcedentibus simul sumptis aequali, articulo tertio et quarto funiculi latioribus quam longioribus. Thorax forma consueta, minus grosse sed magis dense punctato quam in *militare*; spinis lateralibus metathoracis satis longis; alae anticae infumatae, posticae cellula anali paulo post originem vena cubitalis terminata; tibiæ posticæ inermes. Abdomen minus grosse et dense punctatum quam in *militare*; segmento ventrali secundo rotundato; segmento ultimo spinis duabus parvis aproximatis munito.

Corpus nigrum; clipeo, fascia interrupta pronoti, calli humerales, maculæ utrinque segmentorum abdominis 1-3, flavis; segmento primo rufo, secundo et tertio apice rufescentibus; pedes rufi. Antennae rufescentes, scapo subtus flavo.

Long. 5-6 mm.

Fem. Similis. Antennae forma consueta, funiculo rufes-

cente; scapo et clipeo nigris; pedes obscuriores quam in ♂, area pygidialis satis lata, in lateribus marginata, apice rotundata.

Long. 6 mm.

Aranjuez, 1 ♂, 1 ♀ Junio de 1903!

Especie afin del *N. militaris*, pero que se distingue fácilmente de éste por la puntuación del abdomen, más fina y menos apretada, por la conformación del séptimo anillo abdominal del ♂, que termina en dos dientecillos cortos, y por el décimotercero artejo de las antenas, que es tan largo como los dos anteriores reunidos. En el ♂ el clipeo es siempre de color amarillo, mientras que en el *militaris* el clipeo, negro, ofrece, cuando más, dos manchitas amarillas.

Doy á esta especie el apellido del catedrático de la Universidad de Santiago, Sr. García Varela, con quien he trabajado varios años en el laboratorio de Entomología del Museo de Ciencias Naturales.

Nysson parietalis nov. sp.

Más. Parvo, niger, corpus infra argenteo pubescens. Pars inferior temporum os versus postice haud marginata; clipeo convexo in margo antico leviter depresso; fons inermis; antennae forma consueta, articulo ultimo simplice, breve, præcedenti paulo longiore; spinis lateralibus metathoracis satis brevibus, vix acutis; alae anticae fumatae, posticae cellula anali multo ante originem vena cubitalis terminata; tibiae posticae inermes. Abdomen mediocriter punctatum; segmento ventrali secundo rotundato; segmento último apice bidentato.

Corpus nigrum; fascia non interrupta pronoti, calli humerales, basi scutelli et maculae utrinque segmentorum abdominis 1-3 pallide flavis; abdominis segmentis duobus primis rufis; pedes nigri, femoribus posticis rufescentibus.

Long. 5 mm.

Alberche (provincia de Madrid), Junio de 1908!

Este *Nysson* se aproxima por algunos de sus caracteres al *dimidiatus* y demás afines, pero se aparta de ellos por la conformación del último artejo de las antenas.

Nysson monachus nov. sp.

Mas. Medius, robustus, niger, opacus, corpus infra argenteo pubescens. Pars inferior temporum os versus postice haud marginata; margo anterior clipei denticulato; frons inermis; antenae robustae, versus apicem dilatatae; artículo ultimo breve, præcedenti fere aequali, incurvato inferne leviter exciso. Thorax forma consueta, grosse punctato; spinis lateralibus metathoracis latis, brevibus, robustis; alae anticae versus apicem infumatae; posticae cellula anali post originem venae cubitalis terminata; tibiae posticae inermes. Abdomen grosse et sparse punctatum; segmento ventrali secundo rotundato; segmento septimo breve, lato, bidentato, margine apicali cilis longis munito.

Corpus nigrum; fascia interrupta pronoti, calli humerales, maculae utrinque segmentorum abdominis 1-4 albis; segmento primo toto et secundo in lateribus rufis; marginibus posticis segmentis totis argenteo pubescentibus. Pedes nigri.

Long. 9 mm.

Fem. Similis, Antennae forma consueta; artículo ultimo rotundato, praecedente paulo longiore. Segmentorum abdominis 1-3 albomaculatis. Area pygidialis lata, grosse punctata, in lateribus marginata, in apice leviter excisa.

Long. 9 mm.

Escorial (provincia de Madrid), 1 ♂ 1 ♀, Julio de 1907!

Esta especie se aparta considerablemente por algunos de sus caracteres de las del grupo del *dimidiatus* y *Friesei*, con las que, por otro lado, presenta marcadas analogías. Su tamaño es mucho mayor; el ♂ ofrece el último artejo de las antenas muy corto, y el séptimo segmento del abdomen con

grandes pestañas en el ápice. Las espinitas laterales de este anillo están muy separadas. La ♀ presenta el área pigidial ancha, gruesamente punteada y un poco escotada en el ápice. El cuarto y quinto anillos del abdomen con puntuación más fuerte y apretada que los anteriores.

Nysson Alicantinus sp. nov.

Mas. Parvus, niger, corpus infra argenteo pubescens. Pars inferior temporum os versus postice marginata; margo anterior clipei simplex; frons inermis; antennae robustae versus apicem dilatatae, artículo ultimo inferne leviter biexciso, tribus praecedentibus simul sumptis fere aequali. Thorax forma consueta, magis dense punctatus quam in *dimidiato*; spinis lateralibus metathoracis parvis, robustis; alae posticae celulla anali post originem venae cubitalis terminata; tibiae posticae inermes. Abdomen grossius et dense punctatum quan in *dimidiato;* segmento ventrali secundo rotundato versus basin carina longitudinali munito; segmento ultimo apice bidentato.

Corpus nigrum; calli humerales, maculae utrinque segmentorum abdominis 1-3 albís; abdominis segmentis duobus primis rufis, reliquis apice rufescentibus; pedes nigri, tibiis tarsisque anterioribus et intermediis flavo-variegatis.

Long. 4 mm.

Fem. Similis. Antennae forma consueta; articulo ultimo rotundato, duobus praecedentibus simul sunptis aequali. Fascia interrupta pronoti et basi scutelli albis. Abdomen subtilius punctatum, segmento ventrali secundo haud carinato. Pedes rufescentibus.

Long. 4,5 mm.

Alicante, 1 ♂, 2♀♀, Junio de 1903.

Especie próxima al *N. dimidiatus* y al *N. Laufferi,* de los que se diferencia el ♂ por la quillita del segundo segmento ventral y la conformación del último artejo de los antenas, ligerísimamente excavado, siendo las dos excavaciones aproxi-

madamente de igual longitud, mientras que en el *Laufferi* la basilar es más larga que la apical, y en el *dimidiatus* más corta que ésta. Las hembras se distinguen por la puntuación del abdomen; por las manchas blanquecinas que llevan sobre el pronoto y escudete las del *Alicantinus,* y por el área pigidial, menos estrechada hacia el apice en las de esta especie que en las otras dos.

Nysson Dusmeti sp. nov.

Mas. Parvus, niger, corpus infra argenteo pubescens. Pars inferior temporum os versus postice haud marginata; margo anterior clipei simplex; frons inermis; antennae robustae versus apicem dilatatae, articulo ultimo inferne leviter bisinuato, tribus praecedentibus simul sumptis paulo brevior. Thorax forma consueta; spinis lateralibus metathoracis parvis, robustis; alae posticae celulla anali ante originem venae cubitalis terminata; tibiae posticae inermes. Abdomen parum nitidum, fortius punctatum quam in *Alicantino;* segmento ventrali secundo versus basin carinis duabus longitudinalibus munito; segmento ultimo apice bidentato.

Corpus nigrum; calli humerales, maculae utrinque segmentorum abdominis 1—3 albis; abdominis segmento primo et secundo inferne rufis; pedes nigri, tibiis anterioribus et intermediis albo pictis; scapo subtus albo maculato.

Long. 4,55 mm.

Montarco—17 Mayo 1908—1 ♂ Dusmet.

Especie afin al *N. Alicantinus*, del que se diferencia por presentar un abultamiento con dos quillitas longitudinales en el segundo segmento ventral; por la estructura de las alas posteriores (cuya célula anal termina antes del arranque del nervio cubital), y por la puntuación más gruesa del abdomen. Se la dedico á mi querido amigo y, actualmente, compañero de estudios entomológicos D. José María Dusmet.

Nysson pratensis nov. sp.

Mas. Parvus, niger, corpus infra argenteo pubescens. Pars inferior temporum os versus postice haud marginata; margo anterior clipei simplex; frons inermis; antennae rubustae versus apicem dilatatae, articulo ultimo inferne leviter bisinuato tribus praecedentibus simul sumptis aequali. Thorax forma consueta; spinis lateralibus metathoracis parvis, robustis; alae posticae celulla anali post originem vena cubitalis terminata; tibiae posticae inermes. Abdomen mediocriter punctatum; segmento ventrali secundo, á latere viso, anguloso producto, versus basin tuberculo truncato munito; segmento ultimo apice bidentato.

Corpus nigrum; clipeus, calli humerales, maculis (saepe) pronoti, plerumque fascia in scutello, maculaeque utrinque segmentorum abdominis 1-3 eburneis; abdominis segmento primo et secundo inferne rufis; pedes nigri; tibiis anterioribus et intermediis, albopictis; scapo inferne albomaculato.

Long. 4,5-5 mm.

Fem. Similis. Antennae forma consueta, articulo ultimo rotundato, duobus praecedentibus simul sumptis aequali. Clipeo nigro; segmento ventrali secundo vix producto, fere rotundato; pronoto scutelloque semper albo maculatis; pedibus obscurioribus quan in ♂.

Long. 5,5 mm.

Escorial, Junio y Julio de 1907—6 ♂, 3 ♀.

El ♂ de esta especie debe ser muy parecida al *N. Chevrieri* Khol, del que se distinguiría por el último artejo de las antenas más corto, el clípeo y la mitad basilar de las mandíbulas de color amarillo y ofrecer manchas blanquecinas solamente sobre los tres primeros anillos. La ♀ ha de ser muy semejante al *N. Friesei* Handl, lo que me induce á suponer que, probablemente, esta última especie (N. Friesei) no será otra cosa que la hembra del *N. Chevrieri.*

El *N. pratensis* no puede ser, creo yo, el llamado *N. Ibe-*

rius por Handlirsch, pues, de esta especie, dice su autor que tiene el cuerpo mucho más gruesamente punteado que el *N. Friesei*, que presenta una banda amarilla entera sobre el pronoto y que tiene las patas rojas, y el *N. pratensis* apenas es más punteado que el *dimidiatus* (que lo es menos que el *Friesei)*, lleva sobre el pronoto dos manchas blanquecinas y tiene las patas casi completamente negras.

(Continuará.)

XXIX.—Nuevo método de destrucción de la materia orgánica en el análisis toxicológico.

POR JUAN BAUTISTA PESET Y ALEIXANDRE.

No se precisa encarecer la importancia del problema de la destrucción de la materia orgánica, y de ella da razón la numerosa literatura con que en la actualidad se cuenta respecto del asunto.

Las condiciones que deben concurrir en un procedimiento adecuado para el caso, se clasifican en las categorías siguientes: *a*) la destrucción debe resultar lo más completa posible. *b*) no ha de haber pérdida sensible de ningún metal venenoso por causa de volatilización. *c*) los reactivos empleados no deben precipitar ningún metal calificado entre los venenosos. *d*) los mismos reactivos no han de introducir ninguno de ellos. *e*) ha de ser rápido; y *f*) que no ha de ser nunca peligroso.

Entre los numerosos procedimientos inventados, no hay ninguno que reuna todas las condiciones indicadas. El defecto más frecuente de todos consiste en la posibilidad de dejar precipitados uno ó varios metales acompañando al residuo de

las materias orgánicas, lo cual obliga á someterlo á ulteriores tratamientos. Los principales aniones empleados con objeto de precipitar cationes venenosos, son los correspondientes á los ácidos clorhídrico, sulfúrico y crómico. El primero, capaz de precipitar la plata, mercurioso y parte del plomo y del talio, se emplea en los reacctivos de los procedimientos de Duflos, Millon, Fresenius y Babo, Abreu, Ogier (ácido clorhídrico y clorato potásico), Mai (ácido clorhídrico, clorato potásico y persulfato amónico), Kippenberger (ácido clorhídrico, sal de manganeso y ácido nítrico), Jaquelain (cloro), Malagut y Zarzeau (agua regia), Gaultier (agua regia y galvanismo), Schlagdenhausen (cloruro sódico, ácido sulfúrico y bicromato potásico), Drunty, Duflos y Hirsch (ácido clorhídrico y cloruro cálcico), etc. El ión sulfúrico, capaz de precipitar el plomo, bario y estroncio, se emplea en los procedimientos de Flandín y Danger, Gautier, Filhol, Grigorgeu (ácidos sulfúrico y nítrico), Ponchet (sulfato ácido de potasio), Meillère (ácidos sulfúrico y nítrico y sulfato potásico), Denigés (ácido sulfúrico ó nítrico y permanganato potásico) y el citado de Schlagdenhausen. El cromión capaz de precipitar la plata, mercurioso, plomo y bario, entra en el último citado.

Este mismo introduce, además, el cromión venenoso, siendo imposible ya su investigación toxicológica. Introdúcen el manganeso los procedimientas citados de Kippenberger, Villiers y Denigés.

Pueden producir pérdidas por volatilización todos los que se fundan en la carbonización ó calcinación, ya sea sencilla, en corriente de oxígeno (proc. de Verryken), precedida del tratamiento por el ácido nítrico ó un nitrato (proc. de Rapp, Thenard, Woehler y Siebol, Orfila, Chevalier) ó favoreciéndolo con la ayuda del ácido sulfúrico, como ocurre en los métodos de Filhol y análogos.

Resulta lentísimo otro procedimiento recientemente propuesto en Alemania, y que consiste en tratar por el ácido

nítrico y someter á la corriente eléctrica. Hay veces que dura siete ú ocho días.

Son, por otra parte, muy peligrosos, habiendo producido la muerte de un químico parisién, los sistemas fundados en el tratamiento por el ácido nítrico seguido de calcinación.

Acaso el método más recomendable, que cumple las condiciones *a)*, *b)*, *d)*, *e)* y *f)*, es el fundado en el empleo del clorato potásico y el ácido clorhídrico, según la modificación de mi querido maestro el Dr. Ogier, Director del Laboratorio de Toxicología de París. La novedad consiste en hacer actuar el ácido clorhídrico gaseoso sobre la mezcla de las materias y el clorato en recipiente cerrado, y así la operación realízase sola á la temperatura ordinaria. Para más pormenores es preciso ver la obra de Química Toxicológica de este autor.

Aunque parezca tener á mano sobrados procedimientos el químico-legista, no creo inútil la publicación de mis trabajos acerca de la materia, iniciados en el Laboratorio de Fresenius y terminados en el de Ogier. Fúndase el nuevo método en la acción oxidante combinada del ácido nítrico y de los vapores nitrosos nacientes, producidos añadiendo un nitrito alcalino. He aquí los experimentos llevados á cabo, y repetidos para comprobar su eficacia.

Cosa de 20 gramos de embutido y otro tanto de pan se colocan en una cápsula de porcelana, se mezclan con 100 c. c. de agua, se añaden cerca de 40 gramos de ácido nítrico y se lleva la mezcla al baño de María. Agrégase agua hasta formar una papilla clara y luego 3 gramos de nitrito potásico ó sódico, agitando al mismo tiempo. De diez en diez minutos se sigue añadiendo cada vez 0,5 gramos de nitrito y agua para substituir la que se evapora. Pasadas tres horas, redúcese por evaporación á pequeño volumen, para eliminar gran parte de los gases nitrosos. Después se diluye, y á las cinco horas resulta completa la destrucción de las materias orgánicas. La masa queda convertida en un líquido amarillo,

con ligero residuo blanco-amarillento y algo de grasa que sobrenada.

Este método se puede practicar en recipiente cerrado, como lo demuestra el experimento que sigue: Convertidos en papilla 146 gramos de hígado, se mezclan con 6 gramos de nitrito sódico y se añaden 20 c. c. de agua; colócase la mezcla en un matraz provisto de un tapón con dos agujeros, atravesado uno de ellos por un tubo-embudo de llave, que penetra en el interior de aquélla, y el otro por un tubo de desprendimiento, que puede ir á desembocar en una solución de potasa. Se calienta al baño de María. En el embudo se pone ácido nítrico, que se va añadiendo en pequeñas porciones á merced de la llave. Al cabo de hora y media se puso en el embudo una disolución de 6 gramos de nitrito sódico en poca cantidad de agua y se añadió paulatinamente. La destrucción era completa á las cuatro horas. Filtrado y pesado el residuo seco á la temperatura ordinaria, resultaba ser de 13,008 gramos, ó sea 8,91 por 100 de la substancia empleada, constituído en su mayor parte por grasas. Hecho así el ataque, se evita el desprendimiento rápido de vapores nitrosos, siempre molestos, favoreciendo al mismo tiempo su más prolongado contacto, que acorta la operación.

A primera vista se comprende que el procedimiento indicado llena de modo bastante completo las condiciones exigidas y apuntadas al principio. En efecto, la destrucción es suficiente. Los reactivos empleados no son capaces de precipitar ningún metal. No introducen ninguno calificable de veneno, ya que el sodio ó el potasio, formando sales, no lo son. No hay posibilidad de pérdidas, puesto que se hace en recipiente cerrado. Es bastante rápido y nada peligroso. Un exceso de ácido siempre es evitable por evaporación, puesto que el ácido nítrico hierve á 86°.

El único metal cuya solubilidad resulta dudosa en la solución nítrica es el estaño, que en presencia del ácido nítrico pasa á ácido metastánnico insoluble. Se consideran dos ca-

sos: *a)* Que se halle en estado de sal soluble ó compuesto cualquiera. Entonces no es de temer su precipitación, como indica el siguiente experimento: Una solución de cloruro estannoso tratada por otra concentrada de nitrito sódico, da un precipitado blanco perfectamente soluble en el ácido nítrico. Lo mismo ocurre aunque se hidrate previamente con potasa. Luego, en el caso interesante para la Toxicología, cuando el estaño se halla formando un compuesto que no sea inofensivo, como el ácido metastánnico, queda disuelto aplicando el método que se estudia. *b)* Carece de importancia en Toxicología, pues no se han registrado casos de envenenamiento por el estaño metálico empleado como antihelmíntico. De todas maneras, conviene examinarlo con el fin de dar mayor generalidad al sistema. Poniendo en un tubo de ensayo un pedacito de estaño metálico y añadiendo una solución concentrada de nitrito, permanece el metal inalterable; si esta mezcla se trata por el ácido nítrico, el primero continúa igual mientras existe nitrito por atacar; cuando se acaba, es atacado el estaño y convertido en ácido metastánnico insoluble. Para solubilizar este cuerpo, los autores recomiendan la fusión con cianuro potásico. Conviniendo en el caso presente evitar las acciones violentas del fuego y el empleo de productos tóxicos, se procede haciendo uso de una propiedad de dicho cuerpo indicada por R. Fresenius: el residuo de la destrucción de la materia orgánica que contenga ácido metastánnico, se hierve con ácido clohídrico concentrado; se añade agua destilada abundante y se filtra. El líquido filtrado contiene estaño directamente precipitable con el ácido sulfhídrico. Se puede apurar previamente el resíduo con éter para privarlo de la grasa.

Como en el organismo hay sulfatos y cloruros, podría haberse producido la precipitación de algún metal, quedando éste en el resíduo. Los metales precipitables por el ácido sulfúrico normal en el organismo, que lo contiene en dosis exiguas, han de encontrarse en cantidad bastante para no ser

precipitados por completo en el caso de producir efectos tóxicos. Si se sospechara la existencia del plomo, bastaría agotar el resíduo con solución de tartrato amónico ó con ácido clorhídrico en caliente. De los metales precipitables por el ácido clorhídrico ó los cloruros normales en el organismo, el mercurioso se oxida por el ácido nítrico, pasando á mercúrico; el plomo siempre es soluble en parte, y más en caliente (siendo probable que exceda á la cantidad de ácido clorhídrico); el talio da cloruros solubles en agua caliente y ácidos, y con esto queda limitado el estudio á la plata, cuya presencia en el resíduo siempre es delatada por su ennegrecimiento en presencia de la luz. He aquí cómo se procede en los casos en que por dicha circunstancia ó por la presencia de plata en el líquido obtenido queremos separar la pequeña cantidad de este metal, que inevitablemente queda en el resíduo. Disuelta la parte de plata reducida en el ácido nítrico é incorporada esta solución á la ya obtenida, agotado el residuo con éter y neutralizado con potasa, se trata por una solución concentrada de hiposulfito sódico, y después de abandonado algunas horas en su contacto, se filtra. En el líquido filtrado se introduce una lámina de cobre, ó mejor de hierro (no tóxico), y la plata disuelta se precipita. Se puede emplear el amoniaco en sustitución del hiposulfito; pero tiene la desventaja de dar al resíduo coloración naranja subida. Además, si bien en este caso la separación de la plata es más rápida, no resulta adherente y hay que filtrar. También podría emplearse el cianuro, pero es agente tóxico, y siempre resulta preferible no utilizar reactivos de tal especie, aunque nadie pretenda investigar el ácido cianhídrico en los resíduos.

Algunas observaciones, para terminar, acerca de los reactivos que han de emplearse: Da excelentes resultados para purificar el ácido nítrico el destilarlo varias veces (cuatro ó cinco), después de añadirle el 10 por 100 de ácido sulfúrico, según propuso Bertrand. Las destilaciones se hacen

en el mismo aparato y al baño de María, como ha recomendado Loekemann. Tampoco ha de olvidarse que el ácido nítrico conservado largo tiempo en frascos de vidrio, puede tomar algo del arsénico contenido en éste, como demostró Fresenius.

Para ensayar la pureza del nitrito he aquí el procedimiento: Se tratan 50 gramos por ácido clorhídrico puro, hasta que termine el desprendimiento de vapores nitrosos. El residuo se diluye con agua y se divide en dos partes iguales. La primera se emplea para la investigación del arsénico en el aparato de Marsh, á cuyo fin se evapora y calienta con ácido sulfúrico hasta que desprende humos blancos voluminosos. La segunda parte se destina al ensayo general de los metales. La presencia de cloruros y sulfatos se ensaya disolviendo en agua 20 gramos de nitrito, y se divide el líquido en dos partes, que se evaporan á sequedad en dos cápsulas de porcelana ó de vidrio, luego de añadir, respectivamente, nitrato argéntico y bárico. El resíduo se disuelve en el agua, observando si queda parte insoluble. Esta reacción así practicada es de extremada sensibilidad.

Programa de premios para el Concurso del año 1910.

Artículo 1.° La Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid abre Concurso público para adjudicar tres premios á los autores de las Memorias que desempeñen satisfactoriamente, á juicio de la misma Corporación, los temas siguientes:

1.° *«Determinar la figura definitiva que, por efecto de las »presiones del gas interior, del aire exterior y de los sistemas »de suspensión de los diversos pesos, tomará un aeróstato »fusiforme, construído con una tela flexible y elástica, supo-*

»niéndole en reposo en medio de una atmósfera tranquila, y »calculando asimismo las tensiones correspondientes á cada »punto de la tela.»

2.° *«Deducción y estudio de la ley de las fases, partien»do de las teorías químicas que suponen el átomo compuesto »por un núcleo rodeado de una atmósfera de elementos eté»reos.»*

3.° *«Monografía de los minerales de plomo en España,»*

El aspirante al premio no sólo ha de describir los minerales é indicar la procedencia y condiciones de los criaderos en que se encuentran, sino que señalará las aplicaciones que aquellos tienen en las Artes y la Industria, y presentará, como justificantes de la obra, los ejemplares de menas, las preparaciones microscópicas, los datos de ensayos y análisis, las muestras de metal, etc., que juzgue pertinentes para la mejor y más completa inteligencia de su trabajo.

Art. 2.° Los premios que se ofrecen y adjudicarán, conforme lo merezcan las Memorias presentadas, serán de tres clases: *premio* propiamente dicho, *accésit* y *mención honorífica.*

Art. 3.° El premio consistirá en un diploma especial en que conste su adjudicación, una medalla de oro de 60 gramos de peso, exornada con el sello y lema de la Academia, que en sesión pública entregará el Sr. Presidente de la Corporación á quien le hubiere merecido y obtenido, ó á persona que le represente; retribución pecuniaria, al mismo autor ó concurrente premiado, de 1.500 pesetas; impresión, por cuenta de la Academia, en la colección de sus Memorias, de la que hubiere sido laureada, y entrega, cuando esto se verifique, de 100 ejemplares al autor.

Art. 4.° El *premio* se adjudicará á las Memorias que no sólo se distingan por su relevante mérito científico, sino también por el orden y método de exposición de materias. Su redacción ha de ser bastante esmerada, para que desde luego pueda procederse á su publicación.

Art. 5.° El *accésit* consistirá en diploma y medalla iguales á los del premio y adjudicados del mismo modo, en la impresión de la Memoria, coleccionada con las de la Academia, y entrega de los mismos 100 ejemplares al autor.

Art. 6.° El *accésit* se adjudicará á las Memorias poco inferiores en mérito á las premiadas y que versen sobre los mismos temas, ó, á falta de término superior con que compararlas, á las que reunan condiciones científicas y literarias aproximadas, á juicio de la Corporación, á las impuestas para la adjudicación ú obtención del premio.

Art. 7.° La *mención honorífica* se hará en un diploma especial, análogo á los de *premio* y *accésit*, que se entregará también en sesión pública al autor ó concurrente agraciado ó persona que le represente.

Art. 8.° La *mención honorífica* se hará de aquellas Memorias verdaderamente notables por algún concepto, pero que, por no estar exentas de lunares é imperfecciones, ni redactadas con el debido esmero y necesaria claridad para proceder inmediatamente á su publicación, por cuenta y bajo la responsabilidad de la Academia, no se consideren dignas de *premio* ni de *accésit*.

Art. 9.° El concurso quedará abierto desde el día de la publicación de este programa en la *Gaceta de Madrid*, y cerrado en 31 de Diciembre de 1910, día hasta el cual se recibirán en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, número 26, cuantas Memorias se presenten.

Art. 10. Podrán optar al concurso todos los que presenten Memorias que satisfagan á las condiciones aquí establecidas, sean nacionales ó extranjeros, excepto los individuos numerarios de esta Corporación.

Art. 11. Las Memorias habrán de estar escritas en castellano ó latín.

Art. 12. Las Memorias que se presenten optando al premio se entregarán en la Secretaría de la Academia, dentro del plazo señalado en el anuncio de convocatoria al concur-

so, y en pliegos cerrados, sin firma ni indicación del nombre del autor, pero con un lema perfectamente legible en el sobre ó cubierta que sirva para diferenciarlas unas de otras. El mismo lema de la Memoria deberá ponerse en el sobre de otro pliego, también cerrado, dentro del cual constará el nombre del autor y las señas de su domicilio ó paradero.

Art. 13. De las Memorias y pliegos cerrados, el Secretario de la Academia dará, á las personas que los presenten y entreguen, un recibo en que consten el lema que los distingue y el número de su presentación.

Art. 14. Los pliegos señalados con los mismos lemas que las Memorias dignas de *premio* ó *accésit* se abrirán en la sesión en que se acuerde y decida otorgar á sus autores una ú otra distinción y recompensa, y el Sr. Presidente proclamará los nombres de los autores laureados en aquellos pliegos contenidos.

Art. 15. Los pliegos señalados con los mismos lemas que las Memorias dignas de *mención honorífica* no se abrirán hasta que sus autores, conformándose con la decisión de la Academia, concedan su beneplácito para ello. Para obtenerle se publicarán en la *Gaceta de Madrid* los lemas de las Memorias en este último concepto premiadas, y, en el improrrogable término de dos meses, los autores respectivos presentarán en Secretaría el recibo que de la misma dependencia obtuvieron como concurrentes al certamen, y otorgarán por escrito la venia que se les pide para dar publicidad á sus nombres. Transcurridos los dos meses de plazo que para llenar esta formalidad se conceden sin que nadie se dé por aludido, la Academia entenderá que los autores de aquellas Memorias renuncian á la honrosa distinción que legítimamente les corresponde.

Art. 16. Los pliegos que contengan los nombres de los autores no premiados ni con *premio* propiamente dicho, n con *accésit*, ni con *mención honorífica*, se quemarán en la misma sesión en que la falta de mérito suficiente de las Me-

morias respectivas se hubiere decidido. Lo mismo se hará con los pliegos correspondientes á las Memorias agraciadas con *mención honorífica* cuando, en los dos meses de que trata la regla anterior, los autores no hubieren concedido permiso para abrirlos.

Art. 17. Las Memorias originales, premiadas ó no premiadas, pertenecen á la Academia, y no se devolverán á sus autores. Lo que, por acuerdo especial de la Corporación podrá devolvérseles, con las formalidades necesarias, serán los comprobantes del asunto en aquellas Memorias tratado, como modelos de construcción, atlas ó dibujos complicados de reproducción difícil, colecciones de objetos naturales, etc. Presentando en Secretaría el resguardo que de la misma dependencia recibieron al depositar en ella sus trabajos como concurrentes al certamen, obtendrán permiso los autores para sacar una copia de las Memorias que respectivamente les correspondan.

Madrid, 31 de Diciembre de 1908.

PUBLICACIONES RECIBIDAS

(Continuación.)

Olivier (Louis).—Revue générale des Sciences pures et appliquées.—XVIII année, números 20, 21.—30 Octobre, 15 Nov. 1907.—París.

Fukuzawa (Sampachi).—Klassification der Unstetig Keiten von funktionen einer reellen veränderlichen. Von...—Tokio, 1907.

Cosmos.—Rev. des sc. et de leurs applicat.—LVI année, nouvelle série, números 1.188, 1.189, 1.190 y 1.191.—2, 9, 16 y 23 Novembre, 1907.—París.

Reale Accademia dei Lincei.—Atti della...—Anno CCCIV.—1907.—Serie quarta. Rendiconti.—Classe di Scienze fisiche, mat. et nat.—Vol. XVI.—Fasc, 7, 8, 9 (2.° sem.).—Roma.

Académie des Sciences.—1907.—Deuxième semestre. Comptes rendus hebd. des Séances de l'...—Tome CXLV, números 18, 19, 20, 21 (28 Oct. 4, 11, 18 Nov. 1907).—París.

Royal Society of London.—Philosophical Transactions of the...—Series B. Vol. 119. Pp. 199 251. Plates 25 28.—London.

True (Frederick W.).—Remarks on the Type of the fossil Cetacean Agorophius Pygmæus (Müller).—City of Washington, 1907.

Oficina Central de la Sección Meteorológica del Estado de Yucatán.—Boletín mensual de la ...—Año meteorológico de 1905 á 1906. Mes de Noviembre.—Mérida de Yucatán, 1907.

Observatorio Meteorológico Magnético Central de México.—Boletín mensual de ... Meses de Marzo y Abril de 1907 y Septiembre de 1904.—México, 1903 y 1904.

Société Hollandaise des Sciences a Harlem.—Archives Neerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles.—Serie II, tome XII, 5.e livraison.—La Haye, 1907.

Halle (George E.) Trost (Edwin B.).—The Astrophysical Journal.—Volumen XXVI.—Number 3. October 1907.—Chicago and New York.

Nature.—A weekly illustrated journal of Science.—Núms. 1983, 1984, 1985, 1986, Vol. 77. Oct. 31, Nov. 7-14-21, 1907.—London.

Ritter (Wm. E.).—University of California Publications in Zoology.—Vol. 4, número 1, pp. 1 52, pls. 1-3. Oct. 26, 1907.—The Ascidians collected by the United States Fisheries Bureau Steamer Albatross on the Coast of California during the summer of 1904.—Berkeley.

Osterhout (W. J. V.).—University of California Publications Botany.—Vo-

lumen 2, núm. 15, pp. 317-318.—October 22, 1907.—On Nutrient and Balanced Solutions.—Berkeley.

Merriam (John C.) and William J. Sinclair.—University of California Publications Bulletin of the Department of Geology.—Vol. 5, núm. 11. páginas 171-205. Andrew J. Lawson, Editor.—Tertiary Faunas of the John Day Region.—Berkeley.

Académie Impériale des Sciences de St.--Petersbourg.—1907.—Núm. 14, VI Serie. 15 Octobre.—St. Petersbourg.

Observatoire Royal de Belgique.—Annuaire Meteorologique.—pour 1901, 1902, 1903, 1904, 1905 et 1906.—Bruxelles. 1901-1906.

Observatoire de Paris.—Bulletin Astronomique. Tome XXIV. Novembre 1907.—Paris, 1907.

Royal Astronomical Society.—Monthly Notices of the .. Vol LXVII, número 9.—Supplementary Number.

Bibliothéque Universelle.—Archives des Sciences Physiques et Naturelles.—Quatriéme période.—Tome XXIV. Núm. 15. Octobre 1907.—Genéve, 1907.

American Museum of Natural History (The).—Annual Report of the President for the yar 1906 —Printed for the Museum.

Darboux, E Picard et J. Tannery (G.).—Bulletin des Sciences Mathématiques.—Deuxième série.—Tome XXXI. Septembre 1907.—Paris, 1907.

Société Portugaise de Sciences Naturelles.—Lisbonne, Octubre 1907. Volumen I. Fasc, 2.

Secretaría de Agricultura, Industria y Comercio.—Boletin oficial de la.... vol. III. núm. 4, 20 de Octubre de 1907.—Habana.

Académie Royale d'Archéologie de Belgique.—Bulletin, 1907, I, II.—Anvers, 1907.

Laisant (C. A.) etc.—L'Intermédiaire des Mathématiciens. Tome XIV, 1907, núm. 10. Octobre 1907.—Paris, 1907.

Société Impériale des Naturalistes de Moscou.—Bulletin de la ...., Année 1906, núm. 3, 4.—Moscou, 1907.

Openheimer-Berlín (Dr. phil. et med. Carl).—Biochemisches Centralblatt, Band IV, núm. 18, 19, 20.—Oct. Nov. 1907.—Leipzig.

Miklós (Dr. Janesó).—Tanulmány A Váltóláz Parasitáiról. Irta....—Budapest, 1906.

Gyula (Konig)—Mathematikai és Természettudomanyi Ertesito. A. M. Tud. Akademia III. Osztalyanak Folyóirata.—XXIV. Kotet. 3-5. Füzet.—Budapest, 1906.

Roland Baron Eotvos, Julius Konig, Karl von Than.—Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Herausgegeben von ... Redigiert von Josef Kürschák und Franz Schafarzik. Dreiundzwanzigster Band. 1905.—Leipzig, 1906.

(Se continuará.)

XXX. — Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia séptima.

SEÑORES:

De los tres métodos empleados para resolver el problema de la Elasticidad, hemos explicado ya en cursos anteriores dos de ellos, y en este curso nos proponemos explicar el tercero, advirtiendo una vez más que nuestras conferencias tienen un carácter elemental, no agotan la materia ni mucho menos, constituyen tan sólo una preparación para el estudio de las obras de los grandes maestros de la ciencia: en rigor nuestros trabajos en esta asignatura son de propaganda científica, propaganda pudiéramos decir de la alta ciencia ó si se quiere de sus fundamentos.

Ya expusimos en el segundo curso el método de Cauchy, en el tercero el método de Lamé y en este anunciamos al empezar que nos proponíamos explicar el método de monsieur Poincaré.

Realmente la resolución del problema de la Elasticidad puede exponerse de muchas maneras, y es susceptible de muchas variantes; pero tampoco es imposible hacer de estas diversas soluciones unos cuantos grupos, y este ha sido nuestro pensamiento al dar á conocer los métodos de Cauchy y de Lamé: son dos tipos, por decirlo de este modo, á los que damos dos nombres ilustres.

El método de Mr. Poincaré, como vamos á ver, difiere de los dos anteriores.

Ya hemos marcado en las conferencias anteriores los caracteres de este último método ó sistema de solución; en esta conferencia hemos de marcarlos aún más.

***

Resumamos en brevísimas frases los dos métodos ya explicados.

Lamé, y todos los autores de su escuela, determinan el equilibrio ó el movimiento de un sólido elástico, considerando en el interior de éste un paralelepípedo elemental de dimensiones pequeñísimas.

Definen las fuerzas que actúan sobre sus diferentes caras, que serán tensiones con uno ú otro signo; es decir, ya esfuerzos de atracción ya esfuerzos de compresión.

Y escriben las ecuaciones de equilibrio, según la Mecánica racional, de este paralelepípedo, bajo la acción de las fuerzas exteriores que actúan sobre su masa y de las tensiones que actúan sobre sus diferentes caras.

En este método no descendemos, por decirlo de este modo, hasta cada uno de los puntos del sistema para establecer su equilibrio, pero nos aproximamos indefinidamente á cada uno de estos puntos, imaginando que indefinidamente desciende en dimensiones el paralelepípedo infinitamente pequeño que alrededor de cada uno de los puntos del sistema se ha imaginado.

Y cuando hablamos de ecuaciones de equilibrio, bien se sobrentiende que hablamos también de ecuaciones del movimiento, porque este problema se reduce al primero, agregando á las fuerzas exteriores las fuerzas de inercia.

Este artificio del paralelepípedo decreciente y siempre infinitamente pequeño se ha generalizado, como ya dijimos en otra ocasión, á muchos problemas de la Física matemática.

Constituye un método, un artificio, una *manera* pudiéramos decir, que á cada paso nos encontramos al estudiar los

múltiples problemas de aquella ciencia, desde la propagación del calor de Fourier, hasta la electroestática de Maxwell. Es descender de las leyes *finitas* á las leyes de los elementos que son ó se pueden suponer más sencillas.

Las breves líneas que acabamos de dictar son, en cierto modo, la síntesis del tercer curso que explicamos de esta asignatura.

Porque establecido el paralelepípedo elemental, escritas sus ecuaciones de equilibrio, expresadas las tensiones en función de las deformaciones y eliminadas aquéllas en función de éstas, y pudiéramos decir, recordando las notaciones empleadas, eliminadas las N y T en función de las u, v, w, de las expresadas ecuaciones de equilibrio, tendremos tres ecuaciones en diferenciales parciales que serán las del problema de la Elasticidad.

Y sólo nos quedaría estudiar el problema del equilibrio de las superficies límites, empleando el tetraedro elemental de Cauchy.

En rigor, lo expuesto resume el método de Lamé y sus análogos, y da, en cierto modo, su nota característica, que es ésta: empleo del paralelepípedo elemental y de un concepto tomado realmente de la experiencia, á menos que no se mezclen unos métodos con otros, concepto que hemos designado con el nombre genérico de *tensión*.

***

El método de Cauchy, que explicamos en el segundo curso, el de sus discípulos y el de todos los matemáticos de su escuela, por ejemplo, el de Mr. Briot en su teoría de la luz, es fundamentalmente distinto del método precedente.

Es más profundo, más atrevido, y, dada la hipótesis mecánica en toda su extensión, más perfecto, á nuestro entender, que el de Lamé, Clebsch y otros autores.

En el método de Cauchy, ó si se quiere en el tipo puro

de esta escuela, no encontramos al establecer las ecuaciones generales, ó no necesitamos encontrar, ni el paralelepípedo elemental, ni las tensiones sobre sus diversas caras; no nos detenemos en un cuerpo infinitamente pequeño, pero al fin y al cabo análogo, salvo la dimensión, al cuerpo ó al sistema elástico de dimensiones finitas.

La hipótesis de Cauchy desciende á mayores honduras, y supone cierta hipótesis sobre la constitución de los cuerpos ó sistemas.

Se suponen estos compuestos de puntos materiales A, A'... dotado cada uno de una masa determinada m, m'.....

Se admite que estos diferentes puntos materiales se atraen ó se rechazan dos á dos, según las líneas geométricas que los unen; es decir, que se parte de la hipótesis de las fuerzas centrales, y para cada punto, por ejemplo, para el punto A, cuya masa hemos designado por m, se establecen las tres ecuaciones de equilibrio ó de movimiento de la Mecánica racional.

El problema no puede ser más sencillo ni más elemental tampoco.

Al punto m llegan una serie de fuerzas en línea recta desde todos los demás puntos del cuerpo m', m''..... Todas estas fuerzas son funciones de las distancias, é igualando para cada punto la suma de las componentes de las fuerzas que á él llegan, aumentada con las componentes paralelas á los ejes de las fuerzas exteriores que actúan sobre dicho punto; igualando, repito, estos conjuntos de componentes á cero si se trata del equilibrio á

$$m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2}$$

si se trata del movimiento, tendremos para cada punto, porque lo que hemos dicho para m pudiéramos decir para m'....., tres ecuaciones.

De suerte, que si n es el número de puntos, habremos obtenido $3n$ ecuaciones diferenciales simultáneas, en que las funciones serán también en número $3n$, á saber: x, y, z..... y el tiempo t.

Integrando estas ecuaciones, habremos resuelto el problema del movimiento, y como caso particular el del equilibrio.

Todo lo demás serán artificios de cálculo, simplificaciones, desarrollos y métodos de integración.

Por ejemplo: en vez de tomar como funciones las coordenadas de cada punto x, y, z..... tomaremos las variaciones de estas coordenadas u, v, w..... cantidades sumamente pequeñas, puesto que en la mayor parte de los problemas de elasticidad, los puntos se separan muy poco de su posición natural de equilibrio.

Asimismo substituiremos á las ecuaciones diferenciales simultáneas, ecuaciones en diferenciales parciales, eligiendo cuatro variables independientes x, y, z, t. Por último, para determinar el equilibrio ó el movimiento de cada punto, sólo tendremos en cuenta los puntos muy próximos á éste, dentro del radio de actividad molecular.

En suma, las notas características del método de Cauchy, son estas:

Distribución discontinua de la materia, que supondremos compuesta de puntos materiales con las masas m m'.....; *fuerzas centrales, funciones de las distancias.*

***

Veamos ahora, antes de entrar á desarrollarlo, en qué consiste el método de Poincaré, cuáles son sus notas características y en qué concuerda y en qué difiere de los dos métodos anteriores.

En rigor, ya lo hemos dicho varias veces, pero en las ideas fundamentales, y tratándose de la enseñanza, no hay inconveniente, y antes bien es ventajoso, repetirlas una y otra vez;

y, además, el carácter de *conferencias*, que desde el principio he venido dando á estas lecciones, me permiten, para la exposición, una libertad que no tendría si escribiese una obra didáctica sobre Física matemática.

El método de Mr. de Poincaré en nada se parece, ó al menos no se parece en sus líneas generales, al método de Lamé y á sus análogos.

Ni encontramos en él el paralelepípedo elemental, ni hemos de introducir el concepto de tensiones.

El punto de partida y el desarrollo de cada uno de estos dos métodos es distinto del otro, siquiera en su obra sobre la teoría de la Elasticidad haga Mr. Poincaré varias referencias al método de Lamé.

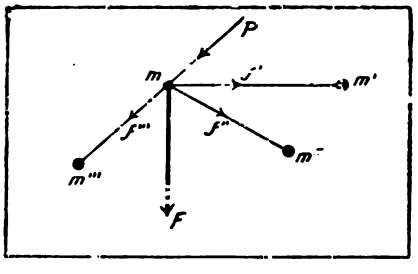


Figura 20.

Pero estas referencias no se refieren á los fundamentos de uno y otro método.

En cambio, el método del insigne maestro tiene el mismo punto de partida que el de Cauchy; como este último, consideró aquél, compuesto cada cuerpo elástico de una serie de puntos materiales con masas m, m', m''....., situados á distancias sumamente pequeñas comparadas con las dimensiones del cuerpo, pero enormes en comparación con las dimensiones de cada uno de dichos puntos materiales. Cada cuerpo es un sistema astronómico en miniatura, si vale la palabra.

Mas en el fondo hay una diferencia radical entre ambas hipótesis. Ni la especificó Cauchy, ni la especifica Mr. Poincaré, que huye, siempre que puede, de nuevas hipótesis, y se inclina, en lo posible, á los resultados experimentales.

Cauchy, sin decirlo, debía dar por supuesto que cada punto material era homogéneo, pues sólo así tiene explicación,

casi satisfactoria, como antes explicábamos, la teoría de las fuerzas centrales.

Mr. Poincaré tampoco especifica, por su parte, que los puntos materiales que considera sea cada uno de ellos en sí heterogéneo; pero nosotros, por nuestra parte, nos atrevemos á indicar que la no homogeneidad de las masas materiales *m*, *m'*....., el ser dichos puntos materiales sistemas complejos, el contener masas ponderables y atmósferas etéreas, atmósferas que pueden deformarse bajo la acción atractiva ó repulsiva de los demás puntos materiales del

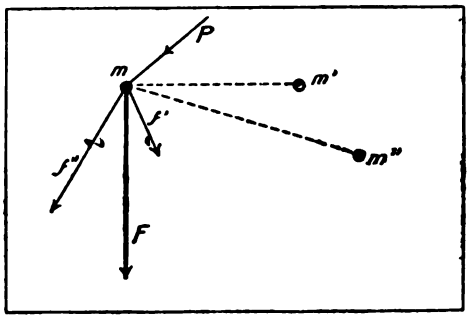


Figura 21.

sistema, ó, si se quiere, sistemas compuestos de electrones positivos y negativos; esta heterogeneidad, repetimos, puede explicar dentro de la hipotesis mecánica la existencia de fuerzas que no sean centrales.

En suma, Mr. Poincaré prescinde por completo de dicha hipótesis restrictiva, la cual está contenida, sin embargo, como caso particular en la teoría general que el autor expone.

Las figuras 20 y 21 representan materialmente, mejor dicho, en forma gráfica, esto que acabamos de explicar.

La figura 20 se refiere á la hipótesis de Cauchy.

Cada punto material *m* está solicitado por todos los demás puntos del cuerpo *m'*, *m''*.....

Pero cada punto m', por ejemplo, le solicita con un esfuerzo f' central, es decir que va de m á m'.

Otro punto material m'' le solicita asimismo con otro esfuerzo f'', que también es central según la línea $m\,m''$.

Y lo mismo pudiéramos decir de m''' que ejerce sobre m en la línea $m\,m'''$ un esfuerzo f'''; y así sucesivamente para todos los demás puntos del cuerpo elástico.

La resultante F de todas estas fuerzas $f, f'\,f''\,f'''$..... será la que actuará sobre m, ya para el equilibrio, ya para el movimiento de dicho punto, como acción de todo el cuerpo elástico sobre el m.

Los componentes de esta fuerza F y las de la fuerza exterior P, si existe, actuando sobre m, entrarán en las ecuaciones del equilibrio ó del movimiento del punto que consideramos.

La figura 21, análoga en un todo á la precedente, se refiere al método de Poincaré: m es un punto cualquiera del sólido elástico, lo que para él digamos, podríamos repetir para otro punto; porque Poincaré como Cauchy no se detienen, por decirlo así, en el paralelepípedo elemental, sino que determina las ecuaciones del equilibrio del movimiento para cada uno de los puntos del sistema elástico.

Sobre el punto m actúan, y no decimos si esta acción es á distancia ó es á través del éter, esto importa poco, pero sí suponemos que es instantánea; actúan, decimos, los puntos materiales m', m''..... en un momento dado.

Pero á diferencia del método de Cauchy, y buscando una hipótesis más general, la acción de m' sobre m, no es, según la línea $m\,m'$, no es central, sino que determina una fuerza f' que, como demuestra la figura, sigue una dirección distinta de la recta $m\,m'$.

Asimismo el punto m'' ejerce una acción sobre m, que no coincide en general con la línea de las masas $m\ m''$, sino que es, por ejemplo, f''.

Lo mismo diríamos de todos los demás puntos del sistema

elástico: todos actuarán sobre m y determinarán fuerzas en general no centrales.

La resultante de todas estas fuerzas f', f''..... es la fuerza F.

***

El problema se plantearía del mismo modo en el método de Cauchy que en el método de Poincaré.

Si prescindimos, para simplificar la explicación de las fuerzas exteriores, que pueden actuar en cada punto del sistema, y sólo tenemos en cuenta las fuerzas interiores, las condiciones de equilibrio serán las mismas para la figura 20 que para la figura 21; es decir, para el método de Cauchy que para el método de Poincaré.

Para el equilibrio de cada punto será preciso que la fuerza F sea nula, y serán condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio del punto en cuestión, que las componentes de dicha fuerza F, con relación á los tres ejes trirrectangulares á que está referido el sistema, sean iguales á cero.

De suerte que representando por F_x, F_y y F_z las tres componentes de F, las ecuaciones de equilibrio de las fuerzas interiores para cada punto serán

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0, \qquad (1)$$

y las ecuaciones del movimiento para el punto de masa m

$$F_x = m\,\frac{d^2x}{dt^2}, \quad F_y = m\,\frac{d^2y}{dt^2}, \quad F_z = m\,\frac{d^2z}{dt^2}. \quad (2)$$

Si n es el número de puntos, que será enorme, para el equilibrio tendremos n grupos como el (1), un grupo para cada punto expresando su equilibrio, y para el movimiento n, grupos como el (2).

Y la forma será la misma, como hemos dicho, para el

método clásico de Cauchy en la hipótesis de las fuerzas centrales, que para el método moderno de Poincaré, en que se prescinde de esta hipótesis,

Sólo que en el primer método la F será la de la figura 20, es decir, la expresión analítica que resulta, y en el segundo caso la F será la de la figura 21, mejor dicho, su expresión analítica.

Ahora bien; en el caso de las fuerzas centrales, el problema está ya resuelto, ó, por lo menos, planteado analíticamente, porque F es la resultante de las fuerzas f', f''..... cuya magnitud y cuya dirección pueden expresarse analíticamente dada la constitución del cuerpo.

Por ejemplo: para f', representando por r la distancia $m\,m'$, la magnitud de dicha fuerza, suponiendo su constante igual á uno, será

$$mm'f(r),$$

siendo $f\,(r)$ la función de la distancia que en el segundo curso de esta asignatura llamábamos, para abreviar, *función de Saint-Venant.*

Y su dirección también puede determinarse, porque sus tres cosenos directores serán evidentemente

$$\frac{x'-x}{r}, \quad \frac{y'-y}{r}, \quad \frac{z'-z}{r},$$

designando por x', y', z' las coordenadas del punto m'.

Así, pues, las componentes F_x, F_y, F_z en el método de Cauchy, es un conjunto de términos de forma conocida:

$$mm'f(r)\frac{x'-x}{r}, \quad mm'f(r)\frac{y'-y}{r}, \quad mm'f(r)\frac{z'-z}{r}.$$

Verdad es que no conocemos la forma de la función $f(r)$; pero esto se suple aplicando la fórmula de Taylor, como hicimos en el segundo curso de esta asignatura.

Todo lo que queda son desarrollos de cálculo y métodos de integración.

El método de Mr. Poincaré, al pronto, no se presenta tan fácil, porque en la figura 21, ni sabemos cómo se expresan las fuerzas *f*, es decir, la fórmula de su magnitud en función de los datos é incógnitas, ni conocemos su dirección.

En esto consiste la especialidad del método de Mr. Poincaré, quien aplica para resolver este problema el principio de mecánica, conocido con el nombre de *conservación de la fuerza,* ó mejor dicho, de *conservación de la energía;* pues no es la fuerza, á saber, la que se expresa en kilogramos, sino la energía, la que se mide en kilográmetros, la que entra en el principio que acabamos de citar.

Este principio es el que vamos á exponer, ó mejor dicho á recordar, para mejor inteligencia de mis oyentes ó de mis lectores.

***

Pero debemos, antes de proseguir nuestra tarea, hacer algunas aclaraciones sobre la manera de entender las fuerzas *no centrales.*

La interpretación que dimos y recordaremos es nuestra, solamente nuestra, y, por decirlo de este modo, de nuestra exclusiva responsabilidad en lo que tenga de defectuosa.

El punto de vista de Mr. Poincaré sobre las fuerzas no centrales, á nuestro entender, es distinto y más índependiente.

Nosotros llegamos al caso de fuerzas *no centrales* entre las diferentes masas de un sistema elástico, partiendo de las fuerzas centrales entre los elementos homogéneos de las diferentes masas en acción.

Es, en cierto modo, un esfuerzo para conciliar las dos hipótesis, la de las fuerzas centrales y la de las fuerzas no centrales. Estas resultan de aquéllas como acciones entre

puntos materiales muy pequeños, que son los elementos del cuerpo, pero que á pesar de ser muy pequeños son sistemas complejos.

Tal explicación, valga por lo que valiere, es fiel á los principios de la Mecánica clásica.

Cada punto del cuerpo está sujeto de esta manera á una fuerza y un par, estado que, si mal no recordamos, citaba Mr. Lamé en una de sus obras al explicar la cristalización.

Pero nada de esto vulnera ni el principio de la fuerza central entre dos elementos homogéneos, ni el principio de la reacción igual y contraria á la acción.

Las fuerzas resultantes no son centrales, y los pares tienen sus brazos de palanca infinitamente pequeños, como que son del orden de las dimensiones de cada punto material, mejor dicho, de cada masa elemental compleja.

Estos pares son los que pudieran explicar la cristalización de los cuerpos, porque tienden á orientar los puntos materiales ó moléculas en direcciones determinadas.

El punto de vista de Mr. Poincaré, como decíamos antes, es distinto y más sencillo. No pretende conservar las fuerzas centrales: ni lo pretende ni lo niega.

Admite, como caso más general, que las fuerzas no sean centrales, sin pretender explicarlo, al menos en la obra á que nos referimos. Y prescindamos ya de todas estas hipótesis.

Los puntos materiales del cuerpo, sin pretender explicar lo que son, supondremos que están sujetos á fuerzas no centrales F (fig. 21).

Estas fuerzas no centrales procederán de lo que procedieren, quizá no sean acciones á distancia, sino que las transmita el medio ambiente.

Lo que importa es consignar el punto de que parte la teoría, y es este.

El cuerpo elástico se compone de puntos materiales de masas m, m', m''..... (fig. 21). Y cada una de estas masas m está sujeta á la acción de una fuerza total F, que es

resultante, repetimos, de todas las fuerzas no centrales f, f'..... procedentes de las acciones de las demás moléculas sobre m.

Y aquí surge el problema que antes indicábamos. ¿Cómo se determinan las componentes de estas fuerzas resultantes F, ó, si se quiere, de cada fuerza parcial y su dirección?

***

Se resuelve este problema, es decir, se determinan las componentes F_x, F_y, F_z de F, aplicando el principio de la *conservación de la energía.*

Aunque se estudia este principio en Mecánica racional, y mis lectores ó mis oyentes deben conocerlo, bueno será que lo recordemos, partiendo de sus fundamentos.

Las ecuaciones del movimiento de un sistema de puntos m, m'..... son estas:

$$\left\{\begin{array}{l} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z, \\ m'\dfrac{d^2x'}{dt^2} = X', \\ m'\dfrac{d^2y'}{dt^2} = Y', \\ m'\dfrac{d^2z'}{dt^2} = Z', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

es decir, un grupo de tres ecuaciones para cada punto de sistema.

Las tres primeras, para el punto de masa m: x, y, z serán las tres coordenadas del punto m, y X, Y, Z las tres componentes de la fuerza total que actúa sobre m.

Del mismo modo m' será la masa de otro punto; x', y', z' las coordenadas de m', y X', Y', Z' las componentes de la fuerza que actúa sobre el punto m', que ahora consideramos.

Así sucesivamente para todos los puntos m'', m'''..... del sistema.

X, Y, Z..... son componentes de fuerzas totales, así de las interiores, es decir, las que ejercen unos puntos del sistema sobre otros, como de las exteriores, ó sea de las que vienen de fuera, de otros cuerpos ó de otros sistemas.

Así, en un cuerpo cualquiera, unas fuerzas serán las que proceden de las atracciones y repulsiones de sus moléculas, y éstas se llamarán interiores F_i; y otra será, por ejemplo, la gravedad, el peso de cada punto, y á las de este grupo las llamaremos F_e.

Del sistema anterior de ecuaciones se deduce el principio de las fuerzas vivas, que es uno de los principios más generales de Mecánica.

Multiplicando ambos miembros del primer grupo, respectivamente, por

$$2\,dx, \quad 2\,dy, \quad 2\,dz,$$

las tres ecuaciones del segundo grupo por

$$2\,dx', \quad 2\,dy', \quad 2\,dz'$$

y así sucesivamente para los demás grupos del sistema, y sumando, tendremos

$$m\left(\frac{2\,dx\,d^2x}{dt^2}+\frac{2\,dy\,d^2y}{dt^2}+\frac{2\,dz\,d^2z}{dt^2}\right)+$$

$$+\,m'\left(\frac{2\,dx'\,d^2x'}{dt^2}+\frac{2\,dy'\,d^2y'}{dt^2}+\frac{2\,dz'\,d^2z'}{dt^2}\right)+\ldots\ldots=$$

$$=2(Xdx+Ydy+Zdz)+2(X'dx'+Y'dy'+Z'dz')+\ldots\ldots$$

ó representando por Σ la suma de términos que se deducen, de los que vamos á escribir, acentuando una vez, dos veces..... n veces, si n es el número de puntos del sistema, la m, las x, y, z y las X, Y, Z, tendremos

$$\Sigma m\left(\frac{2\,dx\,d^2x}{dt^2}+\frac{2\,dy\,d^2y}{dt^2}+\frac{2\,dz\,d^2z}{dt^2}\right)=$$
$$=2\,\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz),$$

que puede evidentemente ponerse bajo esta forma:

$$\Sigma md.\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=$$
$$=2\,\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz).$$

Pero $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ ..... son las componentes paralelas á los ejes, de las velocidades que tienen en un instante cualquiera los puntos m, m'.....

Representando por v, v'..... estas velocidades, es evidente que,

$$v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2;$$
$$v'^2=\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\ldots\ldots$$

y por lo tanto la ecuación precedente podrá escribirse de este modo

$$\Sigma mdv^2=2\,\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz),$$

ó bien

$$d\Sigma\frac{mv^2}{2}=\Sigma Xdx+Ydy+Zdz.$$

La interpretación de esta ecuación es bien sencilla: en cada intervalo de tiempo dt, el incremento diferencial de la semifuerza viva total del sistema $\Sigma \frac{mv^2}{2}$, que es la suma de todas las semifuerzas vivas de sus diferentes puntos, es igual á $\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$.

Pero la cantidad entre paréntesis tiene una interpretación muy fácil: Xdx, que es el producto de la componente X por el camino infinitamente pequeño dx que recorre su punto de aplicación sobre el eje de las x, representará el trabajo durante dt de la componente X.

Análogamente Ydy será el trabajo de la componente Y en el mismo intervalo de tiempo.

Y, por último, Zdz tendrá el valor del trabajo de Z paralelamente al eje de la z, siempre en el intervalo dt.

Pero como se sabe por mecánica, que en ejes rectangulares, el trabajo de la resultante es igual al trabajo de las componentes, es claro que

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

representará el trabajo de la fuerza F que actúa sobre el punto de masa m durante el tiempo dt.

Y como Σ comprende todos los puntos del sistema, y por consiguiente todas las fuerzas que sobre ellos actúan, el segundo miembro designará el trabajo de todas las fuerzas del sistema, siempre en el intervalo dt.

Las fuerzas, decimos como antes, son todas, las interiores y las exteriores, las F_i y las F_e.

Dicho segundo miembro $\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$ es, pues, *un incremento de trabajo*, pero no tenemos derecho para decir que sea una *diferencial*; porque en general la expresión

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = Xdx + Ydy + Zdz + \\ + X'dx' + Y'dy' + Z'dz' .....$$

podrá no ser una diferencial exacta de x, y, z, x', y', z'..... aun siendo X, Y, Z funciones de estas coordenadas.

Por esta razón, representando por T el trabajo de todas las fuerzas del sistema entre dos instantes t_0 y t, siendo t-t_0 un tiempo finito, no designaremos el incremento del trabajo durante dt por dT, sino por ΔT, representando Δ la inicial de *diferencia*.

La ecuación que estamos considerando, tomará esta forma:

$$d\Sigma \frac{mv^2}{2} = \Delta T,$$

y efectuando la suma de todas las ecuaciones análogas á la anterior para los intervalos dt comprendidos entre dos instantes t_0 y t_1, el primer miembro será una integral; pero el segundo será una suma, y resultará

$$\int_{t_0}^{t_1} d\Sigma \frac{mv^2}{2} = \Sigma_{t_0}^{t_1} \Delta T,$$

ó bien efectuando la primera integral, y representando por v_0, v'_0..... las velocidades de los diferentes puntos m, m'..... en el instante t_0, y por v_1, v'_1..... las velocidades de los mismos puntos en el instante t_1

$$\Sigma \frac{mv_1^2}{2} - \Sigma \frac{mv_0^2}{2} = \Sigma_{t_0}^{t_1} \Delta T, \qquad (1)$$

que traducida al lenguaje vulgar expresa el principio de las fuerzas vivas, y puede enunciarse de este modo:

Cuando un sistema material de puntos ponderables se mueve en el espacio bajo la acción de fuerzas, y describiendo trayectorias determinadas, el incremento de la semifuerza viva total entre t_0 *y* t_1, *es igual al trabajo total desarrollado por todas las fuerzas que actúan en el sistema, tanto interiores como exteriores, en este mismo intervalo* t_1-t_0.

Este teorema indica, que el incremento de trabajo se convierte en incremento de fuerza viva, y en cantidad numéricamente igual, dado el sistema de unidades ordinario de masas, velocidades y fuerzas á que está referida la ecuación anterior.

Marca una relación de equivalencia entre estas dos formas de la energía, á saber: la fuerza viva y el trabajo.

Si el sistema está aislado y no hay más que fuerzas interiores, expresará dicha ecuación el principio de la conservación de la energía, no en general, pero sí bajo ciertas condiciones relativas á las fuerzas interiores X_i, Y_i, Z_i; mas á este principio hemos de darle otra forma, que es la que explicaremos inmediatamente.

***

Para ello necesitamos decir algo, aunque diremos poco, porque todas éstas son cuestiones de Mecánica, que supongo conocidas, y que sólo repito para refrescar las ideas; diremos algo sobre los sistemas que llamaremos *conservativos*, palabra que está en el Diccionario y que corresponde á la idea que voy á explicar: la palabra *conservador* no me satisface para este caso.

Supongamos que un sistema material está aislado por completo en el espacio y sujeto tan solo á fuerzas interiores.

Supongamos, además, que dichas fuerzas dependen de una expresión de todas las coordenadas de los puntos de dicho sistema.

$$U(x, y, z, x', y', z'.....)$$

siendo $x, y, z, x', y', z'.....$ las coordenadas de los puntos $m, m'.....$ del sistema en cuestión.

Es necesario precisar más las ideas.

Cuando para un instante cualquiera se conocen $x, y, z.....$,

es decir, se conoce la posición del sistema, las fuerzas interiores quedan determinadas, y, por lo tanto, sus componentes.

Estas componentes se derivan de la función U, precisamente tomando las derivadas y substituyendo en dichas derivadas, que serán evidentemente funciones de x, y, z..... los valores de estas coordenadas para el punto que se considera.

De suerte, que las tres componentes X, Y, Z de la fuerza que actúa sobre el punto m, es decir, las componentes de aquellas fuerzas, que antes llamábamos F en la figura 21, vendrán dadas por las expresiones

$$X = \frac{dU}{dx}, \quad Y = \frac{dU}{dy}, \quad Z = \frac{dU}{dz},$$

en que los segundos miembros, como acabamos de decir, serán funciones de x, y, z..... y en que deberemos substituir, en vez de estas coordenadas generales, las de los puntos del sistema para el instante que se considera.

Claro es, que decir que están determinadas X, Y, Z..... cuando se conoce U, es una expresión demasiado vaga y general, porque pueden depender de U de muchas maneras.

La que hemos escogido, es decir, la de expresar las componentes por las derivadas, es una de tantas interpretaciones de aquella forma general; pero no está escogida á capricho, por la razón que luego veremos.

En esta hipótesis, la fórmula anterior de las fuerzas vivas se transformará fácilmente observando, que el segundo miembro puede escribirse de este modo:

$$\Sigma_{t_0}^{t_1} \Delta T = \Sigma_{t}^{t_1} \Sigma (Xdx + Ydy + Zdz),$$

ó bien poniendo por X, Y, Z sus valores,

$$\Sigma_{t_0}^{t_1} \Delta T = \Sigma_{t_0}^{t_1} \Sigma \left(\frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dy} dy + \frac{dU}{dz} dz \right).$$

Pero la cantidad comprendida entre paréntesis, que comprende todos los puntos del sistema, y esta es la significación de la Σ que la afecta, así como la $\sum$ exterior se refiere á la suma de intervalos dt, es una diferencial exacta de todas las variables x, y, z.....; porque

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = \Sigma\left(\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz\right) =$$

$$= \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz + \frac{dU}{dx'}dx' + \frac{dU}{dy'}dy' + \frac{dU}{dz'}dz' + ...$$

de modo que en rigor es la diferencial total de U, y así

$$\Sigma_{t_0}^{t_1}\,\Delta T = \Sigma_{t_0}^{t_1}\left(\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz} + ...\right) = \Sigma_{t_0}^{t_1}(dU).$$

En este caso, en vez del signo Δ, podemos emplear el signo diferencial d, porque ya los incrementos son las diferenciales totales de una función U. Y del mismo modo en vez del signo Σ, podemos emplear el signo $\int$.

De suerte que la casación (1) de las fuerzas vivas tomará la forma:

$$\Sigma\,\frac{mv_1^2}{2} - \Sigma\,\frac{mv_0^2}{2} = \int_{t_0}^{t_1} dU = \Big(U\Big)_{t_0}^{t_1}$$

ó, por fin,

$$\Sigma\,\frac{mv_1^2}{2} - \Sigma\,\frac{mv_0^2}{2} = U_1 - U_0,$$

representando U_1 el valor de U para la primera posición del sistema, es decir, la designada por subíndice (1), y por U_0 el valor de la misma función para la posición inicial.

Si representamos por x_1, y_1, z_1, x'_1, y'_1, z'_1..... las co-

ordenadas de los diferentes puntos para la posición final del sistema (1), y por x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0..... las coordenadas de la posición inicial (0), la ecuación podrá escribirse de este modo:

$$\Sigma \frac{m v_1^2}{2} - \Sigma \frac{m v_0^2}{2} = U(x_1, y_1, z_1, x'_1, y'_1, z'_1 .....) -$$
$$- U(x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0 .....).$$

El teorema de las fuerzas vivas podrá, en este caso, enunciarse en esta forma: *el incremento de fuerza viva de un sis-*

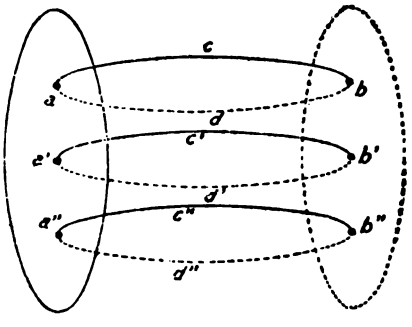


Figura 22.

tema sometido tan solo á fuerzas interiores, al pasar de una posición (0) *á otra posición* (1), *únicamente depende de dichas posiciones*, ó, dicho de otro modo, del valor de U para ambas, y es independiente de los caminos que hayan seguido los diferentes puntos del sistema al ir de una posición á otra.

Fijemos bien las ideas, y sean (fig. 22) a, a', a''..... diferentes puntos del sistema en la posición (0).

Supongamos que dicho sistema pasa, bajo la acción de fuerzas X, Y, Z..... que tienen la propiedad indicada, de ser las derivadas parciales de una función única U, con relación á x, y, z....., pasa, decimos, á la posición (1).

a habrá venido á parar á b; a' á b'; a'' á b'', y así sucesivamente.

Pues bien; el incremento de fuerza viva del sistema, al pasar de (0) á (1), no dependerá más que de las posiciones de *a*, *a'*, *a''*..... *b*, *b'*, *b''*.....

Este incremento será el mismo si el punto *a* ha seguido la trayectoria *a c b*, ó la trayectoria *a d b*, y lo mismo podemos repetir para los demás puntos.

El teorema subsiste aún cuando existen fuerzas exteriores, con tal que cumplan con la condición ya indicada, á saber: la de obtenerse por derivaciones parciales de una función única *U*.

Esto es evidente, porque basta repetir las consideraciones y cálculos anteriores.

***

Pero hasta aquí no se sabe por qué hemos empleado la palabra *conservativo*, aplicada al sistema, ó más explícitamente la frase, *sistema conservativo de la energía*.

Insistamos, pues, en nuestras explicaciones, y demos otras nuevas.

Sea (fig. 23) un sistema de puntos materiales en equilibrio, sometidos á fuerzas interiores y ocupando la posición (0), y sea *a* uno cualquiera de estos puntos.

Lo que de él digamos, pudiéramos decir de todos los demás.

Supongamos que á dicho punto *a*, que estaba en equilibrio lo mismo que todos los restantes del sistema, según hemos dicho, se le aplica una velocidad *V*.

El sistema se pondrá en movimiento bajo la acción de las fuerzas interiores y de las velocidades iniciales *V*, *V'*.....

Un punto cualquiera *a*, bajo la acción de estas fuerzas y de su velocidad inicial *V*, describirá una trayectoria *a b*, y el sistema vendrá á parar al cabo del tiempo *t* á la posición (1).

En este movimiento del punto *a*, la fuerza *F*, que es la

resultante para el punto c, por ejemplo, de las fuerzas interiores, desarrollará un trabajo á lo largo de la trayectoria $a\,b$, que en el caso que hemos representado en la figura, será un trabajo negativo; es decir, que la fuerza F se opondrá al movimiento.

Admitamos, como antes, que las fuerzas interiores se pueden derivar de una función única U, que recibe en general

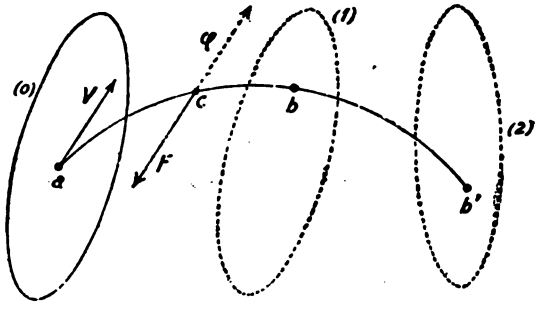


Figura 23.

el nombre de FUNCIÓN DE FUERZAS, y que designaremos, como hace un momento, por

$$U\,(x, y, z, x', y', z' \ldots\ldots)$$

de modo que

$$\text{para } a \ldots\ldots X = \frac{dU}{dx}, \quad Y = \frac{dU}{dy}, \quad Z = \frac{dU}{dz},$$

$$\text{para } a' \ldots\ldots X' = \frac{dU}{dx'}, \quad Y' = \frac{dU}{dy'}, \quad Z' = \frac{dU}{dz'}.$$

. . . . . .

Si llamamos v_1 la velocidad del móvil que parte de a al llegar á b, y análogamente para los demás puntos del sistema, la ecuación de las fuerzas vivas tendrá esta forma:

$$\Sigma\,\frac{m v_1^2}{2} - \Sigma\,\frac{m V^2}{2} = U\,(x_1, y_1, z_1, x'_1, y'_1, z'_1 \ldots\ldots) -$$
$$- U\,(x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0 \ldots\ldots),$$

ó abreviadamente

$$\Sigma \frac{m v_1^2}{2} - \Sigma \frac{m V^2}{2} = U_1 - V_0.$$

Designando en esta última ecuación por subíndices los valores de U para ambas posiciones del sistema.

Pero no olvidemos que la forma primitiva del segundo miembro, antes de hacer la integración relativa á los diferentes puntos de la trayectoria, era

$$\int dU = \int \Sigma \left(\frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dy} dy + \frac{dU}{dz} dz \right),$$

en que la integral $\int$ se refiere al tiempo (ó á la trayectoria ab), y la Σ se refiere á los diferentes puntos del sistema.

Hemos dicho que

$$\frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dy} dy + \frac{dU}{dz} dz = X\, dx + Y\, dy + Z\, dz,$$

$$\frac{dU}{dx'} dx' + \frac{dU}{dy'} dy' + \frac{dU}{dz'} dz' = X'\, dx' + Y'\, dy' + Z' dz',$$

. . . . . .

representan evidentemente los trabajos desarrollados por las fuerzas F, es decir, por las fuerzas interiores desde a á b; desde a' á b', y así sucesivamente.

De aquí se deduce que

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta U = U_1 - U_0$$

es el trabajo desarrollado por las fuerzas F desde la posición (0) á la posición (1).

U representa, pues, un trabajo, en función, como es natural, de todos las puntos del sistema y función cuyas diferencias, á medida que varían las coordenadas de dichos puntos, van marcando los trabajos parcialmente desarrollados.

Si considerásemos en cada instante fuerzas φ iguales y contrarias á las F, el trabajo de estas fuerzas hipotéticas sería igual y contrario, evidentemente, al trabajo de las fuerzas F.

Si imaginamos una función Π igual y de signo contrario á la función U en cada instante, es decir, para cada sistema de valores de las coordenadas, tendremos

$$\Pi\,(x, y, z, x', y', z'.....) = -\,U(x, y, z, x', y', z'.....),$$

ó abreviadamente,

$$\Pi = -\,U,$$

y la ecuación de la fuerzas vivas tomará la siguiente forma:

$$\Sigma\,\frac{m v_1^2}{2} - \Sigma\,\frac{m V^2}{2} = -\Pi_1 + \Pi_0.$$

Hemos admitido que la posición (0) es la posición inicial, que en ella el sistema estaba en equilibrio; por lo tanto, el trabajo de la fueza F podemos suponer que es nulo; de donde se deduce

$$U_0 = 0, \quad \text{y como } U = -\,\Pi,$$

resulta

$$U_0 = -\,\Pi_0, \quad \text{ó bien } \Pi_0 = 0,$$

y

$$\Sigma\,\frac{m v_1^2}{2} - \Sigma\,\frac{m V^2}{2} = -\,\Pi_1,$$

ó bien

$$\Sigma \frac{m v_1^2}{2} + \Pi_1 = \Sigma \frac{m V^2}{2}.$$

Para otra posición (2) del sistema,

$$\Sigma \frac{m v_1^2}{2} + \Pi_1 = \Sigma \frac{m V^2}{2},$$

de donde en general:

$$\Sigma \frac{m v_1^2}{2} + \Pi_1 = \Sigma \frac{m v_1^2}{2} + \Pi_2 = \ldots\ldots = \Sigma \frac{m V^2}{2}.$$

Resulta de aquí que el sistema, en su movimiento, goza de esta propiedad: *que la fuerza viva actual, en cualquier posición, mas una cierta función* Π *de las coordenadas de los puntos materiales* m, m'..... *función que es igual y contraria á la función de fuerzas* U; *esta suma, repetimos, es constante é igual á la energía inicial del sistema* $\Sigma \frac{m V^2}{2}$.

De aquí se deduce, que lo que se pierde en fuerza viva en cualquier posición, se gana en el valor de la función Π y recíprocamente. Y, por el contrario, todo aumento en la fuerza viva, es disminución en la función Π.

Este resultado es lo que podemos *llamar conservación de la energía en el sistema.*

Así como la función *U* se llama *función de fuerzas* porque de ella, derivando con relación á x, y, z....., se obtenían las componentes de las fuerzas interiores *F*, así Π se llama *función potencial*, y tambien *energía potencial.*

La energía que posee el sistema, que es la energía inicial $\Sigma \frac{m V^2}{2}$ se conserva en el movimiento; pero bajo dos for-

mas. Una forma cinética ó de fuerza viva; la otra Π como trabajo disponible.

Por ejemplo: si el móvil llegara á una posición en que todas las velocidades v_1..... se anulasen y por la acción de las fuerzas F el sistema retrocediera, Π sería en cierto modo la energía almacenada en el sistema, y si éste volviera á su posición inicial, las fuerzas F reconstruirían en cierto modo la energía $\Sigma \frac{m V^2}{2}$ pues siendo $v_1 = o$, $v'_1 = o$..... la ecuación se reduce á

$$\Pi = \Sigma \frac{m V^2}{2}.$$

Una advertencia general. Si una función U cumple con las condiciones indicadas, y es por lo tanto *función de fuerzas*, en el mismo caso se encontrará $U + C$, siendo C una constante arbitraria, porque

$$\frac{d(U + C)}{dx} = \frac{dU}{dx} \ldots\ldots$$

Lo mismo puede decirse de Π.

La constante C tiene una interpretación sumamente fácil.

Sin insistir en resultados que suponemos conocidos por el estudio de la Mecánica racional, podemos decir, resumiendo:

1.° Que en un sistema conservativo como el que hemos explicado, existe una función de fuerzas, de la cual se deducen las componentes de éstas, por derivación con relación á x, y, z.....

2.° Que la llamada función potencial es igual y de signo contrario á la función de fuerzas, y representa en cada momento la energía, almacenada, por decirlo así, en el sistema como si fuera un resorte, y que puede transformarse total ó parcialmente en fuerza viva.

3.° Que en cada momento la suma de la fuerza viva del sistema y de la función potencial es una cantidad constante, que es la energía total intrínseca del sistema.

Este teorema, es decir, el de la conservación de la energía mecánica, á la Mecánica clásica pertenece en rigor, y representa la transformación entre sí de estas dos formas: el trabajo y la fuerza viva.

Pero la Física, en su desarrollo, presenta, al menos en la apariencia, y decimos en la apariencia, admitiendo la hipótesis mecánica, otras diferentes formas de la energía, por ejemplo: la energía calorífica, que se mide por calorías; la energía de las corrientes eléctricas, que se mide por vatios, y otras varias, como la energía magnética y la energía química.

Generalizando el principio de la Mecánica clásica, se obtiene el de la *conservación de la energía en general*; de suerte, que *fuerzas vivas*, *trabajos mecánicos*, *calorias*, *vatios*, *energías luminosas*, *energías magnéticas* y *energías químicas* están dentro del gran principio. Se transforman unas en otras en cantidades fijas: en un sistema aislado, la suma de todas ellas es constante, y todas ellas se miden por una unidad única, el kilográmetro.

Este es el gran principio de la conservación de la energía, volvemos á repetir, que limitado al problema de la Elasticidad, ó sea de las fuerzas elásticas, aplica Mr. Poincaré, como veremos en la conferencia próxima.

XXXI.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia octava.

SEÑORES:

Hemos dado una idea en la conferencia precedente del principio de la conservación de la energía; pero de la energía bajo sus dos formas fundamentales, dentro de la Mecánica clásica, á saber: *el trabajo mecánico y la fuerza viva*, que dan origen á lo que en el leguaje moderno se llama *energía potencial* ó de posición, y *energía actual* ó cinética.

Expusimos dicho principio con cierta generalidad, y hubiéramos podido presentar muchos ejemplos, que supongo que serán familiares á mis oyentes; y ahora, para terminar este punto y para aclararlo si fuese preciso, presentaremos un solo ejemplo vulgar y sencillísimo; á saber: el de una masa, ó si se quiere el de un peso sostenido á cierta altura sobre el suelo.

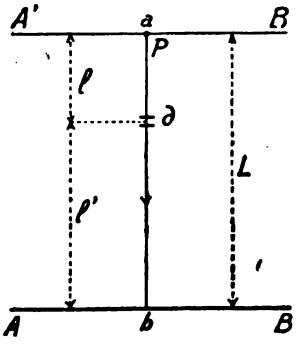


Figura 24.

Sea P (fig. 24) un peso colocado y sostenido en el punto a, el cual se halla á una altura L igual á ab sobre el suelo AB.

La horizontal $A'B'$ que pasa por a, marca una superficie de nivel.

Mientras el peso P está, como decimos, sujeto en a, nada

sucede, ó lo que sucede es un fenómeno en el cual por ahora no hemos de ocuparnos.

El peso P en esta posición, representa un trabajo potencial, cuyo valor es PL, porque cuando lo dejamos caer á lo largo de toda la altura ab hasta llegar al suelo, desarrollará un trabajo, como hemos dicho, igual á PL.

Claro es, que este trabajo potencial, ó mejor dicho, esta energía potencial, es relativa al suelo AB; si dicho nivel estuviera más arriba ó más abajo, la energía potencial sería distinta.

Decimos que es potencial, porque es una energía *en potencia*, no en *acto*, según la fórmula aristotélica, mientras el peso P no se desprenda.

Si se desprende, caerá, y el trabajo que la fuerza P desarrolla, á medida que el cuerpo desciende, se va transformando en fuerza viva. Por ejemplo, cuando llegue á d siendo $ad = l$, habrá desarrollado un trabajo Pl, que se habrá convertido en fuerza viva, y la velocidad v se obtendrá igualando la fuerza viva en d al trabajo hasta dicho punto, es decir,

$$\frac{1}{2} mv^2 = Pl,$$

siendo m la masa que corresponde al peso P.

En este punto d, la masa m representa ó va acompañada de dos formas de la energía:

1.° La energía actual, cinética ó semifuerza viva $\frac{1}{2} mv^2$.

2.° Un trabajo potencial representado por $P \times db = Pl'$, porque al cuerpo le falta caer, y puede caer todavía, desde d á b.

Sumando estas dos energías tendremos la energía total en d, que será:

$$\frac{1}{2} mv^2 + Pl',$$

ó sustituyendo el valor de $\frac{1}{2} mv$

$$Pl + Pl' = P(l + l') = PL,$$

que es la energía total en P.

De modo que aquí vemos, en este ejemplo sencillísimo, que la energía total se conserva, aunque cambiando de forma, mejor dicho, afectando dos formas, á todo lo largo del camino AB.

Del mismo modo que en la conferencia anterior

$$\Sigma \frac{1}{2} mv^2 + \Pi$$

era constante.

***

Hemos visto en la conferencia precedente, tratando el caso de un sistema aislado, que el sistema *era conservativo, cuando las fuerzas internas* se derivaban de una función de fuerzas; es decir, de una función de las coordenadas: así que para cada punto (x, y, z) se tenía

$$X = \frac{dF}{dx}, \quad Y = \frac{dF}{dy}, \quad Z = \frac{dF}{dz}.$$

Y este mismo principio lo podemos presentar bajo otra forma, que es muy importante.

Sea un sistema de puntos (0) (fig. 25), y a uno de estos puntos.

Admitamos, para fijar las ideas, que el sistema en la posición (0) está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas interiores y que no existe ninguna fuerza exterior.

Para cada punto *a* imaginemos una *vía material*, una especie *de carril ab*, para *a'* otro camino material *a' b'*, y así sucesivamente, pues lo que digamos de un punto podemos decir de los demás.

Supongamos que se obliga á recorrer al punto *a* la trayectoria *ab*, llevándolo materialmente por esta especie de conductor.

Si en el punto *c* la acción de los demás puntos está representada por la fuerza *F*, que se opone al movimiento, porque el sistema en la posición (0) estaba en equilibrio, el punto *a*, al llegar á *c* sin velocidad, quedaría en equilibrio si aplicásemos una fuerza φ igual y contraria á *F*.

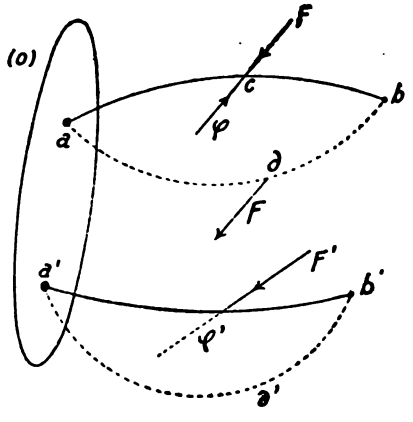


Figura 25.

Y si φ fuera superior á *F*, pero en una cantidad infinitamente pequeña, el punto *c* caminaría hacia *b*, mas con una velocidad siempre infinitamente pequeña.

Pasando al límite, puede decirse, sobreentendiendo estas diferencias infinitamente pequeñas que tienden hacia cero, que una fuerza φ constantemente igual á *F*, que es la fuerza interna, y que durante el movimiento actúa sobre *c*, llevaría á este punto de *a* á *b* sin velocidad; mientras otra fuerza φ' igual y contraria á *F'* llevaría al punto *a'* de *a'* á *b'*, y lo mismo para los demás puntos.

En suma, todos los puntos del sistema *a*, *a'*..... han sido trasladados á *b*, *b'*..... con velocidades despreciables, y el sistema *a*, *a'*..... habrá tomado la posición *b*, *b'*.....; posición que no es en general la que hubiera tomado espontá-

neamente, si se le hubiera hecho salir de su posición de equilibrio, comunicando velocidades á cada uno de los puntos del sistema. Toma el sistema la posición *b*, *b'*..... porque se le fuerza á ir por trayectorias ó carriles determinados *ab*, *a'b'*.....

Las fuerzas φ, φ'..... desarrollarán cierto trabajo desde *a* á *b*, desde *a'* á *b'*.....

Parece que no tenemos en cuenta las guías materiales *ab*, *a'b'*..... ni las fuerzas de reacción que desarrollan, así como el trabajo de dichas fuerzas; pero es porque todos estos trabajos son nulos, atendiendo á que el camino, en cada momento, de cada punto, es normal á la reacción del camino ó guía, y, por lo tanto, la proyección del camino sobre la fuerza es nulo.

Es evidente que suponemos que no existe rozamiento: se trata de guías ideales.

Si abandonamos á sí mismos los puntos del sistema, al llegar á *b*, *b'*..... suprimiendo la acción de las fuerzas φ, todos estos puntos tenderán á volver á sus posiciones de equilibrio *a*, *a'*..... bajo la acción de las fuerzas *F*, *F'*.....

Suponiendo, como siempre podemos suponer, que el sistema no ha llegado á otras posiciones de equilibrio, si las tiene, las fuerzas *F*, *F'*....., al retroceder los puntos hasta sus posiciones iniciales, desarrollarán un trabajo igual y de signo contrario al que desarrollaron las fuerzas φ, φ'..... para llevarlos desde *a*..... á *b*.....

Esto es evidente, porque las *F* son iguales á la φ y tienen la misma dirección, y en cada elemento de tiempo, el elemento de trayectoria es el mismo al ir y al volver.

Lo dicho es evidente y general; pero aquí se presentan dos casos esencialmente distintos, á saber: 1.°, *cuando las fuerzas* F..... *dependen de una función de fuerzas*, en la forma que hemos explicado; ó 2.°, cuando no cumplen con esta condición y el sistema no es conservativo.

De una manera más concisa: cuando

$$X = \frac{dU}{dx}, \quad Y = \frac{dU}{dy}, \quad Z = \frac{dU}{dz} \ldots\ldots$$

y por lo tanto

$$Xdx + Ydy + Zdz =$$
$$= \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz = dU \ldots\ldots$$

siendo $d\,U$ una diferencial total, tenemos el *primer caso.*

Cuando no se verifican estas últimas condiciones, es decir, cuando X, Y, Z..... no son las derivadas de una función de fuerza, el sistema no es conservativo, y estamos en el *segundo caso.*

La diferencia entre uno y otro no es sólo analítica, sino que marca caracteres completamente distintos en la mecánica, respecto á la naturaleza del sistema de puntos que se considera.

En términos prácticos y vulgares, podemos afirmar que *en el primer caso el movimiento continuo no es posible: en el segundo caso si lo es.*

Demostremos este último que acabamos de indicar.

Primer caso. Imaginemos que en vez de obligar á los puntos a, a'..... á seguir las trayectorias ab, $a'\,b'$..... por carriles ideales, les obligamos á seguir otras trayectorias cualesquiera distintas de las anteriores.

El trabajo de las fuerzas F..... entre los puntos a, b; a' b'..... será, como ya hemos demostrado, si representamos por los subíndices (0) y (1) las dos posiciones del sistema,

$$\int_0^1 \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) =$$
$$= \int_0^1 \Sigma\left(\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}\right) = \int_0^1 dU = U_1 - U_0,$$

en que la integral se refiere á la suma de trabajos elementales para todas las trayectorias entre la situación (0) y (1); la Σ expresa la suma de trabajos para todos los puntos del sistema; la U_0 es una función de las coordenadas de todos los puntos a. a'..... y la U_1 es la misma función de las coordenadas substituyendo en ella á las coordenadas generales las de los puntos b, b'.....

Ahora bien; puesto que el trabajo desarrollado por todas las fuerzas F....., que en el ejemplo, que representa la figura, es un trabajo negativo ó de resistencia, sólo depende de U_1 y U_0, es decir, de las coordenadas de los puntos extremos; si hiciéramos el mismo cálculo para otro grupo de trayectorias adb, $a'\,d'\,b'$..... obtendríamos el mismo resultado; toda vez que los puntos extremos permanecen fijos, y sólo de los puntos extremos depende la función U que es el trabajo total.

En suma, sean cuales fueren las trayectorias que describan los puntos a, a'..... para llegar á las posiciones finales b, b'.... el trabajo de las fuerzas F..... será idéntico, ya actúen estas fuerzas sobre la trayectoria acb..... ó sobre las trayectorias adb..... ú otras cualesquiera. Así pues, el mismo trabajo resistente desarrollan las fuerzas internas, que estamos considerando, en este caso de trayectorias forzosas, sean cuales fuesen esas trayectorias para ir el sistema de la posición (0) á la posición (1).

En este caso decimos que el movimiento contínuo es imposible, ó mejor dicho y con más exactitud, que no hay manera de *crear trabajo motor.*

En primer lugar observemos, que como las fuerzas φ, que según explicábamos obligan al sistema á recorrer las trayectorias forzadas, son iguales, contrarias y en la misma dirección de las fuerzas F; luego todo lo que hemos dicho de las fuerzas F podemos aplicarlo á las fuerzas φ.

Y recordemos, para evitar cualquier confusión, que las fuerzas φ, al realizar la hipótesis, han de ser superiores á las fuerzas F, pero en cantidades infinitamente pequeñas, que

en el límite se reducen á cero, para que los puntos móviles no adquieran velocidad; porque si la adquiriesen tendríamos una complicación de las dos fórmulas de la energía: la potencial y la cinética.

Siguiendo con nuestro razonamiento, y suponiendo á las fuerzas φ en el límite rigurosamente iguales, aunque contrarias á las F, lo que hemos dicho de estas últimas podemos decir de las fuerzas φ. Es decir, que estas fuerzas para llevar á los puntos a, a'..... de la posición (0) á la posición (1), desarrollarán el mismo trabajo, sean cuales fueren las trayectorias, con tal que los puntos extremos sean los mismos. Y sólo nos falta, para la demostración, fijarnos en esta circunstancia: que si las fuerzas φ obligan á los puntos á caminar de a á b..... sobre la trayectoria $a\ d\ b$ y cesan estas fuerzas φ, y actúan sin estorbo las fuerzas F, los puntos b. ... volverán á la posición a....., el trabajo que han desarrollado las φ sobre las trayectorias $a\ d\ b$..... á la ida, será igual en valor numérico al que desarrollen las fuerzas F á la vuelta.

Esto es evidente, porque las fuerzas tienen el mismo valor y la misma dirección en cada punto y la trayectoria es la misma.

Pues ahora se ve claramente que, sean cuales fueren los movimientos que hagamos tomar al sistema, nunca por estos movimientos mecánicos y cinemáticos podremos crear trabajo motor.

En efecto; empleando las fuerzas φ, hagamos pasar el sistema de la posición (0) á la posición (1), y supongamos que las fuerzas φ han desarrollado un trabajo que representaremos por T.

Escojamos otro sistema de trayectorias cualesquiera, $a\ d\ b$..... para la vuelta. Suprimamos las fuerzas φ y dejemos que el sistema vuelva de la posición (1) á la posición (0) espontáneamente; es decir, por la acción de las fuerzas internas F, pero siguiendo los caminos $b\ d\ a$.....

Estas fuerzas F desarrollarán un trabajo que, por la hipótesis que hemos establecido, será numéricamente igual al de las fuerzas F sobre la trayectoria $a\ c\ b$, y también igual, y esto es lo que nos interesa, al de las fuerzas φ sobre la misma trayectoria.

Y conste, para abreviar la explicación, que cuando hablemos de la trayectoria $a\ b$ en particular, nos referimos al conjunto de todas ellas $a\ b$, $a'\ b'$....,

El resumen de estos dos movimientos, de este ciclo cerrado, pudiéramos decir, desde (0) á (1) y de (1) á (0), con lo cual el sistema volverá á su posición primitiva, puede formularse de este modo:

Al hacer pasar al sistema de (0) á (1), hemos consumido un trabajo cuyo valor representábamos por T; pero el sistema por su elasticidad propia, ó sea por la acción de sus fuerzas internas, nos ha devuelto este trabajo T al pasar el sistema en cuestión de (1) á (0).

Poco importa la forma de la energía en que nos lo haya devuelto. Lo consumimos en forma de trabajo de las fuerzas φ; nos lo devuelve en forma de trabajo de las fuerzas F sobre la trayectoria $b\ d\ a$, si bien este trabajo en el movimiento espontáneo de retroceso se ha convertido en fuerza viva al llegar el sistema á su posición inicial de equilibrio (0): fuerza viva que tendrán los puntos a, a'..... ó mejor dicho, de semifuerza viva equivalente al trabajo T.

El trabajo T, que aplicamos al sistema por medio de las fuerzas φ, aparece íntegro al terminar la evolución del sistema en forma de fuerza viva, y es natural que así suceda porque el sistema ya no está en sus condiciones primitivas: durante su evolución, las fuerzas φ acumularon sobre él un trabajo T, que es el que se presenta en forma de semifuerza viva al volver el sistema á su posición inicial.

Si considerásemos á este sistema como una máquina que la industria quisiera aprovechar, sean cuales fueren las evoluciones cinemáticas á que le sometiésemos, ni aumentaría

ni disminuiría el trabajo que la aplicásemos. No habría ni aumento ni pérdida de trabajo motor; sería en mayor escala el caso de un péndulo que oscila en el vacío sin resistencias pasivas de ninguna clase.

Segundo caso. Que las fuerzas F no dependiesen de una función de fuerzas; que al pasar el sistema de la situación (0) á (1) por la aplicación de fuerzas φ iguales y opuestas á F, el trabajo desarrollado no dependiera tan sólo de los coordenadas extremas, sino de las trayectorias seguidas.

En esta hipótesis repitamos las operaciones cíclicas del caso anterior.

Tomemos para la ida de *a*..... á *b*..... trayectorias determinadas *a c b*....., y para el regreso, es decir, para cerrar el ciclo, trayectorias *b d a*, en las cuales el trabajo de las fuerzas φ, ó de las fuerzas F, fuese distinto del desarrollado en las primeras trayectorias.

En este supuesto no existirá compensación entre los dos trabajos.

Desde (0) á (1) habremos consumido un trabajo T, y al abandonar el sistema á sí mismo, para que vuelva á su punto de partida por los carriles que marcan las trayectorias de vuelta *b d a*....., las fuerzas internas F desarrollarán un trabajo T' superior, por ejemplo, al primero.

Luego habrá un trabajo $T' - T$ ganado, creado, pudiera decirse.

Si el sistema con sus carriles lo consideramos como una máquina industrial, habremos creado para la industria un trabajo motor $T' - T$, esencialmente positivo, que brotó de la nada, sólo por la evolución cíclica.

El sistema no conserva el trabajo de las fuerzas φ que en él se depositan, sino que lo aumenta; crea algo, y lo crea indefinidamente, lo crea de la nada, como antes decíamos, que es lo que se entiende por *creación.*

En este caso el movimiento continuo sería posible.

La industria en las evoluciones de sus máquinas podría crear trabajo industrial indefinidamente, y haciéndolas marchar en sentido inverso, es decir, de las trayectorias de mayor trabajo á las de trabajo inferior, podría anular la energía existente.

De aquí se deduce que si se admite como postulado que el movimiento continuo es imposible, las fuerzas internas de todo sistema, y en general todas las fuerzas de la naturaleza, deben depender de ciertas funciones de fuerzas para cada caso.

El problema depende, pues, de una especie de postulado metafísico: *es imposible crear trabajo motor.* ó, si se quiere, energía; es imposible tampoco destruirla; la energía, en todo sistema aislado, se conserva íntegra.

O en forma más práctica y más material: el movimiento continuo es imposible.

Esto equivale á decir, en las hipótesis que venimos desarrollando, según acabamos de exponer, y volviendo á nues- problema, que las fuerzas internas de un sistema elástico dependen de una función de fuerzas.

De este principio parte Mr. Poincaré en substitución de la hipótesis de las fuerzas centrales, y este principio nos permitirá expresar las tres componentes X, Y, Z que por la deformación elástica actúan sobre cada punto del sistema en función de

$$U(x, y, z, x', y', z'.....),$$

siendo U una función de todas las coordenadas de los diferentes puntos del sistema elástico.

Porque, en efecto, conociendo U para cualquier punto de los del sistema, las componentes X, Y, Z tendrán la forma

$$X = \frac{dU}{dx}, \quad Y = \frac{dU}{dy}, \quad Z = \frac{dU}{dz}.....$$

y si quisiéramos substituir á la función de fuerzas U la función potencial Π, que sólo difiere de ella en el signo

$$X = -\frac{d\Pi}{dx}, \quad Y = -\frac{d\Pi}{dy}, \quad Z = -\frac{d\Pi}{dz} \ldots\ldots$$

***

Las fuerzas centrales de la Mecánica clásica, las que constituyen la hipótesis predilecta de los matemáticos del siglo XIX, están comprendidas en esta hipótesis general que hemos explicado.

Los sistemas en que las fuerzas internas son todas centrales, son eminentemente conservativos; y, en suma, las derivadas X, Y, Z tienen una función de fuerzas y de ellas se derivan.

Esto se demuestra con facilidad suma.

En efecto, consideremos dos puntos del sistema con las masas m y m', y lo que digamos de estos dos puntos podríamos repetir para todos los pares de puntos del cuerpo de que se trate.

Puesto que las fuerzas son centrales, y por de contado, dependientes de las distancias, cualquier fuerza F tendrá esta forma:

$$F = mm'f(r).$$

Y sus componentes se expresarán, como tantas veces hemos visto, de este modo:

$$X_1 = mm'f(r)\frac{x - x'}{r}, \quad Y_1 = mm'f(r)\frac{y - y'}{r},$$

$$Z_1 = mm'f(r)\frac{z - z'}{r},$$

considerando á $f(r)$ como positiva cuando es una atracción.

Ahora bien, si formamos la siguiente función de r

$$mm' \int f(r)\, dr,$$

que evidentemente será una función de r, $\varphi(r)$, porque siempre existe la integral $\int f(r)\, dr$ podremos escribir, haciendo $\int f(r)\, dr = \varphi(r)$,

$$U_1 = mm' \varphi(r)$$

y esta función U_1 gozará de la propiedad

$$X = \frac{dU_1}{dx}, \quad Y = \frac{dU_1}{dy}, \quad Z = \frac{dU_1}{dz}.$$

En efecto, tendremos, recordando que

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^3$$

$$\frac{dU_1}{dx} = mm' \frac{d\varphi(r)}{dr} \frac{dr}{dx} = mm' f(r) \frac{x - x'}{r};$$

$$\frac{dU_1}{dy} = mm' f(r) \frac{y - y'}{r}; \quad \frac{dU_1}{dz} = mm' f(r) \frac{z - z'}{r}.$$

Si consideramos análogamente la acción de m'' sobre m, llegaremos representando la distancia $m\, m''$ por r_1, y haciendo

$$U_2 = mm'' \int f(r)\, dr_1,$$

á estas relaciones,

$$X_2 = \frac{dU_2}{dx}, \quad Y_2 = \frac{dU_2}{dy}, \quad Z_2 = \frac{dU_2}{dz}.$$

Resultados que pueden generalizarse para las acciones de todos los demás puntos del sistema sobre el punto m.

De manera, que llamando X, Y, Z á las componentes de todas las acciones que ejercen las masas m' m''..... sobre m, podremos escribir

$$X = d\frac{(U_1 + U_2 + U_3.....)}{dx}, \quad Y = d\frac{(U_1 + U_2 + U_3.....)}{dy},$$

$$Z = d\frac{(U_1 + U_2 + U_3.....)}{dz}.$$

Como otro tanto pudiéramos decir para cualquier punto del sistema, se ve fácilmente que el teorema queda demostrado en general, con sólo recordar lo que representan las funciones U.

La función de fuerzas se compondrá de una serie de funciones $m\, m' \varphi (r)$ en que r tomará todos los valores de las distancias de los puntos dos á dos, y m, m', serán las masas colocadas en los puntos extremos.

De modo que, en general, para todo el sistema

$$U = \Sigma\, m_p\, m_q\, \varphi\, (r_{pq})$$

variando p y q de 1 á n, si n es el número de puntos del cuerpo.

Es una suma de funciones, y cada una no contiene más que una distancia r.

Por ejemplo, en el punto m no influirán más que los demás puntos, y la diferenciación por relación á x, y, z darán los resultados anteriores, porque las distancias de otros dos puntos cualesquiera m'', m'''..... á saber:

$$r_{23} = \sqrt{(x'' - x''')^2 + (y'' - y''')^2 + (z'' - z''')^2},$$

no contendrán x y la derivada será nula.

No insistimos más en esta demostración porque es elemental y, además, puede presentarse bajo otras muchas formas.

***

En resumen, en la hipótesis de Cauchy las fuerzas centrales se derivan de una función de fuerzas; pero hay infinitos casos en que no son centrales las fuerzas internas del sistema y la función de fuerzas existe.

Por ejemplo, cuando

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$$

es una diferencial exacta de una función U de x, y, z, x', y', z'.....

El existir una función de fuerzas, hemos visto que es condición intimamente enlazada con la conservación de la energía de un sistema, y en el orden práctico con la imposibilidad de crear trabajo motor, sean cuales fueren los ciclos que el sistema recorra, ó en forma aun más vulgar, con la imposibilidad del movimiento contínuo.

Todos estos resultados son matemáticos y rigurosos, pero sólo para las masas ponderables, y para fuerzas, por decirlo así, abstractas; es decir, para una mecánica ideal, porque no debe olvidarse que hemos partido de las ccuaciones fundamentales de la mecánica clásica:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

.....

las cuales se demuestran para las masas ponderables dotadas de inercia.

Estas ecuaciones y estos resultados, y la ecuación de las fuerzas vivas, y el principio de la conservación de la energía, no resultan en manera alguna demostrados por las consideraciones y cálculos que preceden, ni aun prescindiendo de la hipótesis de las fuerzas centrales, y generalizando esta hipótesis como hace Mr. Poincaré, es decir, sustituyéndola por la hipótesis de la conservación de la energía, cuando no se trata de masas ponderables y cuando no se admite la inercia.

Si en las ecuaciones precedentes m representa una masa ponderable, los resultados á que hemos llegado tienen fuerza y rigor; pero prescindiendo, como acabamos de indicar, de la masa y de la inercia, para los electrones, por ejemplo, sin núcleo ponderable, carecen de fuerza demostrativa y de rigor matemático: más aun, no tienen sentido.

El principio de la conservación de la energía á qne hemos llegado y á que llegó la mecánica clásica, y á que se acomodan las demostraeiones precedentes, suponen como punto de partida las ecuaciones tantas veces citadas de la dinámica, en las que m..... son masas ponderables y dotadas de inercia.

Si así no fuera, todo el edificio matemático, por decirlo de este modo, en que se funda la conservación de la energía, se viene á tierra de un golpe.

La sustitución, por ejemplo, de las masas ponderables m..... por masas eléctricas μ..... no es en manera alguna lícita, y pierden todo su valor los cálculos subsiguientes, y pierde su fuerza matemática el principio de la conservación de la energía.

Cuando se quiere aplicar este principio, como principio teórico, á la electricidad y al magnetismo, por ejemplo, hay que acudir á otros métodos de demostración propios de cada uno de estos ramos de la Física, que es lo que hace Mr. Poincaré en su Termodinámica: obra tan digna de estudio.

El principio de la conservación de la energía se puede considerar como principio experimental, ó como principio teórico, dependiente en este último caso de ciertas hipótesis como punto de partida y luego de la aplicación del cálculo matemático á estas hipótesis.

Si se considera como principio que procede de la experiencia, nada hay que decir sino que en cada orden de fenómenos habrá que comprobarlo experimentalmente; y si la experiencia, como por fortuna sucede, lo comprueba en todos los casos, tendrá un gran valor práctico, pero pesará siempre sobre él la duda del resultado que puedan dar nuevos experimentos.

No había principio más sólido que el de la constancia de las masas, y sin embargo hemos visto que en estos últimos tiempos se ha puesto en duda.

Por el contrario, si el principio de la conservación de la energía, quiere considerarse como principio teórico, al cual determinadas hipótesis han de dar carácter, y necesidad matemática, vemos por lo dicho que no se podrá conseguir este resultado por la aplicación de la mecánica clásica, la cual, como hemos indicado tantas veces, parece que ha sido creada, lo repetiremos una vez más, por sus inmortales creadores, para uso de las masas ponderables dotadas de inercia, no para las masas eléctricas, ni para las corrientes, ni para las masas magnéticas, ni para los electrones sin masa central, ni para todo este mundo de entidades que pululan, por decirlo así, en la física moderna.

De modo que, en resumen, las demostraciones que hemos dado del principio de la conservación de la energía, sólo se aplican á sistemas materiales compuestos de puntos con masas determinadas m, m'..... sujetas á fuerzas, por decirlo así, abstractas: ya explicaremos esta palabra más adelante.

Pero estamos tratando de la teoría de la elasticidad, y, por lo tanto, de cuerpos que tienen masa y que tienen inercia; luego, para éstos, el principio de la conservación de la

energía, á que acude Mr. Poincaré, y la demostración matemática que de este principio hemos dado serán firmes en todo caso, y no estarán sujetos á las novedades de la física matemática moderna.

Prácticamente, y como primera aproximación, no cabe duda, nuestros anhelos hacia lo absoluto, que ya sabemos que nunca se ven cumplidos, porque si se cumpliesen ya no serían anhelos, se ven realizados; pero si estos anhelos ó aspiraciones avanzan unos cuantos pasos, las seguridades matemáticas del principio de la conservación de la energía, no hay que negarlo, perderán alguna parte de su fuerza.

Marchemos, pues, despacio.

***

Parece que en el método de Cauchy no debieran asaltarnos estas dudas. En él no existen más que puntos de masa ponderable *m*..... y fuerzas abstractas.

Y sin embargo, las dudas y las dificultades aquí comienzan, porque las fuerzas entre los puntos materiales *m*, *m'*..... tomados dos á dos, unas veces son positivas ó fuerzas de atracción, otras veces son negativas ó fuerzas de repulsión, y para las posiciones de equilibrio son nulas.

¿Y cómo se explica la variabilidad de estas fuerzas, ó sea de la que llamábamos función de Saint Venant $f(r)$; ó sea la fuerza en función de la distancia?

Si se considera la fuerza como entidad abstracta en este caso, si se prescinde de los sistemas materiales que le han dado origen, no será fácil que nos demos cuenta de estos caprichos de la fuerza, que unas veces es positiva, otras negativa y otras veces nula. Del mundo de las *cantidades*, vendremos á caer al mundo de las *cualidades*, con la agravante inexplicable del cambio de sentido.

Y buscando la explicación de este hecho, daremos, sin poder evitarlo, en esta hipótesis: que los puntos materiales del sistema m, m'..... no son masas homogéneas de materia ponderable, sino masas complejas en que entra el elemento eléctrico, y que por esta razón al variar las distancias varían á la vez el elemento atractivo y el elemento repulsivo, combinándose estas variaciones en una resultante que puede ser nula, positiva ó negativa.

Luego ya en el método de Cauchy aparecen implícitamente, aunque no se tengan en cuenta, todos los elementos de la nueva física.

Lo que hay es que el elemento eléctrico está obscurecido, en cierto modo, por el elemento ponderable, y la fuerza real por una especie de fuerza abstracta y matemática, cuyas variaciones representa en función de la distancia la función de Saint-Venant.

***

Tampoco en el método de Poincaré se tienen en cuenta explícitamente estos elementos varios que constituyen cada elemento material del sistema. Pero se tienen en cuenta al substituir al principio de las fuerzas centrales el principio de la conservación de la energía, como principio experimental de todos los fenómenos naturales, y, por lo tanto, de los fenómenos de la elasticidad.

Desde el momento en que los puntos materiales de un sistema elástico no son homogéneos, las acciones y reacciones entre estos puntos pueden no ser centrales; esto da mayor generalidad al método de Mr. Poincaré y una ventaja evidente sobre los demás métodos clásicos.

Si las componentes X, Y, Z de la fuerza que actúa sobre un punto m tienen una función de fuerza U, y se obtienen por derivaciones de esta función, en estas X, Y, Z, aun refi-

riéndose á las acciones de dos puntos m, m', entrarán las coordenadas de los demás puntos; porque, evidentemente, si U es de la forma

$$U = U(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''.....)$$

la derivada $\frac{dU}{dx}$, por ejemplo, será

$$\frac{dU}{dx} = U'_x(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''.....),$$

que es precisamente lo que debe ser. Pero conviene fijar bien las ideas.

En la hipótesis de las fuerzas centrales, la acción entre dos puntos m, m' no depende más que de las coordenadas de estos dos puntos: por ejemplo, la componente paralela al eje de las x será

$$mm'f(r)\frac{x-x'}{r},$$

ó poniendo el valor de r

$$mm'f\left(\sqrt{(x-x')^2 \quad (y-y')^2+(z-z')^2}\right)\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

expresión en que vemos que, en efecto, no entran más que las coordenadas x, y, z, x', y' z' de los dos puntos m, m'.

En esta atracción ó repulsión parcial, dada la hipótesis de las fuerzas centrales, no influyen ni deben influir las posiciones de los demás puntos, ni por lo tanto, sus coordenadas; porque las posiciones de los puntos restantes en un momento dado, ni alteran la distancia r, que sólo depende de x, y, z, x', y', z', ni alteran las masas m, m', que se suponen invariables.

Pero desde el momento en que estas masas son sistemas

complejos, compuestos, por ejemplo, de masas ponderables y masas eléctricas, la distribución de estas últimas puede alterarse, y esta distribución distinta, esta nueva forma del sistema puede convertir la fuerza central en fuerza no central.

Ambas ideas son correlativas, como hemos explicado en diferentes ejemplos.

El principio de la conservación de la energía, aplicado por Mr. Poincaré al problema de la Elasticidad, implícitamente tiene en cuenta esta circunstancia, y por eso, en las acciones de un elemento sobre otro, entran, no sólo las coordenadas de estos dos puntos, sino las de todos los demás, á lo cual se presta de una manera por demás sencilla el principio de la función de fuerzas ó de la función potencial.

¿Pero no podemos ir todavía más lejos y profundizar todavía más en este análisis?

Seguramente, aunque quizá parezca, como vulgarmente se dice, que esto es pretender afinar demasiado.

Las ecuaciones que vamos á emplear para el equilibrio elástico, aplicando el método de Poincaré, es decir, determinando las fuerzas interiores por medio del principio de la conservación de la energía, serán tan exactas como en el estado actual de la Ciencia pudiera desearse: y otro tanto para las ecuaciones de la dinámica, es decir, para el caso de los movimientos elásticos.

Pero ¿tendrá á nuestros ojos tanto rigor y tanta exactitud matemática como en los tiemoos en que no habían surgido aquellas dudas sobre las masas, las fuerzas, el movimiento y el éter, que hemos explicado en las conferencias que preceden?

De ningún modo.

Ya no podemos considerar á las masas como cuerpos sumamente pequeños de homogeneidad absoluta y sometidos á lo que antes llamábamos fuerzas abstractas; ni siquiera el principio de la conservación de la energía tiene el valor ab-

soluto ó casi absoluto, que la vieja Mecánica pretendía darle, no considerando más que estas dos formas de la energía: el trabajo mecánico y la fuerza viva.

Y sobre todo, en los problemas del movimiento, las dudas se acrecientan, porque las masas y la inercia, que, por decirlo así, las acompaña, ya no son conceptos que se refieren á la materia ordinaria; y si diferentes puntos del cuerpo elástico no están sometidos á fuerzas centrales, nos sentiremos inclinados á pensar, que esto depende de que en dichos elementos materiales entran elementos eléctricos, que por la influencia de los demás puntos del sistema cambian de posición, y, para expresarnos de este modo, descentran las fuerzas.

Pero en este caso, las masas no son puramente ponderables, sino que hay masas ficticias dependientes del movimiento de las masas eléctricas, como explicábamos en otras conferencias.

De suerte que el problema se ensancha y se complica de una manera inmensa.

Digamos, sin embargo, para atenuar estas dudas, que esto supone grandes velocidades en las expresadas masas eléctricas, velocidades que no se alcanzan, ó es de creer que no se alcancen, por regla general, en la vibraciones elásticas.

En suma, aun en este problema de la Elasticidad, una teoría que no abarcase, todos los resultados de la Física moderna, aun siendo la más perfecta, la menos recargada de hipótesis, aun esa sería deficiente.

La elasticidad de las masas ponderables se complicaría con la elasticidad del éter y con las fuerzas eléctricas.

Pero en el terreno práctico, las teorías de la elasticidad, y sobre todo, la de Mr. Poincaré, tienen suficiente grado de rigor supuesto el grado de aproximación que consideramos.

En suma, suponemos que las masas de los diferentes puntos, son las masas ponderables de la Mecánica clásica.

Suponemos, que las acciones entre cada dos puntos mate-

riales puede no ser una fuerza central; pero le dejamos en cierto modo el carácter abstracto que las fuerzas tienen en la antigua Física matemática.

Suponemos, por último, que es aplicable el principio de la conservación de la energía, á los sistemas materiales elásticos, considerando á dicho principio, ya como principio experimental, comprobado prácticamente en los diversos fenómenos de la Naturaleza; ya como principio teórico, demostrado teóricamente en estos diferentes fenómenos, partiendo de la hipótesis que sobre ellos hayamos establecido.

Admitiendo este principio de la conservación de la energía, establecemos: que la fuerza total que actúa sobre cada punto del cuerpo elástico, puede derivarse de una función de fuerzas de tal modo, que las componentes, supondremos con Mr. Poincaré, que son las derivadas de dicha función, con relación sucesivamente á las coordenadas del punto de que se trata, conforme hemos explicado en esta misma conferencia.

En la próxima entraremos ya resueltamente en la explicación del método de Mr. Poincaré, si no es que nuevas tentaciones nos asaltan, separándonos de nuestro objeto y del programa del presente curso.

XXXII.—Observaciones acerca de algunos fenómenos de fototropía.

POR JOSÉ RODRÍGUEZ MOURELO.

Antes de ahora me he ocupado en el estudio de varios cambios invertibles acaecidos á algunos cuerpos mediante la intervención directa de las acciones luminosas; que por tales diputo las variaciones de color que experimentan ciertos sul-

furos de calcio cuando se les somete á intensa iluminación durante corto tiempo (1). Vuelvo á tratar el asunto, que constituye, á mi ver, un interesante capítulo de la fotoquímica, con nuevos datos y de una manera más general, refiriéndome siempre á sistemas inorgánicos, que conceptúo los menos estudiados y conocidos; bien es cierto que en ellos son poco frecuentes los cambios de color debidos á la luz, ya impliquen un fenómeno reversible, ó signifiquen otro linaje de transformaciones químicas no reversibles. Y es mi intento, al presente, contribuir á esclarecer un punto referente, en definitiva, á la velocidad de los cambios de sistemas que constituyen especiales disoluciones sólidas, formadas de materias activas y de diluyentes sencillos, siempre de la misma naturaleza; al cabo casos singulares de un hecho de cierta generalidad, á la contínua muy variado en sus apariencias y que se presenta, de preferencia, en diferentes combinaciones orgánicas, modificables ó transformables mediante las acciones de la luz, rapidísimas unas veces, otras lentas; pero cuyos efectos, á la postre, tradúcense en cambios permanentes, ó momentáneos y periódicos, de las substancias capaces de experimentarlos y que van siendo á cada punto en mayor número y de más variada naturaleza.

Marckwald fué quien observó, acaso el primero, hace ya tiempo, los cambios de color que experimentan algunas substancias orgánicas complicadas, pertenecientes al grupo quinoleico, bajo la influencia de la luz. Trátase de un fenómeno reversible bastante singular, y en realidad poco frecuente, al

---

(1) Véanse *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, tomo I, pág 346-1903.

Ibidem, tomo III, pág. 40-1905.

Archives des sciences Physiques et Naturelles, quatrième periode, tomo XXV, pág. 15. Genéve, 1908.

Acerca del mismo tema he presentado una nota al Congreso que, en Octubre de 1908, celebró en Zaragoza la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias.

que pueden servir de tipo ó modelo aquellas materias, descubiertas por Stobbe, á las cuales el mismo ha denominado *fúlgidos* (1); son cuerpos de naturaleza fenólica, dotados de la propiedad de cambiar de color, del anaranjado al pardo, cuando son iluminados directamente breve tiempo, y luego, en la obscuridad, recobran la coloración primitiva, sin que en ellos sea advertido, á lo menos hasta el mo nento presente, ningún cambio químico. Suelen asimilar este hecho, en cuanto á su mecanismo, á cierta reacción fotoquímica reversible, descubierta por Luther y Weigert, y que consiste en la condensación de dos moléculas de antraceno para formar el diantraceno, cuyo hecho sólo se realiza sometiendo el carburo á las directas influencias de la luz; y es lo curioso que en la obscuridad prodúcese el fenómeno inverso y se regenera el antraceno de un modo regular y sin advertir otras modificaciones, y es de suerte que se considera perfecta reacción fotoquímica reversible.

Bien será advertir que el notabilísimo experimento de la formación del diantraceno por la luz data de 1905; por lo menos esta es la fecha de su publicación (2), y en 1903 he dado á conocer mis primeras observaciones acerca de los cambios de color que experimenta un sulfuro de calcio por la acción de la luz, y que constituyen, en definitiva, un fenómeno de fototropía perfectamente reversible, y no ha llegado á mi noticia, hasta el momento actual, que haya sido señalado ningún otro, de la misma índole, en substancias inorgánicas (3).

Nunca fué considerable el número de hechos semejantes

---

(1) Para mayor ilustración, véase el discurso de Stobbe en la *Sociedad Bunsen* (Viena, Mayo 1908).

(2) *Zeitschrifs für Physikalische Chemie.* Bd. 51. S. 297.-Bd. 53. S. 385.—1905.

(3) *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, tomo I, página 346. -1903.

á los indicados, aun en las épocas en que recibió mayor impulso el interesante estudio de las acciones químicas de la luz; pero no ha mucho, ampliadas las observaciones é inventados nuevos métodos de practicarlas, fué aumentando el catálogo de los fenómenos de fototropía, singularmente en lo que á las materias orgánicas atañe, y vino la necesidad de agruparlos teniendo por criterio su propio mecanismo. En tal sentido se admite la existencia de fototropías reversibles, poco numerosas, en las cuales el cambio de color suele ir acompañado y aun reconocer por causa acciones químicas, más ó menos complejas, pero siempre del mismo carácter de reversibilidad. Otras fototropías son llamadas seudoreversibles, citándose entre ellas, por la más conocida, el cambio de color, del rojo en verde, de las disoluciones de oxalato ferroso en presencia de la luz, y se consideran, con fundamento, verdaderos fenómenos catalíticos (1), en mi entender relacionados, en cuanto á la manera de producirse, con algunos muy particulares de fotoluminescencia. Y se conocen fototropías irreversibles, que son las más frecuentes, y en las que el cambio de color implica necesariamente un cambio químico permanente y fijo, que no puede servir como punto de partida para reproducir el sistema inicial (2).

Conviene partir de la definición de Luther referente á las reacciones fotoquímicas verdaderamente reversibles. En sentir de este investigador son aquéllas ocasionadas por la luz que, en la obscuridad, regeneran totalmente el estado inicial, de tal suerte que el hecho pueda ser repetido á voluntad cuantas veces se quiera. A semejante categoría pertenece el cambio de color de un sulfuro de calcio cuando es sometido

---

(1) Luther und Plotnikow. *Zeitsch f Physikal Chemie* = Bd: 61 S 513 = J 1908.

(2) Werner Mecklenburg. NOTAS ALEMANAS DE QUÍMICA en los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, tomo VI, páginas 249, 298, 446, 495, 529. (Madrid, 1908.)

á fuerte iluminación, empleando la luz blanca del día, y análogo significado tienen otras variantes de coloración, que no pueden ser atribuídas á oxidaciones superficiales, de masas sulfuradas sensibles á la luz y fosforescentes.

Observaré cómo los casos de fototropía, á lo menos en su última fase, si no pueden considerarse frecuentes en las materias inorgánicas, tampoco son de suma rareza y se presentan con caracteres particulares en cada uno. A este propósito pudiera citar la transformación del hidrato SO_4Ni $7H_2O$, clinorómbico, de color verde esmeralda, en el hidrato $SO_4Ni\,6H_2O$, variedad cuadrática, de color azul, efectuada mediante la acción de los rayos solares, á 20° ó 30°; pero el hecho ha sido modernamente puesto en duda (1), y parece que se trata más bien de un fenómeno de eflorescencia, que es peculiar de algunos sulfatos de níquel. Sin embargo, ya Marignac, estudiando el dimorfismo del heptahidrato citado, observó que el paso de los cristales clinorómbicos á la forma cuadrática, con cambío al color azul y pérdida de transparencia, se efectúa á la temperatura ordinaria, sin ser notada variación de peso (2) y por mi propia observación, que ha menester ser confirmada, interviniendo la luz solar, que acelera notablemente la transformación; acaso se trata de un fenómeno de fototropía irreversible, condicionado por el tránsito de una forma cristalina á otra, que parece ser la más estable y definitiva del cuerpo en cuestión.

De aquí no deben inferirse generalizaciones de ninguna especie. Verdad es que á los cambios de color acompañan cambios químicos ó modificaciones moleculares; mas ni esto implica que haya de tratarse siempre de fenómenos de fototropía, ni que las variantes de tono y coloración, debidas á

---

(1) Dobroserdoff. *Journal de la Societé physico-chimique russe*, tomo 32, pág. 300, 1900.

(2) *Recherches sur les formes cristallines*. 1855.

la luz, signifiquen, de continuo, metamorfosis esenciales, por decirlo así, cuando son, no pocas veces, hechos secundarios, y no ha de olvidarse que, en determinados sistemas (oxalato ferroso y oxígeno atmosférico, por ejemplo), la luz es sólo provocadora de la reacción seudoreversible, continuada y acelerada por los que Luther y Plotnikow han llamado, con singular propiedad, *catalizadores fotoquímicos* (1), y pueden serlo cuerpos de muy variada naturaleza.

Punto de partida constante en mis investigaciones ha sido un sistema binario sólido, bastante homogéneo, compuesto de dos partes esenciales: el diluyente, á la continua constituído por el sulfuro de calcio, y el fosforógeno, de variable composición; en ocasiones este último era sencillamente la impureza de las primeras materias empleadas en la obtención del sulfuro, el cual, siendo puro, ni fosforece, ni la luz lo impresiona, ni cambia de color en su contacto. Dos métodos pueden seguirse, en el caso de emplear fosforógenos, para difundirlos en la masa del compuesto cálcico utilizado como primera materia; consiste el primero en la trituración mecánica prolongada de la mezcla, en mortero de porcelana, pulverizando primero, y tamizando y agregando luego el azufre y volviendo á triturar hasta conseguir polvo fino y homogéneo (2). Son buenas materias primeras, según los productos que se pretendan obtener: la cal viva ordinaria, la procedente del oxalato, del nitrato ó de un carbonato precipitado de una sal cálcica con el carbonato amónico ó por el carbonato sódico, la procedente del mármol blanco, la de conchas y los carbonatos, más ó menos puros, desde el Esparto de Islandia, á la creta blanca, lavada y seca.

En el segundo procedimiento, que pudiera llamarse de impregnación, el fosforógeno, que es una sal metálica, se

---

(1) *Las reacciones fotoquímicas seudoreversibles,* loc. cit.

(2) Con 30 por 100 de azufre obtengo siempre excelentes resultados.

emplea disuelto y diluído en agua (1) y con el líquido se humedece el carbonato de calcio muy pulverizado, haciendo una papilla que se deseca á 100° sin dejar de agitarlo, y bien seco se mezcla con el azufre. Tengo por buena la práctica de calcinar en crisol abierto, con acceso de aire y á temperatura muy elevada, el carbonato de calcio, impregnado de la materia activa, hasta convertirlo en cal viva y operar luego como de ordinario con ella (2). Cuando se trata sólo de observar fenómenos de fototropía en las disoluciones sólidas resultantes, se puede prescindir, en muchos casos, de la adición de cuerpos que puedan ejercer oficios de fosforógenos; bastan las impurezas de la cal ordinaria y someras oxidaciones de la masa resultante, para que el hecho se produzca.

Quizá el fenómeno de fototropía por mí señalado sea más general de lo que á primera vista pudiera creerse; valga, para demostrarlo, esta observación. Me ha ocurrido diferentes veces, al exponer á la luz y al aire varios sulfuros de calcio y de estroncio, para que la luz natural directa é intensa los impresionara y experimentaran, al propio tiempo aquel principio de oxidación que he probado ser necesario para que resulten fosforescentes (3), notar un cambio de color en la superficie de la masa extendida sobre una hoja de papel blanco; á la luz difusa es blanquecina ó agrisada; con luz intensa adquiere color rosado, que se acentúa bastante; al cabo de cuatro minutos llega al límite. En la obscuridad ó á la luz difusa, aun en contacto del aire, el nuevo color va desapareciendo y el cuerpo recobra el suyo primitivo. He notado asimismo que los cuerpos susceptibles de presentar el cambio indicado tienen estructura terrosa bien

---

(1) Demuestran los experimentos que las sales más eficaces son los nitratos.

(2) Se evitan las sabidas contingencias de calentar carbonato de calcio en polvo y crisol tapado.

(3) *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris*, tomo 124 página 1.024. (1897.)

marcada, y de ordinario, ó no resultan fosforecentes, ó su luminescencia es de poca intensidad, exceptuándose algunos sulfuros de calcio, que la presentan en grado máximo y son muy impresionables.

Fuera de la composición química, que los separa muchísimo, y de los métodos de obtención, que nada tienen que ver unos con otros, atendiendo á su condición de cuerpos fototrópicos solamente, encuentro ciertas relaciones de semejanza, tocante á la manera de producirse el cambio de color, entre los sulfuros de calcio que he preparado del modo que es dicho y las transformaciones de los fúlgidos de Stobbe, no cuando pasan á productos inestables, engendrando sucesivamente los fotoanhídridos (1), sino en el caso más sencillo de los cambios de color reversibles, de tan fácil observación empleando rayos luminosos de pequeña longitud de onda. Como se trata al cabo de fenómenos y efectos que, á lo menos en lo externo, son idénticos y los provoca el mismo agente, paréceme la semejanza bien justificada, siquiera se concrete dentro de los límites en los cuales no se reconocen transformaciones químicas permanentes (2).

Representan á menudo el hecho de la transformación del antraceno en diantraceno y el fenómeno inverso subsiguiente, considerados tipos de reacciones fotoquímicas perfecta y completamente reversibles, de la manera gráfica siguiente (3):

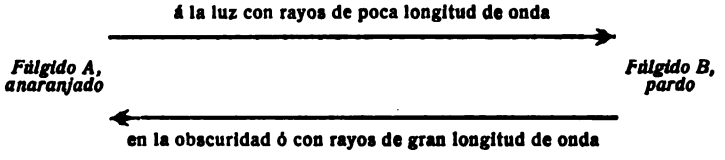
$$\textit{sistema de dos moléculas}\ 2\,C_{14}H_{10} \underset{\text{en la obscuridad}}{\overset{\text{á la luz}}{\rightleftarrows}} C_{28}H_{20}\ \textit{diantraceno;}$$

(1) *Discurso pronunciado en la Sociedad Bunsen. Junta de Viena,* 1908.

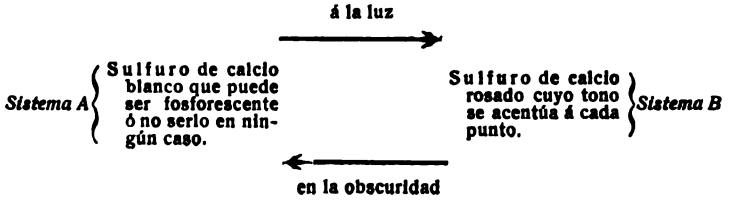
(2) Por ejemplo, las del sistema oxalato ferroso y oxígeno atmosférico.

(3) Véase en las *Notas alemanas de Química (Anales de la Sociedad Española de Física y Química. T. VI, pág. 446 y 495.—1908),* el excelente resumen hecho por el Sr. Werner Mecklemburg.

y de la propia suerte, tratándose de los fúlgidos de Stobbe y partiendo del anaranjado, sin que alcance el cambio fotoquímico la totalidad de su desarrollo, deteniéndose en la fase que se pudiera llamar fototrópica reversible, tendremos por semejanza:



Generalizando el procedimiento ó forma representativa d estos hechos y aplicándolo á la fototropía del sulfuro de calcio, en los casos en que la tengo observada, tendremos:



respondiendo por ventura el fenómeno, en cuanto á su intensidad, á la absorción de determinadas radiaciones fotoquímicas obscuras, que comienzan á desprenderse en cuanto cesa la iluminación directa del cuerpo, pero habiendo realizado en su masa una reacción química reversible, no determinada todavía; más que pudiera ser de la misma clase que las dos anteriores, y de todas suertes nunca muy complicada, pues se trata, á lo sumo, de un sistema binario en el caso de un diluyente S Ca y un fosforógeno activo, por ejemplo, el bismuto.

Según tengo demostrado en anteriores trabajos, que ya quedan citados, pudieran agruparse en dos categorías los sulfuros de calcio que cambian de color por las acciones de la luz, comprendiendo en la primera los que son, á la vez,

fototrópicos y fosforescentes, y en la segunda los que únicamente son fototrópicos. No es posible, de momento, establecer distinciones más concretas, ni asegurar, de modo positivo, cómo resultarán los productos luego de haber calentado, al rojo vivo durante algunas horas, siguiendo lento enfriamiento, las mezclas de cuya reacción provienen los sulfuros de calcio; esto no obstante, el examen de la naturaleza de las primeras materias, las condiciones de la temperatura y la misma constitución del sistema de la disolución sólida resultante, proporcionan algunos elementos que contribuyen al esclarecimiento del problema, y aunque así no fuera, las circunstancias apuntadas adquieren, por sí mismas, bastante interés para ser tenidas en cuenta.

Hay que notar—y es ya una primera relación que pudiera señalarse entre las dos categorías de cuerpos indicadas—que los sulfuros de calcio puros nunca resultan ni fosforescentes, ni fototrópicos; son absolutamente inertes respecto de las acciones de la luz (1), y así lo tengo demostrado con suficientes experimentos: se han menester, por lo tanto, primeras materias preparadas adrede incorporando en ellas y difundiendo con uniformidad en su masa, valiéndose de los métodos que quedan descritos, cantidades pequeñísimas de compuestos metálicos de variada naturaleza, que hacen oficios de fosforógenos (2) sino aprovechan para tales menesteres las impurezas de aquéllas, cuando su proporción no es considerable, ni consisten en cuerpos capaces de formar con el azufre que se agrega sulfuros negros ó de color pardo obscuro, á la temperatura de constitución de las disoluciones sólidas activas (3). Y esta condición es común

(1) *Archives des Sciences Physiques et Naturelles*, tomo XXV, página 15, Genéve, 1908.

(2) Basta emplear 0,001 gramos de cualquiera de los nitratos de cobre, bismuto, cobalto, níquel ó manganeso.

(3) En este concepto la presencia del hierro es en extremo perjudicial y resultan masas obscuras inertes.

para los sulfuros de calcio de las dos categorías antedichas y quizá más precisa todavía de aquellos que presentan, con la intensidad máxima, el fenómeno de la fotoluminescencia.

Tiene menos relación con la fototropía la temperatura á que son obtenidos los sulfuros de calcio que la presentan, que con la fosforescencia, en cuanto, además, ésta se pierde por el calor, y aquella facultad permanece invariable. Con todo, á pesar de haber practicado numerosos y variados experimentos referentes al caso, hasta ahora no me ha sido posible determinar la ley que rige las dependencias de la temperntura de obtención de los cuerpos estudiados y el fenómeno del cambio de color cuando se exponen á la luz, y sólo he logrado, en cuanto al particular, confirmar, con otros nuevos, los resultados de experimentos anteriores, y en vista de la variabilidad de esta y otras circunstancias del fenómeno, establecer su individualidad, dependiente cada vez de condiciones de momento, que acaso sean secundarias respecto de la formación de los sistemas binarios fosforescentes.

Intenté apreciar numéricamente la fototropía de sulfuro de calcio, ya que había demostrado su constancia y persistencia en cada uno de los ejemplares de ella dotados y el peculiar mecanismo del hecho, me pareció, en el primer momento, base segura para lograrlo, siquiera con una aproximación racional. Guardando, durante muchos días, varios de estos sulfuros fototrópicos, cada uno en su frasco bien cerrado, en lugar poco iluminado, y llevándolos juntos rápidamente á la luz directa, es hasta posible, con alguna práctica, apreciar el comienzo del cambio de color; aparece primero rosado muy claro, no tarda en acentuarse, y al cabo de algunos instantes, sin que haya sensibles diferencias de unos ejemplares á otros, y sean los que quieran los métodos de obtención, adquiere la intensidad máxima con marcados tonos violáceos, sin que pase este límite permaneciendo por tiempo indefinido sometidos á las directas acciones

de la luz, que no penetran la masa de los cuerpos, en cuanto la variación del color es únicamente superficial. Llevados á la obscuridad, prodúcese al momento el fenómeno inverso, y bastan cuatro ó cinco minutos para que todos los sometidos al ensayo recobren su primitivo color blanco. Repetido el experimento muchas veces, y cambiando en todos la manera de realizarlo, he visto siempre la misma uniformidad, fuera cualquiera el método de obtención de los sulfuros de calcio fototrópicos, no influyendo tampoco para nada la condición de ser fosforescentes, y algunos de ellos con intensidades máximas y sobremanera excitables.

Una particularidad es de notar respecto de los sulfuros de calcio fototrópicos, y se refiere á su estructura. Mientras que la de cuantos son sólo fosforescentes es, salvo raras excepciones, granujienta y su masa tiene aspecto más ó menos escoriforme, como agregado de pequeñísimos granos muy adheridos unos á otros, lo cual les da cierta dureza, la de éstos en que me ocupo es de contínuo terrosa y se disgregan con cierta facilidad; los primeros pierden bastante de su sensibilidad y hasta llega á anularse y no son entonces fosforescentes, cuando se les pulveriza; los segundos conservan la cualidad de variar de color, aun cuando se reduzcan á polvo finísimo. En cambio la luminescencia, por *autoexcitación*, es siempre de toda la masa y la fototropía se limita á la superficie en contacto inmediato con la luz.

Juzgo, aunque de momento no pueda determinar su naturaleza, ni aventurar hipótesis acerca de su mecanismo, que se trata de una acción química directa de la luz y no de oxidensiones pasajeras, en cuanto la fototropía del sulfuro de calcio se produce en atmósferas de gases inertes, siendo la única condición que no contengan humedad ni anhídrido carbónico. Además, los fenómenos de fototropía por oxidación, son limitados, y, en general, pertenecen á la clase de los seudoreversibles, y en los que he estudiado la reversibilidad es completa y entra de lleno en la definición de Luther; por

eso, sin aventurar conjeturas demasiado atrevidas, me inclino á pensar que el nuevo fenómeno acaso pudiera asimilarse, en ciertos respetos, á los de fotoluminescencia; pues, al cabo, prodúcese en sistemas análogos y tiene caracteres muy semejantes, y sobre todo los determina identica condición. En el sistema de las disoluciones sólidas fosforescentes parece demostrado que, al impresionarlas la luz, provoca reacciones químicas entre el sulfuro diluyente y la materia activa del fosforógeno, y á ello débese la absorción de energía luminosa, que en la obscuridad es emitida, mientras se efectúan, con mayor ó menor velocidad, las reacciones inversas y el sistema torna al estado inicial. No es otro el mecanismo de la fototropía, á lo menos en lo externo, y la diferencia reside en que lo que en un caso es emisión de luz en la obscuridad, en el otro caso es variación de color á la luz directa y en los dos acciones fotoquímicas perfectamente reversibles.

Madrid, Febrero 1909.

XXXIII.—Remarques sur diverses courbes planes.

[*Lettre adressée à M.L. Torres y Quevedo.*]

PAR MAURICE D'OCAGNE.

Paris, le 21 Mars 1909.

Mon cher ami: A la suite d'un de nos récents entretiens, vous avez bien voulu m'inviter à vous signaler quelques additions, tirées de mes propres travaux, qui pourraient être faites à l'important *Catálogo general de curvas* de M. J. de Vargas y Aguirre, ouvrage, au reste, fait avec infiniment de conscience et de soin, et témoignant d'une érudition peu commune.

Cette lettre a pour but de vous faire connaitre ces additions que je limite, d'ailleurs, à quelques points principaux. Je les rangerai dans deux catégories suivant qu'elles se rapportent à des articles déjà existants dans l'ouvrage de M. de Vargas (1), ou qu'elles seraient de nature à y faire introduire de nouveaux articles.

I

ACUERDO Ó ACORDADA.—Pour le raccordement de deux droites par deux arcs de cercle touchant ces droites en des points donnés *A* et *B* et se raccordant entre eux en un point *M*, j'ai donné la solution la plus générale dans les *Nouv. Ann. de Math.* (3.e série, T. XVII, 1898, p. 314), solution qui se trouve reproduite dans mes *Leçons sur la Topométrie* (1904, p. 114). Cette solution repose sur ce triple théorème, à savoir que *lorsque l'on fait varier les cercles de raccordement, les points* A *et* B *restant fixes, le lieu du point* M, *l'enveloppe de la tangente commune en* M *et l'enveloppe de la droite des centres sont trois cercles concentriques, le second de ces cercles étant d'ailleurs tangent aux deux droites données.*

On déduit également de là la solution la plus générale du problème de l'anse de panier *(carpanel)* à trois centres, solution à laquelle Mannheim était parvenu de son côté sans avoir eu connaissance du théorème ci-dessus que j'avais trouvé longtemps auparavant.

CATENARIA.—Dans les applications où l'on fait usage de la chainette on n'en utilise qu'un arc d'assez faible amplitude de part et d'autre du sommet. On a, dès lors, recours, pour son tracé à la *parabole* qui a, en ce sommet, un *contact*

---

(1) Les renvois à ces articles sont indiqués par leurs titres en espagnol tels qu'ils figurent dans l' ouvrage en question.

du troisième ordre avec la courbe. J'ai fait remarquer (*Ann. des Ponts et Chaussées*, 1er trim. 1905, p. 243) que l'on obtenait une approximation bien supérieure en utilisant l'*ellipse* qui a, en ce sommet, avec la chainette un *contact du cinquième ordre*, ellipse dont la détermination est tout aussi simple que celle de la parabole précédente. Cette détermination repose, en effet, sur le théorème que voici: *le demi grand axe de cette ellipse* (dirigé naturellement suivant l'axe de la chainette) *est égal au triple du paramètre de la chainette, et les extrémités du petit axe forment avec le sommet de la courbe un triangle équilatéral.*

Dans les applications à l'art de l'ingénieur on peut considérer que l'abscisse du point extrême de l'arc de chainette utilisé par rapport au sommet ne dépasse pas 0,4 du paramètre a. Or, pour cette valeur de l'abscisse l'excès de l'ordonnée de la chainette sur celle de la parabole osculatrice est de $0{,}00107a$, tandis que son excès sur l'ordonnée de l'ellipse en question n'est que de $-0{,}00002\,a$, ce qui, pratiquement, est tout à fait négligeable. Par exemple, pour $a = 100^{m}$ (auquel cas la portée est de 80^{m}) le premier écart atteint 107^{mm} alors que le second n'est, que de 2^{mm}.

Par la même occasion je rappellerai que j'ai fait connaître la construction de la conique ayant un contact du quatrième ordre avec une courbe quelconque en un quelconque de ses points (*Nouv. Ann. de Math.*, 3e série, T, XVI, 1897, p. 252).

CÍRCULO. — *Rectificación.* — Soit pour rectifier un arc de cercle, soit pour effectuer la construction inverse, c'est à dire, porter sur un cercle donné un arc de longueur donnée, le théorème suivant (*Nouv. Ann. de Math.*, 4e série, T. VII, 1907, p. 1) fournit une solution suffisamment approchée pour que l'erreur commise soit pratiquement négligeable: *Si le point* M *est pris sur la corde* AB *de façon que* $AM = \frac{2}{3}AB$ *et si le rayon passant par le point* M *coupe l'arc* AB *au point*

P, *on a: corde* AP $= \frac{2}{3}$ *arc* AB avec une erreur relative qui n'atteint 0,00001 que vers 20°, 0,0001 que vers 40° et 0,001 que vers 70°.

CÓNICAS POLARES RECÍPROCAS.—En cherchant dans quels cas deux courbes peuvent être á la fois *polaires réciproques* et *homologiques* j'ai reconnu (*Bull. de la Soc. Math. de France*, T, XIII, 1885, p. 204) que cette circonstance n'avait lieu que pour *les coniques bitangentes à la conique directrice de la transformation polaire.* L'axe et le centre d'homologie sont alors constitués par la corde des contacts et son pôle.

II

ADJOINTES INFINITÉSIMALES.— Si les points d'une courbe C_1 sont liés à la fois aux points et aux tangentes d'une courbe C de façon que les éléments infinitésimaux d'ordre n de C dépendent de ceux d'ordre $n-1$ de C_1, cette courbe C_1 est dite une adjointe infinitésimale de C.

Le caractère géométrique que doit offrir la définition d'une telle adjointe est approfondi dans les *Nouv. Ann. de Math.* (3.e série, T. XIX, 1900, p. 219.—Voir en particulier p. 222 et 223.)

Parmi ces adjointes infinitésimales, il convient de signaler spécialement l'*adjointe des directions normales.* (*Jorn. de sc. math., phys. e naturaes,* 1.a série, T. XII, 1888, p. 193, et 2.e série, T. II, 1892, p. 227.—*Amer. Journ. of Math.*, T. XI, 1889, p. 55 et T. XIV, 1892, p. 227), lieu des points de rencontre des rayons vecteurs de la courbe C issus d'un pôle O et des parallèles aux normales correspondantes menées par un second pôle O_1. Cette adjointe fournit cette construction bien simple du centre de courbure répondant à tout point de la courbe C:

Par le point N *où la normale en* M *à la courbe* C *rencontre la droite* OO_1 *on mène à la tangente en* M *à la courbe* C *une parallèle qui coupe le rayon vecteur* OM *en* P. *La parallèle menée par* P *à la tangente en* M_1 *à l'adjointe* C_1 *passe par le centre de courbure répondant au point* M.

Si la courbe C est une conique de centre O, ayant un axe dirigé suivant OO_1, l'adjointe C_1 est une droite perpendiculaire à OO_1 et la construction précédente redonne alors, à titre de cas très particulier, la construction classique de Mannheim pour les centres de courbure des coniques.

Une autre adjointe infinitésimale particulièrement intéressante à considérer est celle dite *polaire* qui est constituée par le lieu des extrémités des sous-normales polaires, c'est à dire, par le point M_1 de rencontre de la normale en M à la courbe C et de la perpendiculaire élevée par le pôle O au rayon vecteur OM.

Cette adjointe donne, pour le centre de courbure en tout point de C, la construction suivante:

Si le rayon vecteur OM *coupe respectivement en* H *et en* N_1 *la perpendiculaire élevée en* M_1 *à la normale* MM_1 *et la normale à l'adjointe* C_1, *le centre de courbure répondant au point* M *est sur la droite joignant le point* H *au milieu de* $M_1 N_1$.

J'ai déduit de là, dans mon *Cours de Géométrie descriptive et infinitésimale* (p. 288) une construction bien simple du centre de courbure de la podaire d'une courbe quelconque.

ISOMÉTRIQUES.—Par rapport à un système quelconque de courbes planes T, dépendant d'un paramètre, les courbes C et C_1 sont dites *isométriques* si les arcs des courbes C et C_1 compris entre deux quelconques des courbes T ont même longueur. *(Bull. de la Soc. math. de France*, T. XIII, 1885, p, 71.)

Il est particulièrement intéressant d'étudier les isométriques d'une droite par rapport à certains systèmes simples de lignes T, et notamment par rapport à un système de

droites concourantes. J'ai traité à fond ce dernier problème qui dépend des fonctions elliptiques (*Loc. cit.*, p. 75) et j'ai fait connaitre quelques propriétés géométriques des courbes remarquables ainsi obtenues (même recueil, T. XVII, 1889, p. 171). J'ai encore étudié un autre cas curieux d'isométrie (*Nouv. Ann. de Math.*, 3.e série, T. X, 1891, p. 82) entre une droite et une courbe transcendante appartenant à la classe de celles que Sylverter a appelées *syntractrices*.

Veuillez agréer, mon cher ami, la nouvelle expression de ma bien cordiale sympathie.

XXXIV.—Deducción elemental de una condición análoga á la de Arnold para la posibilidad de una buena conmutación en las máquinas eléctricas provistas de colector.

POR ESTEBAN TERRADAS.

Se supone que la escobilla no tiene mayor ni menor contacto con el conmutador que el espesor de una delga. El conjunto de conductores lineales en una máquina eléctrica provista de colector, puede reducirse á los indicados en el adjunto esquema (fig. 1).

En él,

r es la resistencia de la bobina que se halla en corto-circuito, y cuyo coeficiente de autoinducción llamamos l.

$2R_1$ es la resistencia de todas las bobinas del inducido puestas en serie, descontada la de las bobinas en corto circuito. Al coeficiente de autoinducción correspondiente lo llamamos $2L_1$.

R_2 figura la resistencia de la línea cuyo coeficiente de autoinducción sea L_2.

r_1 representa la resistencia entre la escobilla y el punto A.

r_2 la resistencia entre la escobilla y el punto B.

Se supone que el inducido y el colector giran en el sentido de la flecha. Como las superficies de las delgas d_1 y d_2 en contacto en un instante dado con la escobilla, varían con el tiempo, las resistencias r_1 y r_2 son funciones del tiempo.

La autoinducción L_1 del inducido, unida á la L_2 de la línea, se opondrá á las variaciones de corriente del circuito constituido por las resistencias r, r_1 y r_2 tales, que tiendan á variar la intensidad I_1 que atraviesa R_1, ó la I_2 que atraviesa la línea. En lo que sigue, supondremos, apoyados en lo que acabamos de decir, que las variaciones de I_1 ó I_2 son pequeñas, comparadas con las de las otras intensidades del circuito, á las que llamamos i, i_1 y i_2, indicando el subíndice las resistencias que atraviesan.

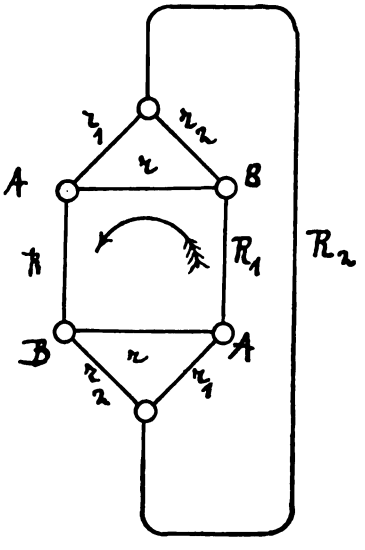


Figura 1.ª

Si T representa la duración de la conmutación en una bobina, y t el tiempo contado desde que aquélla empieza, s la superficie de contacto máxima entre una delga y la escobilla y ρ la resistencia especial que existe en el tránsito de la delga á la escobilla, se tendrá

$$r_1 = \frac{\rho T}{T - t} + \rho_1,$$

$$r_2 = \frac{\rho T}{t} + \rho_2,$$

siendo ρ_1 y ρ_2 las resistencias de los conductores que unen las bobinas á las delgas, más la de las delgas.

Las leyes de Kirchhoff, aplicadas á la red indicada en la figura, conducen á las siguientes ecuaciones:

$$i_1 = I_1 + i$$

$$i_2 = I_1 - i$$

$$I_2 = i_2 + i_1 = 2I_1$$

$$\left.\begin{aligned} & ri + L\frac{di}{dt} + r_1 i_1 - r_2 i_2 - e = 0, \\ & R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + r_2 i_2 + R_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + r_1 i_1 - E = 0; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

siendo e y E las fuerzas electromotrices que se desarrollan en la espira ó bobina conmutada y en las restantes de cada rama del inducido respectivamente por la influencia del campo en que se mueve aquél.

Es de observar que la densidad de la corriente que atraviesa el contacto entre la escobilla y la delga, vale

$$\delta = \frac{i_1 T}{s(T-t)}.$$

Cuando cesa la conmutación, i_1 es cero, y $i = -I_1$. Si suponemos, como ya antes hemos dicho, que las variaciones de I_1 son exiguas comparadas con las de i_1 ó i, se tendrá:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{di}{dt}.$$

Cuando i_1 valga cero,

$$\left(\frac{0 - i_1}{T - t}\right)_{t=T} = \left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=T};$$

y será la densidad δ para $t = T$:

$$(\delta)_{t=T} = -\frac{T}{s}\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=T}. \qquad (2)$$

La primera condición para una buena conmutación es que δ no alcance en el instante final valores elevados. En lo que sigue vamos á deducir la condición que debe cumplirse para ello.

Las ecuaciones (1) se pueden transformar en las dos siguientes:

$$(r + r_1 + r_2)\, i + I_1(r_1 - r_2) + L\frac{di}{dt} = e,$$

$$I_1(R_1 + 2R_2 + r_1 + r_2) + (r_1 - r_2)\, i + (L_1 + 2L_2)\frac{dI_1}{dt} = E,$$

ó bien

$$\frac{r + r_1 + r_2}{L}\, i + \frac{r_1 - r_2}{L}\, I_1 + \frac{di}{dt} = e,$$

$$\frac{R_1 + 2R_2 + r_1 + r_2}{L_1 + 2L_2}\, I_1 + \frac{r_1 - r_2}{L_1 + 2L_2}\, i + \frac{dI_1}{dt} = E.$$

Sumando estas dos ecuaciones y haciendo caso omiso de $\frac{dI_1}{dt}$ al lado de $\frac{di}{dt}$, queda

$$\frac{di}{dt} + i\left[\frac{r_1 - r_2}{L_1 + 2L_2} + \frac{r + r_1 + r_2}{L}\right] +$$

$$+ I_1\left[\frac{r_1 - r_2}{L} + \frac{R_1 + 2R_2 + r_1 + r_2}{L_1 + 2L_2}\right] - [E + e] = 0 \quad (3)$$

Pongamos $T - t = \tau$, y hagamos caso omiso de τ cuando entra en la forma $I + \tau$ ó $T - \tau$, con lo cual las condiciones

que obtengamos sólo serán valederas para instantes t próximos á T; es decir, para cuando la conmutación acaba, momentos que son los que más interesan.

Se tiene de este modo:

$$r_1 - r_2 = \rho_1 - \rho_2 + \rho T\left[\frac{1}{\tau} - \frac{1}{T}\right] = \rho_1 - \rho_2 + \frac{\rho T}{\tau},$$

$$r_1 + r_2 = \rho_1 + \rho_2 + \frac{\rho T}{\tau}.$$

Y con esto la fórmula (3) puede escribirse:

$$-\frac{di}{d\tau} + i\left[\frac{\rho_1 - \rho_2}{L_1 + 2L_2} + \frac{r + \rho_1 + \rho_2}{L} + \frac{\rho T}{\tau}\left[\frac{1}{L} + \frac{1}{L_1 + 2L_2}\right]\right]$$

$$+ I_1\left[\frac{\rho_1 - \rho_2}{L} + \frac{R_1 + 2R_2 + \rho_1 + \rho_2}{L_1 + 2L_2} + \frac{\rho T}{\tau}\left[\frac{1}{L} + \frac{1}{L_1 + 2L_2}\right]\right] - (E + e) = 0.$$

Como analizamos los valores de i y su derivada respecto á τ, para valores de t próximos á T, podemos hacer caso omiso de las variaciones de E y e, considerando á estas cantidades como constantes. Si para simplificar escribimos

$$\frac{\rho_1 - \rho_2}{L_1 + 2L_2} + \frac{r + \rho_1 + \rho_2}{L} = A,$$

$$\rho T\left[\frac{1}{L} + \frac{1}{L_1 + 2L_2}\right] = M,$$

$$MI_1 = N,$$

$$I_1\left[\frac{\rho_1 - \rho_2}{L} + \frac{R_1 + 2R_2 + \rho_1 + \rho_2}{L_1 + 2L_2}\right] = B,$$

$$B - (E + e) = C,$$

la ecuación última se podrá escribir

$$-\frac{di}{d\tau}+i\left[A+\frac{M}{\tau}\right]+\frac{N}{\tau}+C=0,$$

ó bien poniendo

$$iM+N=yM; \qquad P=C-\frac{AN}{M}.$$

$$-\frac{dy}{d\tau}+y\left[A+\frac{M}{\tau}\right]+P=0.$$

Para resolver la ecuación anterior se puede escribir $y=uv$, con lo que se convierte en

$$-u\frac{dv}{d\tau}+v\left[-\frac{du}{d\tau}+u\left[A+\frac{M}{\tau}\right]\right]+P=0.$$

Podemos disponer de u, de modo que

$$-\frac{du}{d\tau}+u\left[A+\frac{M}{\tau}\right]=0,$$

y aún quedará para determinar v la ecuación

$$-u\frac{dv}{d\tau}+P=0.$$

El valor de u, que cumple con la condición impuesta, es

$$u=\tau^{M}e^{A\tau}.$$

Con este valor,

$$v=P\int\tau^{-M}e^{-A\tau}d\tau+K,$$

siendo K una constante.

El valor de $y = u\,v$, será

$$y = \tau^{M} e^{A\tau}\left[P\int \tau^{-M} e^{-A\tau}\,d\tau + K\right];$$

de donde

$$\frac{dy}{d\tau} = \tau^{M} e^{A\tau}\left[P\tau^{-M} e^{-A\tau}\right] + \left[P\int \tau^{-M} e^{-A\tau}\,d\tau + K\right]$$

$$\left[M\tau^{M-1} e^{A\tau} + A\tau^{M} e^{A\tau}\right] = P + K\left[M\tau^{M-1} e^{A\tau} + A\tau^{M} e^{A\tau}\right] +$$

$$+ P\int \tau^{-M} e^{-A\tau}\,d\tau\left[M\tau^{M-1} e^{A\tau} + A\tau^{M} e^{A\tau}\right].$$

Vamos á considerar por separado las dos expresiones

1.ª $\qquad M\tau^{M-1} e^{A\tau} + A\tau^{M} e^{A\tau}$

y

3.ª $\qquad P\int \tau^{-M} e^{-A\tau}\,d\tau\left[M\tau^{M-1} e^{A\tau} + A\tau^{M} e^{A\tau}\right].$

Para que la primera no alcance un valor infinito para $\tau = 0$, es preciso que

$$M > 1. \qquad (4)$$

La segunda se compone de otras dos:

$$X = MP\tau^{M-1} e^{A\tau}\int \tau^{-M} e^{-A\tau}\,d\tau$$

y

$$Y = AP\tau^{M} e^{A\tau}\int \tau^{-M} e^{-A\tau}\,d\tau.$$

La primera, X, para $\tau = 0$ y $M > 1$ se presenta en la forma

$$0 \times \infty.$$

Su verdadero valor es:

$$X = \frac{MP\tau^{-M} e^{-A\tau}}{-(M+1)\tau^{-M} e^{-A\tau} - A\tau^{-(M+1)} e^{-A\tau}} =$$

$$= \frac{MP}{1 - M - A\tau} = \frac{MP}{1 - M},$$

y tiene, por tanto, un valor finito para $\tau = 0$.

También Y se presenta en la forma $o \times \infty$ para $\tau = 0$; su verdadero valor es

$$Y = \frac{AP\tau^{-M} e^{-A\tau}}{-M\tau^{-M-1} e^{-A\tau} - A\tau^{-M} e^{-A\tau}} = \frac{-AP}{\frac{M}{\tau} + A} = 0,$$

luego Y se anula para $\tau = 0$.

Resulta de lo dicho, que lo primero que se necesita para una buena conmutación es que

$$M > 1.$$

Restableciendo el valor de M,

$$\rho T \left[\frac{1}{L} + \frac{1}{L_1 + 2L_2} \right] > 1. \qquad (5)$$

Se ha observado que multitud de máquinas funcionan sin

chispas, á pesar de que no se cumple en ellas la condición de Arnold:

$$\rho \frac{T}{L} > 1;$$

acaso podría explicarse tal circunstancia por deber cumplirse la condición (5) que no excluye

$$\rho \frac{T}{L} < 1.$$

XXXV.—Los principios fundamentales de la Mecánica racional.—Un primer capítulo de mecánica.

(Continuación).

III.—Fuerza y masa.

17. **Diversas aceleraciones de un mismo móvil.**—Con los elementos de juicio ya conseguidos para medir intensidades de las fuerzas por sus efectos estáticos, reanudemos el estudio y comparación de los dinámicos, para hallar la ley general de su producción. Tomemos un cuerpo A_1 suficientemente pequeño para poderlo imaginar reducido á un punto material, y sometámoslo á una fuerza dada en condiciones de poder medir con suficiente aproximación la aceleración del movimiento que se origine (*). Registrado el número obtenido, repitamos la operación sobre el mismo cuerpo, empleando una nueva fuerza, y midamos la nueva aceleración. Se observa, comparando *las aceleraciones* entre sí, que *son*

(*) Las fuerzas constantes son las que mejor se prestan á estas experiencias.

proporcionales á las intensidades de las fuerzas. Siendo, pues, F′, F″ las intensidades y j'_1, j''_1 las aceleraciones, podremos escribir

$$\frac{F'}{F''} = \frac{j'_1}{j''_1}.$$

Como este resultado se reproduce siempre operando con fuerzas cualesquiera, podremos sentar la siguiente *ley general:*

Las aceleraciones de los movimientos producidos por fuerzas distintas obrando separaradamente sobre un mismo móvil, son proporcionales á las intensidades de estas fuerzas.

Tenemos así relacionados los efectos estáticos que miden las intensidades con los dinámicos medidos por las aceleraciones, supuestas las distintas acciones ejercidas sobre el mismo móvil. Siendo, por consiguiente, F′, F″..... F^l..... las intensidades de varias fuerzas, y j'_1, j''_1..... j^l_1..... las aceleraciones de los movimientos que producen sobre un mismo móvil A_1, podremos escribir la serie continua de razones iguales

$$\frac{F'}{j'_1} = \frac{F''}{j''_1} = \ldots\ldots = \frac{F^l}{j^l_1} = \ldots\ldots = m_1, \qquad (3)$$

llamando m_1 la razón común de cada fuerza á su aceleración respectiva.

Escolio. Esta importante proposición, que acabamos de sentar como resultado experimental, puede mirarse también como consecuencia del postulado segundo. Para verlo así, llamemos n la razón F′ : F″, é imaginemos la fuerza F′ como formada por la superposición de n fuerzas iguales á F″ (*); cada una de éstas deberá producir sobre el móvil A_1 una aceleración igual á j_1'', y en virtud de dicho postulado, el

(*) Si supusiéramos F′ y F″ inconmensurables entre sí, el método bien conocido de los límites conduciría á la misma conclusión.

efecto de F′ se obtendrá sumando los de cada una de dichas F″, es decir, tomando n veces la j_1'', puesto que se hallan superpuestas. Se tendrán así las dos expresiones

$$F' = nF'', \qquad j'_1 = n\,j''_1,$$

de las que resulta

$$\frac{F'}{F''} = \frac{j'_1}{j''_1}.$$

18. **Diversas aceleraciones debidas á una misma fuerza. Masa.** — Supongamos repetidas las anteriores operaciones con un segundo móvil A_2 y con las mismas fuerzas; las razones (3), para esta segunda serie, darán

$$\frac{F'}{j'_2} = \frac{F''}{j''_2} = \ldots\ldots \frac{F^l}{j''_l} = \ldots\ldots = m_2.$$

En general, las razones m_1 y m_2 serán diferentes, según la naturaleza y condiciones de los móviles A_1 y A_2. De consiguiente, estos números m_1 y m_2 miden las capacidades de dichos móviles para obedecer á las acciones dinámicas, por consecuencia de sus diversas naturalezas físicas, apareciendo así un nuevo elemento cuantitativo: el de *la razón constante de todas las fuerzas posibles á las respectivas aceleraciones de los movimientos que tales fuerzas originan, al obrar sobre un mismo cuerpo libre.* Esta razón se llama *masa del cuerpo,* y, como acabamos de decir, es un elemento cuantitativo que interviene en todo movimiento, y que depende de la constitución del cuerpo y de sus dimensiones.

19. **Noción física de la masa.**—Esta dependencia es en su fondo un hecho de tal modo obscuro, que cuantos esfuerzos han hecho los pensadores por dilucidarlo, sólo han logrado hasta el día confirmar la gran limitación de la mente

humana; pero al analista le basta haber reconocido por la experimentación, auxiliada por el raciocinio inductivo, las relaciones precedentes, para poder deducir consecuencias y fórmulas útiles en la resolución de problemas.

De cualquier modo, importa consignar que existe una gran ley de la Naturaleza física terrestre, minuciosamente verificada por delicados experimentadores, en la cual halla nuestra mente esclarecimientos *externos* suficientes para generar un concepto físico que sirve de precioso auxiliar en la formación de imágenes de los fenómenos, y de base para mediciones y fórmulas analíticas. Esta ley aiudida es la bien conocida de la Física, que dice:

Todos los cuerpos caen en el vacío con la misma velocidad.

Enunciándola en términos más precisos y propios de nuestra explicación, podremos decir:

Todos los cuerpos materiales, de cualesquiera dimensiones, formas y especies químicas que sean, abandonados en el vacío y en un mismo lugar de la Tierra, caen con una misma aceleración (constante, si el movimiento se considera en escasa amplitud).

Por consiguiente, si observamos que las fuerzas actuantes que producen estos movimientos son los respectivos pesos, teniendo presente las relaciones (3), deduciremos que *las masas de los diversos cuerpos todos son proporcionales á sus pesos.*

Si, aparte de esta importantísima conclusión, tenemos presente otro hecho bien comprobado, á saber: Que los pesos de dos cuerpos formados con una misma especie química bien definida, pura y estable, á igualdad de temperatura y presión, son proporcionales á sus volúmenes; podemos concluir:

Primero: Que la masa de un cuerpo es una manifestación cuantitativa originada por algo inherente á su constitución material que escapa á nuestra inteligencia, pero cuya revelación física es el peso en general;

Y *segundo: Que en particular, las masas de los cuerpos de una misma especie química, en iguales condiciones de temperatura y presión, se revelan por sus volúmenes.*

20. **Densidad y peso específico.**– Puesto que, según eso, diferentes cuerpos de una misma especie química tienen masas proporcionales á sus volúmenes, cada especie estará caracterizada, respecto de este particular, por su *masa específica ó densidad*, esto es, *masa de la unidad de volumen.* Llamándola ρ, M la masa y V el volumen, tendremos para cada cuerpo, supuesto homogéneo,

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad \text{ó sea} \quad M = V\rho.$$

Como para medir M hemos de acudir á su peso P, si llamamos g la aceleración constante que la gravedad imprime á los cuerpos en la superficie de la Tierra, tendremos también

$$\frac{P}{g} = M, \quad \text{ó} \quad P = Mg.$$

Luego si llamamos π el *peso específico*, ó sea *el peso de la unidad de volumen,* serán

$$\pi = \frac{P}{V}, \quad \frac{\pi}{\rho} = \frac{P}{M}, \quad \pi = \rho g,$$

fórmulas de muy frecuente uso en la Mecánica.

21. **Ecuación fundamental de la dinámica.**—Nada más fácil ya que expresar una fuerza por sus efectos dinámicos. Si dos fuerzas F y F′, obrando sobre dos cuerpos de masas m y m', producen respectivamente las aceleraciones j y j', tendremos:

$$\frac{F}{j} = m, \quad \frac{F'}{j'} = m';$$

de donde

$$\frac{F}{F'} = \frac{mj}{m'j'}. \qquad (4)$$

Y así, podemos decir en términos ordinarios que *si dos fuerzas, actuando sobre dos masas diferentes, producen aceleraciones diferentes, sus intensidades son proporcionales á los productos de estos dos elementos.*

Si ahora suponemos que F′ se toma por unidad de intensidad, que m' es asimismo la unidad de masa, y que estas unidades se han elegido de manera que la aceleración j' sea también la unidad de aceleración, la (4) se convierte en

$$F = mj, \qquad (5)$$

expresión analítica que, sintetizando todos los resultados precedentes, *constituye la ley fundamental de la Dinámica y es la base de todas sus ecuaciones;* puesto que, despejando de ella la aceleración j, para substituirla en el segundo miembro de la (1), da ya á ésta *el carácter de ecuación,* convirtiéndola en

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F,$$

cuyo primer miembro es el producto de la masa del móvil por la aceleración que determina la ley cinemática del movimiento, y cuyo segundo miembro es la magnitud representativa de la causa agente, medida en su propia existencia; y así, al igualar ambas cantidades, queda expresado analíticamente *cómo los efectos dependen de las causas,* según nos proponíamos establecer.

Si hacemos la misma transformación en las (2), correspondientes al caso general de una fuerza variable, como las proyecciones del vector aceleración sobre los ejes son aceleraciones de los movimientos rectilíneos coordenados, y las fuerzas son siempre proporcionales á las aceleraciones, po-

dremos considerar que estos movimientos componentes son debidos á fuerzas que tienen por respectivas rectas de posición las paralelas á los ejes por el punto móvil, y por intensidades las proyecciones sobre los mismos de la intensidad F. Por tanto, llamando X, Y, Z estas proyecciones, las ecuaciones generales del movimiento del punto material, en coordenadas cartesianas cualesquiera, serán:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z.$$

Por último, aplicado análogas consideraciones á las proyecciones del movimiento sobre la tangente y la normal principal á la trayectoria, ya que la fuerza, teniendo por recta de posición la misma que la aceleración, está en el plano osculador, y llamando F_T, F_N las proyecciones de F sobre dichas rectas, tendremos para *ecuaciones intrínsecas* del movimiento:

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=F_T, \quad m\frac{v^2}{\rho}=F_N.$$

22. **Unidades de fuerza y masa.**—El sistema llamado terrestre de unidades, por su relación con las dimensiones de la Tierra, tiene adoptado *el kilogramo como unidad práctica de fuerza;* pero como la aceleración g de la gravedad no se ha tomado como unidad lineal, ni de aceleración por tanto, la fórmula (5) sólo corresponderá analíticamente á las unidades cuando se tome por *unidad de masa la de un cuerpo que pese* g *kilogramos,* esto es, 9,808 (*), que es el número que mide g en metros. De este modo, para hallar la masa de un cuerpo de p kilogramos, será necesario multiplicar p por $\frac{1}{9,808}=0,102$, número que constituye, por tanto, un *coe-*

(*) En París, que es el lugar de la Tierra en que está definido el kilogramo. En Madrid es 9,804; en el ecuador, 9,781.

ficiente parásito, de uso incómodo, cuya desaparición de las fórmulas interesa conseguir.

Por eso, y por otras varias razones (*), se ha introducido modernamente en la ciencia el sistema llamado *absoluto,* que tiene por unidades fundamentales el *centímetro, el gramo-masa* y *el segundo de tiempo* (de cuyas iniciales ha tomado el nombre de *cegesimal,* con que también se le designa); en tal sistema, la unidad de fuerza se considera como *derivada*, y es *la que obrando sobre el gramo-masa en reposo, le comunica la aceleración unidad, ó sea un centímetro.* Esta unidad se llama *dina,* y su relación con la del sistema terrestre resulta en seguida, escribiendo

$$1 \text{ kilogr.-fuerza} = 1 \text{ kilogr.-masa} \times 980{,}8 \text{ centím.};$$

pues como es

$$1 \text{ dina} = 1 \text{ gr.-masa} \times 1 \text{ centím.},$$

se deduce

$$1 \text{ kg} = (1000 \times 980{,}8) \text{ dinas} = 980800 \text{ dinas.}$$

Así, la dina vale poco más de un miligramo.

En cuanto á la ecuación de las dimensiones de la unidad de fuerza, se tiene, recordando la de la aceleración,

$$[F] = [L]\,[M]\,[T]^{-2}.$$

23. **Observación importante sobre las anteriores relaciones.**—En todos los razonamientos precedentes en que han entrado ideas de movimiento, se ha supuesto necesariamente que nos referíamos á movimientos absolutos. Ahora

---

(*) Véase la nota anterior. Como *g* es variable según el lugar de la Tierra, el sistema terrestre carece de universalidad, lo que constituye un serio inconveniente.

bien: estando la Tierra en movimiento, es claro que nuestros experimentos han tenido que referirse todos á ejes móviles; pero como, según se demuestra en *Cinemática*, la aceleración complementaria es sumamente pequeña para todo movimiento cuya velocidad no sea considerable, los resultados de las indicadas operaciones experimentales sólo vienen influídos de errores exiguos, incapaces de falsear las enseñanzas y leyes que en ellas hemos fundado.

IV.—Las fuerzas como vectores.

24. **Representación vectorial de la fuerza.**—Resulta de cuanto llevamos establecido, que los atributos determinativos de una fuerza son precisamente los elementos de un vector: dirección y sentido, intensidad como módulo y recta de posición; puesto que tratándose de cuerpos rígidos, según el postulado quinto, puede considerarse aplicada á cualquiera de los puntos de la recta trazada, según su dirección, por el punto á que realmente está aplicada. De consiguiente, *una fuerza tiene por representación genuina un vector.*

Según esto, la teoría general de los sistemas de vectores podrá suministrar inmediatamente relaciones útiles para la teoría del equilibrio; y decimos *podrá*, porque antes de afirmarlo es necesario demostrar que todas las propiedades analíticas y geométricas en que fundamos aquella teoría tienen cumplida aplicación á esta otra. Y esto es lo que nos proponemos evidenciar en este artículo.

25. **Sistemas de fuerzas.**—Un sólido invariable puede estar sometido simultáneamente á la acción de varias fuerzas aplicadas á uno ó á varios de sus puntos. Este conjunto de fuerzas se llama *sistema;* cada una de ellas recibe el nombre de *componente* del mismo.

Sin dificultad se comprende que los sistemas de fuerzas pueden ser clasificados como los de vectores que las repre-

sentan: así tendremos sistemas superpuestos en una misma recta, concurrentes en un punto, paralelos, etc.

De los sistemas superpuestos, hemos tratado ya, al formular las proposiciones utilizadas para la medición de la fuerza.

26. **Fuerzas concurrentes: principio del paralelogramo.**— Imaginemos un punto material sometido á la acción simultánea de dos fuerzas de distintas direcciones: es evidente la imposibilidad de que siga á la vez las dos trayectorias diferentes que dichas acciones aisladas determinarían. Por el postulado segundo, ya conocemos la ley á que obedecerán los efectos dinámicos que se originen; tratemos ahora de averiguar cuál será la que rija los efectos estáticos.

Para ello acudamos á la experimentación. Tomemos tres cuerdas perfectamente flexibles anudadas en un punto, y ejerzamos sobre este punto, por medio de dichas cuerdas, acciones convenientes á favor de tres pesos ó tres resortes dinamométricos hasta lograr el equilibrio; se ve que éste es posible, y del estudio de las condiciones que deberán satisfacerse, deduciremos importantísimas consecuencias.

La primera, inmediata según el postulado tercero, es que cada dos acciones, puesto que aparecen equilibradas en su acción conjunta por la tercera, tienen *una resultante ó equivalente única, la igual y opuesta á esta tercera*; luego podemos formular la siguiente proposición:

Dos fuerzas angulares aplicadas simultáneamente á un mismo punto, equivalen siempre en su efecto estático á una fuerza única. Esta fuerza única se llama *resultante* de aquellas dos componentes.

En seguida, procurando relacionar la forma que afectarán las tres cuerdas en el equilibrio con las intensidades de las fuerzas, que supondremos registradas y llamaremos F, F_1, F_2, observaremos: primero, que son coplanarias y cada una de ellas se contiene en el mayor ángulo que forman las otras dos; y después, que si construímos un exágono inscripto so-

bre las tres cuerdas como diagonales y de lados respectivamente paralelos á éstas, los lados de este exágono son proporcionales á las tres intensidades F, F_1, F_2. Y como, según el postulado quinto, las cuerdas afectan en el equilibrio las mismas direcciones de las respectivas fuerzas, concluímos que las tres intensidades satisfacen á la relación

$$\overline{\overline{F}} + \overline{\overline{F_1}} + \overline{\overline{F_2}} = 0, \quad \text{ó} \quad \overline{\overline{F_1}} + \overline{\overline{F_2}} = -\overline{\overline{F}};$$

su suma vectorial es cero, ó bien *la resultante de dos de ellas es igual á su suma geométrica.* Resumiendo, pues, diremos:

PRINCIPIO DEL PARALELOGRAMO.—*Dos fuerzas aplicadas simultáneamente á un mismo punto en distintas direcciones, tienen una resultante única, que es igual á su suma geométrica ó vectorial* (diagonal del paralelogramo, etc.)

Y de aquí, como corolario, esta otra proposición general:

Un sistema de fuerzas aplicadas á un punto, tiene en general una resultante aplicada al mismo, igual á su suma geométrica. Si esta suma es nula, la resultante lo es y el sistema está en equilibrio.

OBSERVACIÓN.—Recordando la proporcionalidad existente entre las fuerzas y las aceleraciones aplicadas á un mismo móvil, podemos reconocer en el principio que acabamos de establecer una confirmación experimental del postulado segundo.

27. **Equilibrio de un sistema concurrente.**— Se ve inmediatamente que un sistema de esta clase en equilibrio está representado por un sistema nulo de vectores concurrentes; luego podremos escribir

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0, \qquad \Sigma Z = 0,$$

como condiciones de equilibrio, referidas á tres ejes cartesianos.

Además, interesa observar que, satisfechas estas condiciones, queda satisfecha también la conocida

$$\Sigma \mathfrak{M}_C \overline{\overline{F}} = 0;$$

la suma de momentos, ó sea *el momento del sistema en equilibrio, es nula respecto de cualquier centro* C *del espacio, y por tanto, respecto de cualquier eje.* De otro modo, *diremos también que el momento de la resultante es igual á la suma de momentos de las componentes.*

28. **Fuerzas cualesquiera en un plano: principio de la palanca.**—Supongamos ahora que á dos puntos A y B de un sólido invariable están aplicadas dos fuerzas F_1, F_2, y tratemos de impedir el movimiento, ó sea de equilibrar este sistema por la introducción de una tercera fuerza F aplicada en un punto arbitrario H; observaremos que sólo se logra el equilibrio cuando se satisfacen estas dos condiciones:

Primera. *Las tres fuerzas han de ser coplanarias.*

Y segunda. *Los momentos de* F_1 y F_2 *respecto de un punto cualquiera* C *de* F, *han de ser iguales y de signos contrarios.*

Luego:

Si las rectas de posición de F_1 y F_2 son concurrentes, la de F tendrá que pasar por el punto de concurso de ambas; pues tomando por punto C el de concurso de F con F_1, el momento de ésta será nulo, y tendrá que serlo también el de F_2. En tal caso, pues, teniendo presente el postulado quinto, recaemos en el principio del paralelogramo, y F habrá de ser *suma geométrica de* $\overline{\overline{F_1}}$ y $\overline{\overline{F_2}}$.

Y si F_1 y F_2 son paralelas entre sí, F habrá de ser paralela á ellas. Pero entonces, puesto que estas tres fuerzas están en equilibrio, podremos aplicar la segunda condición también á F_1 y F respecto de un punto cualquiera de la F_2, lo que nos permitirá concluir fácilmente que F ha de ser la suma algébrica de F_1 y F_2.

En consecuencia, podemos establecer ya el siguiente *principio,* llamado *de la palanca,* por lo que después se dirá.

PRINCIPIO DE LA PALANCA. *Dos fuerzas coplanarias, aplicadas á puntos distintos de un sólido invariable, son siempre equivalentes á una sola, igual á su suma vectorial, y cuya*

recta de posición es lugar de los puntos respecto de los cuales es nula la suma de los momentos centrales de dichas dos fuerzas.

Se tendrán, por tanto, las dos relaciones

$$\overline{\overline{F_1}} + \overline{\overline{F_2}} + \overline{\overline{F}} = 0, \qquad \mathfrak{M}_C \overline{\overline{F_1}} + \mathfrak{M}_C \overline{\overline{F_2}} = 0;$$

y como de ellas se deduce analíticamente que también para otro punto C′ cualquiera se verificará

$$\mathfrak{M}_{C'} \overline{\overline{F_1}} + \mathfrak{M}_{C'} \overline{\overline{F_2}} + \mathfrak{M}_{C'} \overline{\overline{F}} = 0;$$

y como, aplicando el mismo principio, podemos también concluir que cualquiera de las fuerzas puede substituirse, sin alterar el equilibrio, por otra ú otras varias coplanarias que no alteren la suma nula de todas ellas ni la suma nula de todos sus momentos; resulta, finalmente, que *las condiciones de anulación, y de equivalencia, por tanto, de los sistemas planos de fuerzas son precisamente las mismas de equilibrio y de equivalencia de los sistemas planos de vectores.*

OBSERVACIÓN. Hemos dicho que el anterior principio se llama de la palanca: la razón es evidente. Si imaginamos substituída la fuerza F por la reacción de un punto fijo de su recta de posición, el sólido S constituirá una palanca en equilibrio, aparato bien conocido, estudiado ya en la antigüedad por Arquímedes, y cuya teoría no es oportuno desarrollar aquí.

29. **Equivalencia de sistemas cualesquiera de fuerzas.**— Para ver, por último, extendida la anterior conclusión á los sistemas todos de fuerzas, cualesquiera que sean sus condiciones, bastará probar que es cierta para dos fuerzas no coplanarias entre sí, equilibradas por otras dos no coplanarias también entre sí. Y esto es fácil, aplicando convenientemente el mismo principio cuya extensión buscamos.

Sean F_1 aplicada en A, y F_2 en B, dos fuerzas no coplana-

rias. Tracemos por dichas fuerzas dos planos arbitrarios, y sea CD su recta de intersección. Siendo CD y F_1 coplanarias, podremos aplicar en CD una fuerza F''_1, y además introducir otra F'_1 coplanaria con ella y F_1, tales que cumplan entre las tres las condiciones de equilibrio, esto es, que se tengan las relaciones

$$\overline{F_1} + \overline{F'_1} + \overline{F''_1} = 0, \quad \mathfrak{M}_O\overline{F_1} + \mathfrak{M}_O\overline{F'_1} + \mathfrak{M}_O\overline{F''_1} = 0,$$

siendo O un punto cualquiera del espacio. Análogamente, introduciendo otras dos fuerzas, F''_2 según CD, y F'_2 coplanaria con ella y la F_2, tales que se equilibren entre las tres, se tendrán también las

$$\overline{F_2} + \overline{F'_2} + \overline{F''_2} = 0, \quad \mathfrak{M}_O\overline{F_2} + \mathfrak{M}_O\overline{F'_2} + \mathfrak{M}_O\overline{F''_2} = 0;$$

Pero en la elección de estas dos últimas, podemos siempre disponer de F''_2 de modo que sea igual y opuesta á F''_1; y como además tienen la misma recta de posición, serán entonces

$$\overline{F''_1} + \overline{F''_2} = 0, \quad \mathfrak{M}_O\overline{F''_1} + \mathfrak{M}_O\overline{F''_2} = 0;$$

luego quedan únicamente, sumando,

$$\overline{F_1} + \overline{F'_1} + \overline{F_2} + \overline{F'_2} = 0,$$
$$\mathfrak{M}_O\overline{F_1} + \mathfrak{M}_O\overline{F'_1} + \mathfrak{M}_O\overline{F_2} + \mathfrak{M}_O\overline{F'_2} = 0,$$

como condiciones á que satisfacen las cuatro fuerzas que se equilibran, según habíamos anunciado.

Observando ahora que una ó más de estas cuatro fuerzas pueden ser substituídas, sin alterar el equilibrio, por otra ú otras, en número cualquiera y aplicadas de cualquier modo, con tal que no se alteren las anteriores sumas nulas, concluiremos en definitiva que *las condiciones mecánicas de equilibrio y de equivalencia de sistemas cualesquiera de fuerzas,*

tienen por traducción analítica las establecidas para la anulación y la equivalencia de los sistemas de vectores.

30. **Reducción general de los sistemas de fuerzas.**—En consecuencia, aplicando las propiedades sabidas de los sistemas de vectores, en particular cuanto se refiere á su reducción, podremos ya formular brevemente y con toda generalidad las leyes de la reducción de los sistemas de fuerzas. Tendremos, pues:

1.° Que todo sistema de fuerzas es reductible en general á un torsor, cuyo resultante representa una fuerza única, y cuyo par mínimo constituye un par de fuerzas, de índice paralelo á aquélla.

Este torsor ha recibido modernamente el nombre de *dinamia;* y así diremos que, en general, *todo sistema de fuerzas es equivalente á una dinamia.*

Los elementos de la dinamia serán, conforme ya sabemos:

La fuerza F, siendo X^i, Y^i, Z^i componentes coordenadas de una fuerza cualquiera del sistema,

$$F = \sqrt{\overline{\Sigma X^i}^2 + \overline{\Sigma Y^i}^2 + \overline{\Sigma Z^i}^2};$$

y el par,

$$W = \frac{L\Sigma X^i + M\Sigma Y^i + N\Sigma Z^i}{F}.$$

donde L, M, N significan:

$$L = \Sigma(y^i Z^i - z^i Y^i),$$
$$M = \Sigma(z^i X^i - x^i Z^i),$$
$$N = \Sigma(x^i Y^i - y^i X^i),$$

siendo (x^i, y^i, z^i) el punto de aplicación de la fuerza F^i.

Los dos términos de aquella fracción son *invariantes del sistema.*

2.° Que cuando el invariante numerador es nulo, sin serlo el denominador, el sistema es equivalente á la fuerza única

$$\overline{\overline{F}} = \Sigma \overline{\overline{F^i}}.$$

La condición, pues, para que esto se verifique es

$$L\Sigma X^i + M\Sigma Y^i + N\Sigma Z^i = 0.$$

3.° Que si es cero el denominador, para lo cual es claro que habrán de ser separadamente

$$\Sigma X^i = 0, \quad \Sigma Y^i = 0, \quad \Sigma Z^i = 0,$$

el sistema es redúctible á un par único,

$$W = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$

si L, M y N no son todas tres nulas.

Y 4.° Que si ambos invariantes son nulos, ó sea si se verifican á la vez las seis condiciones

$$\left.\begin{array}{lll} \Sigma X^i = 0, & \Sigma Y^i = 0, & \Sigma Z^i = 0, \\ L = 0, & M = 0, & N = 0, \end{array}\right\} \qquad (6)$$

el sistema está en equilibrio.

Estas seis últimas ecuaciones son, por lo tanto, las *condiciones de equilibrio de un sistema de fuerzas aplicadas de cualquier modo á puntos cualesquiera de un sólido invariable.*

Y vense en estas proposiciones condensados *los fundamentos de la teoría del equilibrio,* obtenidos por aplicación de la teoría analítica de los sistemas de vectores á los de fuerzas, mediante los principios, *experimentalmente deducidos,* del paralelogramo y la palanca.

31. **Campos de fuerzas.**—Puesto que las fuerzas son vectores, aplicándoles la teoría de campos vectoriales, tendremos los *campos de fuerzas,* importantísima noción por cuyo medio logra la Mecánica hacer verdaderamente analítica la representación de muchos fenómenos físico-naturales, sin

tener que apoyarse en la concepción primitiva de causas aisladas parecidas á los esfuerzos que en la vida ordinaria vemos aplicados á remover objetos.

En efecto: en multitud de fenómenos físicos, el movimiento es debido á acciones que dependen exclusivamente de la posición que el móvil ocupa respecto de los cuerpos materiales que las determinan; luego el vector infinitesimal μ que caracteriza el efecto actual de la fuerza en cada instante, es en todos esos casos una función de las coordenadas, y, por tanto, la aceleración y la fuerza también lo serán. Imaginando, según esto, un campo vectorial en que la intensidad sea el vector aceleración que en cada punto tiende á tomar el móvil (supuesto reducido á un punto ó elemento material) bajo la acción física que origine el movimiento en estudio, dicho campo será *el campo de esta fuerza.*

Definido este campo por su intensidad $j = \varphi(x, y, z)$, y por su dirección $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, en general también funciones de las coordenadas, queda determinada la fuerza ejercida sobre el elemento de masa dm, pues se tendrá

$$\overline{\overline{dF}} = \varphi(x, y, z)\, dm,$$

así como sus componentes coordenadas, que deberán ser

$$\left.\begin{aligned} dX &= \varphi(x, y, z)\, dm \,.\, \cos\alpha \\ dY &= \varphi(x, y, z)\, dm \,.\, \cos\beta \\ dZ &= \varphi(x, y, z)\, dm \,.\, \cos\gamma \end{aligned}\right\}.$$

Componiendo ahora este sistema continuo de vectores infinitesimales para todos los elementos dm que integren el cuerpo, tendremos determinada la dinamia á que, en general, equivaldrá la acción física ejercida sobre él y representada por el campo, y con ello, las ecuaciones diferenciales del movimiento, ó bien las condicions del equilibrio si fuese tal el caso, del modo que en lugar oportuno se expondrá.

(Continuará.)

XXXVI.—Los «Nysson» de España (Insectos Himenópteros).

POR RICARDO GARCÍA MERCET.

II

Cuadro dicotómico para el conocimiento y determinación de las especies españolas del gén. **Nysson.**

♂♂

1. Borde posterior de los segmentos ventrales. 2-5 pestañoso..... 2.
— Borde posterior de todos los segmentos ventrales lampiño ó casi lampiño..... 5.
2. Pestañas de los segmentos ventrales lanuginosas; la célula anal de las alas posteriores termina antes del arranque del nervio cubital; tibias del tercer par aserraditas.—Sienes aquilladas hacia la boca; frente, por encima de la inserción de las antenas, tuberculiforme, con una quillita longitudinal; último artejo de las antenas incurvado, comprimido en el ápice; clípeo normal; segmentos ventrales redondeados. Cuerpo robusto, provisto de abundante tomento plateado. Negro; borde del pronoto con dos manchas amarillas; abdomen con bandas enteras ó interrumpidas sobre los anillos 1-6. Patas rojizas. Long. 8-9 m. m..... *N. scalaris.* Illiger.

(Especie abundante en el centro de España. He visto ejemplares de las provincias de Madrid, Ciudad Real, Avila, Segovia y Orense. Señalado en Cataluña por los Sres. Antiga y Bofill.)

— Pestañas de los segmentos ventrales cortas; la célula anal de las alas posteriores termina después del arranque del nervio cubital; frente sin quilla ni tu-

bérculo por encima de la inserción de las antenas; tibias posteriores lisas..... 3.

3. Pestañas de los segmentos ventrales cortas, pero bien perceptibles; abdomen negro, con manchas blancas; tibias y tarsos de color rojo claro.— Sienes aquilladas hacia la boca; clípeo con dos quillitas sobre el borde anterior; tibias posteriores normales; último artejo de las antenas incurvado, comprimido en el ápice, tan largo como los dos anteriores reunidos; séptimo segmento del abdomen con dos espinitas; el segundo ventral simplemente convexo. Cuerpo negro; callos humerales y manchas sobre los lados de los segmentos abdominales 1-3, blanco amarillentos; pronoto y escudete, á veces, con una manchita de color claro. Long. 6-7 m. m.
N. fulvipes. Costa.

(Especie no escasa en la provincia de Madrid. Visita las tapsias en flor y los peucedáneos, y puede recogerse en los meses de Mayo y Junio.)

— Pestañas de los segmentos ventrales muy cortas, plateadas; abdomen negro con el primer segmento rojo; patas negro-rojizas..... 4.

4. Callos humerales negros; abdomen con manchas blanquecinas sobre los segmentos 1-2; Long. 5 m. m.
N. fraternus. G. Mercet.

— Callos humerales y manchas sobre los segmentos del abdomen 1-3 de color blanco; la puntuación gruesa del tórax y abdomen, profunda y más separada que en el anterior; longitud 7-7'5 m. m.....
N. Konowi. G. Mercet.

5. Segundo segmento ventral truncado en la base; visto de perfil forma un ángulo saliente muy distinguible..... 6.

— Segundo segmento ventral simplemente convexo. 11.

6. Cuerpo negro con dibujos amarillos; sienes aquilladas hacia la boca..... 7.

— Cuerpo negro con la base del abdomen roja; dibujos blanquecinos; sienes lisas ó sólo ligeramente aquilladas en una parte de su extensión..... 9.

7. Borde anterior del clipeo cón dos quillitas en el centro; el 12.° artejo de las antenas poco más ancho que el precedente; la célula anal de las alas posteriores termina antes del arranque del nervio cubital; longitud del insecto 8-10 m. m..... 8.

— Borde anterior del clipeo simple; el 12.° artejo de las antenas muy engrosado; la célula anal de las alas posteriores termina después del arranque del nervio cubital; longitud del insecto 6-8 m. m.—Cuerpo negro, con manchas amarillas laterales sobre los anillos del abdomen 1-3; patas negras.....
N. trimaculatus. Rossi.

(Este *Nysson* no se ha encontrado hasta ahora en el centro de España. Lo señalan en varias localidades de la provincia de Barcelona los señores Antiga y Bofill, en su Catálogo de Himenópteros de Cataluña).

8. Cara dorsal del primero y segundo segmentos del abdomen fuertemente punteada; callos humerales amarillos, rarísima vez negros; ángulo del segundo segmento ventral obtuso; tibias rojizas.—Ultimo artejo de las antenas incurvado, tan largo como los dos anteriores reunidos; séptimo segmento del abdomen bidentado. Borde del pronoto, callos humerales y bandas enteras ó interrumpidas sobre los segmentos 1-3 de color amarillo; escudete á veces con una mancha amarilla; fémures negros con el ápice rojo; tibias y tarsos rojizos. Long. 8-9 m. m....
N. interruptus F.

(Esta especie, señalada en la mayor parte de los países de Europa, debe hallarse difundida por todo el territorio de España; pero hasta

ahora sólo he visto de ella ejemplares capturados en la provincia de Madrid. Mayo y Junio: sobre las flores de umbelíferas.)

8. La puntuación del segundo segmento del abdomen mucho más fina y esparcida que la del primero; callos humerales casi siempre negros; ángulo del segundo segmento ventral recto; tibias negras, rojizas en la base y ápice.(Los demás caracteres como en la especie anterior.) Long. 9-10 m. m.

N. spinosus Forster.

(Especie no señalada en el centro de la Península; sólo he visto de ella un ejemplar español procedente de Cortellas (Orense), Garcia Varela.)

9. La célula anal de las alas posteriores termina antes del arranque del nervio cubital; sienes lisas;el último artejo de las antenas poco más largo que los dos anteriores reunidos. (Para los restantes caracteres véase la descripción.)

N. Dusmeti G. Mercet.

— La célula anal de las alas posteriores termina en el origen ó después del arranque del nervio cubital; clípeo inerme, ligeramente deprimido sobre el borde anterior; sienes lisas; el último artejo del funículo tan largo como los tres anteriores reunidos 10

10. Segundo segmento ventral con una prominencia ó tubérculo achatado; clípeo manchado de amarillo. (Para los demás caracteres véase la descripción.)

N. pratensis G. Mercet.

— Segundo segmento ventral con un abultamiento acanalado; clípeo completamente negro.....

N. Dusmeti?

11. Segundo segmento ventral con una ó dos quillitas en el centro..... 12

— Segundo segmento ventral desprovisto de quillas 13

12. Segundo segmento ventral con una quilla en su medio; último artejo de las antenas tan largo como los tres anteriores reunidos. (Para los demás caracteres véase la descripción.). *N. Alicantinus* G. Mercet.

— Segundo segmento ventral con dos quillitas que comprenden un espacio ligeramente acanalado; último artejo de las antenas poco más largo que los dos anterios reunidos..... *N. Dusmeti.* G. Mercet.

13. Sienes aquilladas hacia la boca..... 14.

— Sienes completamente lisas..... 19.

14. Clípeo negro..... 15.

— Clípeo manchado de amarillo..... 18.

15. Borde anterior del clípeo con dos quillitas ó dientecillos muy pequeños..... 16.

— Borde anterior del clípeo liso ó ligeramente ondulado..... 17.

16. Callos humerales negros; abdomen con manchas blanquecinas sobre los segmentos 1-2. Long. del insecto 5 m. m..... *N. fraternus.* G. Mercet.

— Callos humerales y manchas sobre los segmentos del abdomen 1-3 de color blanco; longitud del insecto 7-7'5 m. m..... *N. Konowi.* G. Mercet.

17. Antenas testáceas; pronoto con dos manchas amarillas; primer segmento del abdomen rojo; último terminado por dos dientecitos agudos y aproximados; escudete negro.—Puntuación del cuerpo gruesa y profunda; último artejo de las antenas truncado, un poco excavado en su cara interna, más corto que los dos anteriores reunidos; manchas amarillas sobre los segmentos 1-4; callos humerales del mismo color; patas rojizas. Long. 6-8 m. m.
N. militaris, Gerstächer.

(Especie no señalada en la Península, pero que probablemente vivirá en nuestro país. La incluyo en este cuadro para que no sea confundida con el *maculatus* ó el *Varelai.*)

17. Antenas negras; primer segmento del abdomen negro; último terminado por dos dientecillos agudos y distantes; pronoto y escudete con una mancha amarilla.—Puntuación del cuerpo menos gruesa y menos profunda; último artejo de las antenas muy incurvado, tan largo como los dos anteriores reunidos; callos humerales y manchas sobre los anillos del abdomen 1-3 de color amarillo; patas rojizas. Long. 6-8 m. m..... *N. maculatus,* Fabricius.

(Esta especie no se encuentra en la región central de España; poseo de ella dos ejemplares procedentes de los alrededores de Barcelona, donde fueron cojidos por el Sr. Bofill).

18. Antenas cortas y gruesas; tercer artejo del funículo mucho más ancho que largo; último artejo curvo, de longitud igual á la de los dos anteriores reunidos; pronoto con dos manchas amarillas; escudete negro. (Véase la descripción.)..... *N. Varelai.* G. Mercet.

— Antenas más largas y más finas; tercer artejo del funículo tan largo como ancho; último artejo de longitud casi igual á la de los tres anteriores reunidos; pronoto y escudete con una mancha amarilla. (Véase la descripción).... *N. Castellanus* G. Mercet.

19. Ultimo artejo de las antenas incurvado, excavado en su cara interna, más ó menos truncado en el ápice; la célula anal de las alas posteriores termina después del arranque del nervio cubital..... 20

— Ultimo artejo de las antenas normal, redondeado en el ápice; la célula anal de las alas posteriores termina antes del arranque del nervio cubital. (Véase la descripcíón)..... *N. parietalis* G. Mercet.

20. Ultimo artejo de las antenas biexcavado en su cara interna, tan largo, por lo menos, como los dos anteriores reunidos; clípeo normal; séptimo segmen-

to del abdomen alargado, desprovisto de pestañas largas en el ápice..... 21

20. Ultimo artejo de las antenas muy corto, apenas más largo que el precedente; clípeo como aserradito en el borde anterior; séptimo segmento del abdomen ancho, corto, provisto de largas pestañas en el ápice. Long. 7 m. m. (Véase la descripción)..... *N. monachus* G. Mercet.

21. Clípeo negro; á veces con dos puntitos blancos; segundo segmento del abdomen negro; el cuarto, generalmente, sin manchas blanquecinas; último artejo de las antenas más corto que los tres anteriores reunidos, con la escotadura basilar corta..... 22

— Clípeo manchado de amarillo; primero y segundo segmentos del abdomen rojos; los siguientes rojizos en el ápice; manchas blanquecinas sobre los anillos 1-4; último artejo de las antenas profundamente biexcavado, tan largo, por lo menos, como los tres anteriores reunidos, con la escotadura basilar larga; los dos penúltimos artejos bastante ensanchados; patas negras, manchadas de blanco sobre las tibias; cuerpo con abundante tomento argentino. ..... *N. Laufferi* G. Mercet.

San Fernando del Jarama y Alberche (provincia de Madrid).....

22. Clípeo negro; tórax del mismo color; callos humerales blancos; primer segmento del abdomen rojo, con dos manchas blanquecinas laterales; el segundo y tercero manchados también lateralmente; escapo de las antenas negro; patas negro rojizas.—Puntuación gruesa del abdomen muy esparcida; alas ligeramente ahumadas. Long. 5-6 m. m. *N. dimidiatus* Jurine.

(He visto ejemplares de las provincias de Madrid, Barcelona y Coruña. Debe estar difundido por la mayor parte del territorio de la Península).

22. Clípeo negro, á veces con dos pequeñísimas manchas blanquecinas; tórax generalmente manchado de blanco sobre el pronoto y escudete; primer segmento del abdomen rojo, ó rojo manchado de negro, ó negro completamente; primero, segundo y tercer segmentos del abdomen con manchas laterales de color blanco; escapo de las antenas manchado de blanco en la cara inferior; patas frecuentemente de color rojo claro, á veces obscurecidas sobre todos los fémures y las tibias posteriores. Longitud 5-6 m. m..... *N. dimidiatus* Jurine, var. Provincia de Madrid!

♀♀

1. El segundo segmento ventral, visto de perfil, forma un ángulo saliente bien acusado..... 2.
— Segundo segmento ventral simplemento convexo. 4.
2. Clípeo con dos quillitas sobre la parte central del borde anterior; la célula anal de las alas posteriores termina antes del arranque del nervio cubital; longitud del insecto 8-11..... 3.
— Clípeo sin quillitas sobre el borde anterior; la célula anal de las alas posteriores termina después del arranque del nervio cubital; longitud del insecto 6-8 m. m.—Cuerpo negro con dibujos amarillos sobre el pronoto, los callos humerales y los segmentos del abdomen 1-3. *N. trimaculatus,* Rossi.
3. Cara dorsal del primero y segundo segmentos del abdomen con puntuación igualmente gruesa; callos humerales generalmente amarillos.—Antenas normales, el último artejo alargado y redondeado en el ápice; sienes aquilladas hacia la boca; espinas laterales del metatórax, no muy aguzadas, anchas en la base; cara provista de tomento plateado; área pigidial triangular, alargada, redondeada en

el ápice.—Borde del pronoto y bandas enteras ó interrumpidas sobre los anillos abdominales 1-3 de color amarillo; patas rojizas... *N. interruptus*. F.

3. La puntuación gruesa del segundo segmento del abdomen mucho más fina y esparcida que la del primero; callos humerales casi siempre negros; los demás, caracteres como en la especie anterior.... *N. spinosus*, Foster.

4. Sienes aquilladas hacia la boca..... .. 5.

— Sienes lisas..... ..... 12.

5. Clípeo con dos quillitas ó dientecillos sobre el centro del borde anterior..... 6

— Clípeo liso, ligeramente deprimido sobre el borde anterior..... 9

6. Antenas rojizas en la base; los artejos 2-5 del funículo más largos que anchos; segundo segmento ventral rojo ó negro..... 7

– Antenas completamente negras; segundo segmento ventral negro; sienes fuertemente aquilladas; artejos 3-5 del funículo de las antenas más anchos que largos..... 8

7. Longitud del insecto 11-13 m. m. Dibujos del cuerpo de color amarillo ó anaranjado; primer segmento del abdomen rojo manchado de negro, á veces negro con manchas rojas.... *N. Miegi* G. Mercet.

— Longitud del insecto 7 m. m. Dibujos del cuerpo de color blanquecino; primer segmento del abdomen completamente rojo (excepción hecha de las manchas laterales blancas sobre el borde posterior)... *N. castellanus* G. Mercet.

8. Fémures rojos, á veces un poco negros en la base; el resto de las patas de color rojo claro; escudete casi siempre con una mancha blanquecina; espinas del metatórax cortas y romas; vientre lustroso; puntuación gruesa del abdomen muy pro-

funda; área pigidial más ancha que en la especie siguiente..... *N. fulvipes* Costa.

8. Fémures negros, un poco rojizos hacia el ápice; el resto de las patas de color rojizo; espinas del metatórax más largas y aguzadas; puntuación gruesa del abdomen menos profunda y más compacta; área pigidial más alargada.... *N. Konowi* G. Mercet.

9. Abdomen negro con dibujos blanquecinos; la célula anal de las alas posteriores termina antes del origen del nervio cubital..... *N. scalaris* Illiger.

— Primer segmento del abdomen rojo; la célula anal de las alas posteriores termina después del arranque del nervio cubital..... 10

10 Abdomen fuertemente punteado; antenas rojizas.— Primer segmento del abdomen rojo; dos manchas sobre el pronoto, callos humerales y bandas interrumpidas sobre los anillos abdominales 1-4 de color amarillento..... *N. militaris* Gerstäcker.

— Puntuación del abdomen poco profunda, fina, regular; antenas negras, á veces un poco rojizas hacia el ápice..... 11

11. Antenas rojizas; pronoto con dos manchas amarillas; escudete negro; segundo y tercer segmento del abdomen teñidos de rojo lateralmente y en la parte inferior..... *N. Varelai.* G. Mercet.

— Antenas negras; pronoto y escudete con una mancha amarilla; abdomen solamente rojo en el primer segmento.—Clipeo un poco deprimido sobre el borde anterior; callos humerales y manchas á los lados de los segmentos del abdomen 1-3 de color amarillo; patas rojizas, con los fémures anteriores é intermedios negros..... *N. maculatus* F.

12. Area pigidial ovalada, ancha, fuertemente punteada, rugosa, un poco escotada en el ápice; cuarto y quinto segmentos del abdomen mucho más gruesa y

profundamente punteados que el primero y segundo; longitud del insecto 7-7'5 m. m.....
N. monachus G. Mercet (*).

12. Area pigidial triangular, alargada, redondeada en el ápice, cuarto y quinto segmento del abdomen mucho menos gruesamente punteados que el primero y segundo..... 13.

13. Borde del pronoto completamente negro..... 14.

— Pronoto con una banda ó dos manchas blanquecinas..... 15.

14. Puntuación gruesa del primero y segundo segmentos del abdomen muy poco profunda y muy diseminada; tibias anteriores é intermedias amarillento rojizas; dorso del tórax casi mate; area pigidial más ancha en la base y estrecha en el ápice que en el *N. dimidiatus*..... *N. Laufferi.* G. Mercet.

— Puntuación gruesa del primero y segundo segmentos del abdomen bien señalada y profunda; tibias anteriores é intermedias rojizo negruzcas; dorso del tórax brillante..... *N. dimidiatus,* Jurine.

15. Borde del pronoto con una banda ó dos manchas confluentes blanquecinas; escudete manchado del mismo color; cuerpo más recio que en las especies subsiguientes..... 16.

— Borde del pronoto con dos manchas blanquecinas bien separadas; especies de menor tamaño y más gráciles..... 17.

16. Espinas laterales del metatórax finas y bastante largas; patas rojas; dibujos amarillos. *N. Ibericus,* Handl.

(Según su autor, el ejemplar tipo de esta especie forma parte de las colecciones del Museo de Madrid, y, en efecto, en ellas figura, bajo el nombre de *N. Ibericus*, con etiqueta escrita por el Sr. Hand-

---

(*) Por errata, en la descripción, se atribuye á esta especie la longitud de 9 m. m.

lirsch, un *Nysson* de España, pero al que no puede referirse la descripción de dicha especie. De ella dice su autor: «pars inferior temporum postice haud marginata; margo anterior clipei simplex, nec depressus nec carinatus».... y luego añade que pertenece al grupo del *N. Friesei*. Pero el ejemplar que, con etiqueta de Handlirsch, he encontrado en las colecciones del Museo de Historia Natural, es un *Nysson* del grupo del *fulvipes*, que presenta las sienes aquilladas hacia la boca y el borde anterior del clípeo con dos quillitas. Habiendo una divergencia tan evidente y acentuada entre la descripción del *N. Ibericus*, publicada por Handlirsch, y el ejemplar que se conservaba como tipo, hay que suponer que, inadvertidamente, al hacer algún arreglo de colecciones ó traslado de insectos de una caja á otra, se ha puesto la etiqueta del *N. Ibericus* á otro *Nysson* distinto, que es el que la lleva en la actualidad. Para que la confusión sobre este punto sea completa, hay que añadir que ni en las colecciones del Museo ni en ninguna de las que he consultado para hacer este trabajo, he visto ningún *Nysson* al que pueda referirse la descripción de Handlirsch. Ni aun el *Nysson* que yo llamo *pratensis* es posible que sea el *Ibericus*, pues éste, según su autor, tiene las patas rojas, los dibujos amarillos, las espinas laterales del metatórax finas y largas y la puntuación gruesa muy fuerte, mientras que el *pratensis* presenta las patas negro-rojizas, los dibujos blancos, las espinas laterales del metatórax anchas y cortas y los puntos del abdomen poco más gruesos que el *dimidiatus*.)

16. Espinas laterales del metatórax anchas y cortas; patas negro-rojizas; dibujos blancos..... *N. pratensis*. G. Mercet.

17. Las manchas del borde del pronoto grandes; escudete con un trazo blanco; tibias anteriores é intermedias amarillento rojizas..... *N. Alicantinus*, G. Mercet.

— Borde del pronoto con dos manchas apenas perceptibles; escudete con un trazo blanquecino muy pequeño; tibias anteriores é intermedias, generalmente, rojizo negruzcas... *N. dimidiatus*. Jurine, var.

XXXVII.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia novena.

SEÑORES:

Para establecer la teoría de la elasticidad, Cauchy y todos los matemáticos de su escuela partían de la hipótesis de las fuerzas centrales, que era la dominante en la pasada centuria.

Mr. Poincaré, inclinándose á las nuevas teorías de la moderna Física matemática; procurando eliminar hipótesis que no son absolutamente necesarias, ó si se quiere, substituyendo á dichas hipótesis principios generales más modernos de la Física, acude al gran principio de la conservación de la energía, el cual en la Mecánica clásica y en sus dos formas de fuerza viva y trabajo mecánico, es una consecuencia de las ecuaciones fundamentales de la Dinámica, y en su generalización para todos los fenómenos de la Física, ó es un principio deducido de la experiencia, ó es un principio teórico deducido en cada rama de la Física matemática de una hipótesis especial.

En el sistema de Cauchy, la solución del problema, al menos la solución teórica, depende *de una función* especial de la distancia entre dos elementos, $f(r)$, que para abreviar la explicación llamábamos en el primer curso de esta asignatura, función de Saint-Venant, la cual expresa la acción ó esfuerzo entre ambos elementos.

En el método de Poincaré, la solución del problema de-

pende análogamente de otra función U de las coordenadas de los diferentes puntos del sistema, que es la que hemos llamado *función de fuerzas*, porque de ella se deducen las componentes sobre cada punto del sistema elástico, con solo derivar por relación á dichas coordenadas.

Así, en resumen, de la consideración de una función f depende el método de Cauchy.

De la consideración de una función U depende el método de Poincaré.

Cuando la solución de un problema de Física matemática depende de una función, se pueden seguir varios caminos: ó acudir al método experimental para determinarla, substituyendo la verdadera forma de la función, forma que se desconoce, por una forma empírica con el número suficiente de constantes arbitrarias para satisfacer á los diversos experimentos que sobre dicha función se hayan realizado, ó hacer un nuevo esfuerzo por penetrar en mayores profundidades del problema, valiéndose de nuevas hipótesis, ó acudir á otro tercer medio, á saber: escribir el desarrollo de la función propuesta por la serie de Taylor, no tomando sino cierto número de términos con arreglo á la aproximación que se considere conveniente.

Pero esto, en el fondo, no es más que substituir á la verdadera función, que se desconoce, una función algebráica entera ordenada por las potencias de las variables, ó mejor dicho, de los incrementos, que se suponen muy pequeños, como en breve explicaremos con mayor detalle.

***

Presentemos un ejemplo vulgar y sencillo, pero que dé forma clara á nuestro pensamiento.

Sobre una barra suspendida actúa una fuerza arbitraria P.

Si l es la longitud de la barra, esta longitud crecerá, convirtiéndose en L.

Y es evídente que L será función de P, porque la barra se alargará más ó menos, según es mayor la fuerza, de manera que podemos escribir

$$L = f(P)$$

Pero, ¿cuál será la forma de esta función f?

Con ser tan sencillo el problema, debemos confesar que la forma de la función f la ignoramos.

Pero la experiencia, y hasta el buen sentido, y cierto instinto de cómo varían los fenómenos naturales entre límites muy pequeños, nos inducen á suponer que la función f es una función lineal de P; que los incrementos de longitud son proporcionales á los incrementos de la fuerza, y escribiremos como solución aproximada del problema

$$L = l + AP,$$

siendo A una constante para la materia especial de que está constituída la barra.

Algo hemos avanzado; antes, lo desconocido, era la forma de una función; lo desconocido ahora es el valor de una constante.

Mas para determinar esta constante, en rigor una experiencia basta, aunque, para más exactiud y seguridad, el experimento se repita.

Decimos, pues, que para una barra de longitud l bastará medir la longitud L_0 correspondiente á un peso P_0. Porque tendremos

$$L_0 = l + AP_0,$$

de donde

$$A = \frac{L_0 - l}{P_0},$$

y como en el segundo miembro todas las cantidades son conocidas, calcularemos el valor de A.

Con lo cual, ya no sólo conocemos el valor de la función, sino el valor de sus constantes.

Y el problema quedará resuelto, siquiera sea en forma aproximada.

***

Pues esto mismo, con ser tan sencillo, podemos repetirlo para la determinación de la función f en el método de Cauchy, de la función de U en el método de Poincaré.

Fijémonos en este último, y empecemos por una transformación natural y evidente.

En el problema de la Elasticidad, al menos en los casos que venimos examinando, á saber: los de equilibrio elástico, y de movimientos elásticos, en los cuales las deformaciones del sistema son muy pequeñas, no se toman por incógnitas las coordenadas de los diferentes puntos, sino sus variaciones.

No se dice: las coordenadas x, y, z del punto A, ¿en qué se han convertido después de la deformación, ó cuáles serán sus valores al cabo del tiempo t, si se trata de vibraciones del cuerpo elástico?

Es decir, que no se consideran x, y, z..... como las incógnitas, sino sus variaciones, que llamaremos, como siempre, u, v, w.

De esta manera, lo que nos importa averiguar, no es la forma de la función

$$U(x, y, z, x', y', z'.....),$$

sino la forma en u, v, w de esta otra función

$$U(x + u, y + v, z + w, x' + u', y' + v', z' + w'.....)$$

Y el problema, sólo por esta consideración de deformaciones muy pequeñas, se simplifica notablemente y hasta se elude la dificultud, que consiste en no conocer la forma de la función U; porque siendo u, v, w muy pequeñas, ocurre el artificio de desarrollar U por la serie de Taylor y de despreciar los términos de orden superior al grado de aproximación que se considere.

De este modo tendremos:

$$U(x+u, y+v, w+z, x'+u'.....) = U(x, y, z, x'.....) +$$

$$+\frac{dU}{dx}u + \frac{1}{1.2}\frac{d^2U}{dx^2}u^2 + \frac{1}{1.2}\frac{d^2U}{dy^2}v^2 + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dz^2}w^2 + ...$$

$$+\frac{dU}{dy}v$$

$$+\frac{dU}{dz}w + \frac{d^2U}{dx\,dy}uv + \frac{d^2U}{dx\,dz}uw + \frac{d^2U}{dy\,dz}vw + ...$$

Por eso decíamos antes que este artificio consistía en substituir á la verdadera forma analítica de U un polinomio entero que coincidiera prácticamente, dentro de ciertos límites, con la función desconocida.

Claro es que esto supone que la función U puede legítimamente desarrollarse por la serie de Taylor con todas las condiciones y restricciones que el análisis enseña.

Y ocurre preguntar, al que por primera vez estudia esta materia.

Si, en efecto, ya tenemos una forma aproximada de la función desconocida U; pero ¿y los coeficientes

$$\frac{dU}{dx}, ... \frac{d^2U}{dx^2} .....?$$

Estos coeficientes son también funciones de x, y, z..... y su forma es tan desconocida como la de la misma función U.

La observación es exacta, pero nótese—y esto es fundamental—que no dependen de las cantidades que determinan la deformación, u, v, w, y que son las verdaderas incógnitas; sino de x, y, z..... que son las coordenadas de las posiciones iniciales de los diferentes puntos, que son, en cierto modo, los datos del problema.

Dicho con más brevedad; los coeficientes en U dependen de la constitución del cuerpo, que debe ser conocida.

O se supone conocida por nuevas hipótesis respecto á dicha constitución.

O se determinan experimentalmente.

En suma, la función U queda dererminada en su forma y en sus coeficientes.

Representando estos, para abreviar la escritura, por las siguientcs notaciones:

$$U(x, y, z, x'.....) = U_o,$$

$$\frac{dU}{dx} = U'_x, \quad \frac{dU}{dy} = U'_y, \quad \frac{dU}{dz} = U'_z,$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = U''_{xx}, \quad \frac{d^2U}{dy^2} = U''_{yy}, \quad \frac{d^2U}{dz^2} = U''_{zz},$$

$$\frac{d^2U}{dx\,dy} = U''_{xy}, \quad \frac{d^2U}{dx\,dz} = U''_{xz}, \quad \frac{d^2U}{dy\,dz} = U''_{yz},$$

la función U podrá expresarse del siguiente modo:

$$U(x + u, y + v, z + w, x' + u') =$$
$$= U_o + U'_x u + U'_y v + U'_z w + U'_{x'} u' + U'_{y'} v' + U_{z'} w' + ...$$
$$\frac{1}{1.2} U''_{xx} u^2 + \frac{1}{1.2} U''_{yy} v^2 + \frac{1}{1.2} U''_{zz} w^2 +$$
$$+ \frac{1}{1.2} U''_{x'x'} u'^2 + \frac{1}{1.2} U''_{y'y'} v'^2 + \frac{1}{1.2} U''_{z'z'} w'^2 + ...$$
$$+ U''_{xy} uv + U''_{xz} uw + U''_{yz} vw +$$
$$+ U''_{x'y'} u'v' + U''_{x'z'} u'w' + U''_{y'z'} v'w' + ...$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ó en forma abreviada designando por Σ la suma de términos semejantes al que se escribe bajo este signo, pero en que se acentúnan las $x, y, z,$ y las $u, v, w,$ tendremos:

$$U(x+u, y+v, z+w, x'+u', \ldots\ldots) =$$
$$= U_0 + \Sigma(U'_x u + U'_y v + U'_z w) +$$
$$+ \frac{1}{1.2} \Sigma(U''_{xx} u^2 + U''_{yy} v^2 + U''_{zz} w^2 +$$
$$+ 2U''_{xy} uv + 2U''_{xz} uw + 2U''_{yz} vw) + \ldots\ldots$$

En esta última expresión observaremos, que el primer término del segundo miembro es una cantidad constante respecto á las variables del problema $u, v, w;$ el segundo grupo es de primer grado en u, v, w, u', v', w'..... y sus coeficientes son constantes en el sentido que hemos expresado; el tercer miembro, es un polinomio homogéneo de segundo grado en u, v, w..... y así sucesivamente.

Si u, v y w son cantidades muy pequeñas, por ejemplo, de primer orden, también podremos decir que U_0 es constante respecto á u, v, w.....; que el segundo grupo es un infinitamente pequeño de primer orden; el tercer grupo un infinitamente pequeño de segundo, y así sucesivamente.

Al hablar de infinitamente pequeños, no empleamos esta palabra en el sentido correcto del cálculo diferencial integral, sino que nos referímos al orden de pequeñez de u, v, w..... con relación á x, y, z.....

Empleamos un lenguaje práctico, no rigurosamente matemático, como el de los infinitamente pequeños de diversos órdenes.

Mr. Poincaré, aun simplifica más las notaciones, y representa el segundo grupo por U_1; el tercer grupo por U_2, y así sucesivamente.

De este modo puede escríbirse la función U bajo esta forma:

$$U(x+u, y+v, z+w, x'+u'\ldots\ldots) = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ldots$$

en que U_0 es constante, quiero decir, independiente de u, v, w; U_1 es de primer orden de pequeñez; U_2 de segundo orden, y análogameute los demás términos de la serie.

Y explicadas estas nociones preliminares, entremos en el estudio de la Elasticidad por el método que vamos explicando.

***

Lo primero que hay que hacer es marcar, por decirlo de este modo, el punto de partida.

Considerando el problema del equilibrio elástico, porque como hemos dicho tantas veces en el curso anterior, y como se sabe por Mecánica elemental, las ecuaciones del equilibrio sirven para el movimiento con sólo agregar á las fuerzas exteriores las fuerzas de inercia, es lo primero definir, como indicábamos hace un momento, el estado inicial.

Más claro aun.

El problema de la Elasticidad, es este:

Dado un cuerpo elástico, ó de otro modo capaz de deformarse por acciones exteriores, pero que resiste á esta deformación desarrollando fuerzas interiores, que se llaman elásticas, y que procuran, para expresarnos de este modo, que el cuerpo vuelva á su posición inicial; y dadas las fuerzas exteriores que sobre el sistema actúan, determinar la deformación y los esfuerzos que en toda la extensión del cuerpo se desarrollan.

Por ejemplo, si un punto del cuerpo está definido por las coordenadas x, y, z, se pregunta, ¿adónde habrá ido á parar por la deformación elástica, provocada por las fuerzas exteriores cuyas componentes llamaremos X, Y, Z.....?

¿En qué se habrán convertido x, y, z?

O de otro modo.

¿Cuáles serán sus variaciones u, v, w?

Conocidas estas últimas, claro es que las nuevas coordenadas del punto serán:

$$x + u,\ y + v,\ z + w.$$

Y el punto ocupará la posición determinada por estas tres cantidades.

Si para todos los puntos del cuerpo elástico conocemos u, v, w, conoceremos la deformación del cuerpo en toda su extensión.

Luego en términos sintéticos, podemos decir, que resolver el problema de la Elasticidad, es determinar u, v, w para cada punto en función de las fuerzas, que actúan sobre el cuerpo y que forman parte de los datos; es decir, obtener tres funciones como las siguientes:

$$u = \varphi_1 (x, y, z, P, Q, R.....),$$
$$v = \varphi_2 (x, y, z, P, Q, R.....),$$
$$w = \varphi_3 (x, y, z, P, Q, R.....).$$

Porque en este caso, para conocer lo que ha variado un punto x, y, z no habría más que substituir estas coordenadas en las tres ecuaciones anteriores: las φ son funciones conocidas puesto que el problema está resuelto, y por otra parte las componentes P, Q, R son conocidas también, pues son los datos: representan las fuerzas que actúan sobre el sistema.

Otro tanto diríamos para el caso del movimiento, sólo que entonces en el segundo miembro entraría la variable t y las ecuaciones serían

$$u = \psi_1 (x, y, z, t, P, Q, R.....),$$
$$v = \psi_2 (x, y, z, t, P, Q, R.....),$$
$$w = \psi_3 (x, y, z, t, P, Q, R.....).$$

Las cuales nos darían la variación de cada punto en cada instante, poniendo en el segundo miembro las coordenadas del punto, y en vez de t su valor para el instante que se considera.

Todo esto es sencillísimo, pero por sencillo que sea, cnando se trata de la enseñanza, no debe omitirse, porque realmente el alumno que no ha estudiado una materia, entra en un mundo completamente desconocido, y á veces para él, los conceptos más elementales son enigmas complicadísimos.

Este es el problema general de la Elasticidad.

Los datos son: *el cuerpo ó sistema elástico y las fuerzas exteriores.*

Las fuerzas exteriores ya se definirán por sí, ya se nos dirá si se trata de pesos ó de presiones ó de atracciones por centros externos, ó de otro sistema cualquiera de esfuerzos.

Pero el cuerpo, su constitución y su estado, es otro dato del problema.

¿En qué situación se encuentra el cuerpo elástico al someterlo á la acción de fuerzas exteriores P, Q, R.....?

¿Cual es su estado natural — como antes se decía — ó su estado inicial, como en rigor debe decirse?

Esta cuestión del estado inicial, no es tan sencilla como parece, y al plantear el problema, no todos los autores están conformes.

Sobre ella, en cursos anteriores, hemos dicho bastante; pero como este es un nuevo curso, no estará demas repetir algo de lo que en aquellas ocasiones expusimos.

***

Tres hipótesis pueden hacerse para deflnir el estado de un cuerpo ó sistema en el instante en que sobre él actúan fuerzas exteriores, provocando el desarrollo de nuevos esfuerzos interiores ó reacciones elásticas.

1.° Que el estado del cuerpo, y de todos los puntos que

le constituyen, sea tal, que considerando sus elementos, y casi pudiéramos decir sus moléculas, en suma, sus diferentes puntos materiales *m, m', m''.....*, *la acción entre cada dos puntos sea nula;* pero que si varían las distancias se desarrollen fuerzas atractivas ó repulsivas, según aumente ó disminuya la longitud de la recta que une cada dos puntos *m* y *m'*.

Sean *a, b, c, d.....* los diferentes elementos materiales de masas *m, m', m'', m'''.....*

La hipótesis qne acabamos de admitir y que puntualizamos ahora es la siguiente:

Dos puntos cualesquiera *m, m'* (fig. 26) están á tal distancia *a b* que su acción es nula.

Si *m'* pasa de *b* á *b'*, la fuerza es repulsiva y el punto tiende á volver á *b*.

Si la misma masa *m'* se aleja de *m* y va á parar á *b''*, la fuerza es atractiva.

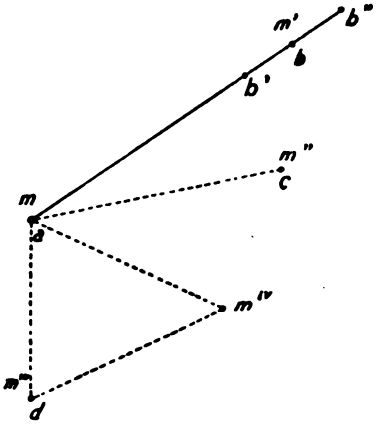


Figura 26.

Esto mismo se supone que se verifica entre todos los puntos del sistema dos á dos.

Por ejemplo: la acción entre *m* y *m''* es nula también, y entre *m* y *m'''* y entre *m''* y *m'''*, y así sucesivamente.

Tal como estamos explicando el estado inicial del sistema elástico que se considera, admitimos implícitamente que las fuerzas son centrales; y para no alargar esta discusión, no intentaremos generalizar las condiciones indicadas para el caso en que las fuerzas no lo sean.

Pero ¿es posible colocar un sistema de puntos en las posiciones que acabamos de indicar?

¿Es posible geométrica y mecánicamente la hipótesis que se atribuye á Lamé?

Este problema ya lo tratamos, aunque no de una manera completa, en los cursos anteriores.

Ahora sólo recordaremos algo de lo que en aquellas ocasiones dijimos.

Dado un sistema de puntos materiales, para fijar la posición de cada uno de ellos necesitamos tres coordenadas; de modo que si el número de punfos es n, el número de incógnitas será $3n$.

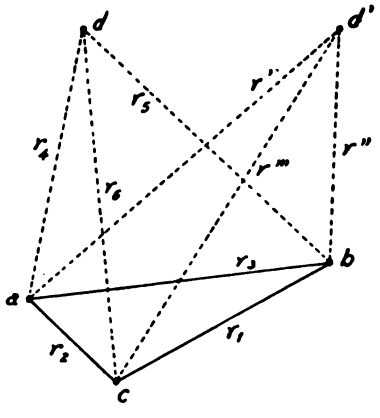


Figura 27.

Pero estas $3n$ incógnitas son en número mayor que el necesario para fijar la forma geométrica de los puntos materiales que constituyen el sistema.

Fijan esta forma, pero además fijan la posición del sistema dado, relativamente á los ejes de coordenadas. Y esto último nos importa poco para nuestro caso.

Si el sistema está en equilibrio y cada dos puntos cumplen con las condiciones que hemos establecido, el equilibrio subsistirá, sean cuales fueren los ejes coordenados que se elijan.

Para dar más rigor á estas consideraciones, determinemos el número mínimo necesario y suficiente para fijar la posición relativa de n puntos, y tomemos como nuevas coordenadas las distancias entre cada dos de ellos.

De este sistema de coordenadas hemos de hablar más adelante al desarrollar analíticamente el método de Mr. Poincaré.

Tomemos en el sistema de puntos tres de ellos a, b, c (fig. 27).

Sus posiciones relativas, ó sea la figura que forman, estará dada por las tres distancias

$$bc = r_1; \quad ac = r_2; \quad ab = r_3.$$

Otro punto cualquiera d estará definido con relación á los anteriores conociendo las tres distancias

$$ad = r_4; \quad bd = r_5; \quad cd = r_6.$$

Y lo que hemos dicho del punto d, diríamos de otro punto del sistema.

Para conocer su situación, basta conocer las tres distancias r', r'', r''' á los tres puntos a, b, c.

De este modo se determinará la relación de todos los puntos que constituyen el sistema elástico, y el número de estas distancias será necesario y suficiente para determinar la distribución geométrica de los diferentes puntos y sus posiciones relativas.

Veamos ahora cuál es el número de estas distancias r.

Para fijar los puntos a, b, c, ó la figura que forman, hemos necesitado *tres distancias* r_1, r_2, r_3.

Como el sistema tiene n puntos, el número de los puntos restantes d, d'..... será evidentemente $n-3$.

Cada uno de éstos necesita para fijar su posición tres distancias, r', r'', r'''; luego el conjunto de los puntos d, d', d''..... se determinará por $3\,(n-3)$.

Y como para fijar los puntos a, b, c habíamos dicho que se necesitaban tres distancias, el número total de las necesarias, para fijar la distribución de los n puntos, será

$$3\,(n-3) + 3 = 3n - 6.$$

A este mismo resultado hubiéramos llegado con las coordenadas ordinarias, porque dada la figura geométrica que

constituye los n puntos, para fijar la posición de uno de ellos con relación á los planos coordenados, se necesitarían tres coordenadas; para fijar la posición de otro, dos coordenadas son necesarias y suficientes, porque la distancia de este punto, al que ya hemos citado, es conocida.

Y, por último, para fijar la posición de otro punto, cuyas distancias á los dos ya determinados son cantidades fijas, basta otra coordenada.

En totalidad, son

$$3 + 2 + 1 = 6,$$

que debemos restar del número total de coordenadas $3n$, porque estas seis cantidades no se refieren al sistema, sino á su posición relativamente á los planos coordenados.

Resulta, pues, salvo la consideración de posiciones simétricas, que el número de cantidades necesarias para determinar la figura del sistema es como antes, $3n - 6$.

Este número de distancias es, como hemos dicho, necesario y suficiente.

Y ahora volvamos á la cuestión que debatíamos.

***

Entre n puntos, tomándolos dos á dos, resulta que el número de distancias será

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Y como para cada distancia habrá una ecuación de condición, que exprese, que la acción entre los dos puntos extremos es nula, es decir, por ejemplo:

$$mm' f(r) = 0,$$

el número de estas ecuaciones de condición será, evidentemente,

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

En suma, para determinar $3n - 6$ incógnitas r..... tenemos $\frac{n(n-1)}{2}$ de condición.

Ahora bien; si $n = 2$ el problema es posible, porque $\frac{n(n-1)}{2}$ se reduce á 1, y $3n - 6$ es cierto que se reduce á cero, porque en esta fórmula no está comprendido el caso de dos puntos no más; pero es evidente que, para dos puntos, la distancia es única, de suerte que hay una ecuación y una incógnita.

Para $n = 3$ se tiene $\frac{n(n-1)}{2} = 3$; y $3n - 6 = 3$; de suerte que hay tantas ecuaciones como incógnitas.

Para $n = 4$ resulta $\frac{n(n-1)}{2} = 6$; y $3n - 6 = 6$, y también resultan iguales el número de ecuaciones de condición y el número de incógnitas.

Pero desde $n = 5$ en adelante,

$$\frac{n(n-1)}{2} > 3n - 6;$$

de suerte que, siendo el número de ecuaciones superior al número de incógnitas, lo probable es que el problema sea imposible.

Decimos lo probable, pero no lo aseguramos; para asegurarlo, sería preciso conocer la naturaleza de la función $f(r)$.

Esta discusión que nos conduciría á resultados muy curiosos, no es de este momento y debemos prescindir de ella.

Para nuestro objeto basta con haber apuntado algunas ideas generales sobre la hipótesis que vamos examinando.

2.° Puede suceder que el estado inicial del sistema sea tal que las fuerzas internas se hagan equilibrio en cada punto sin que aisladamente sean nulas.

Se supone, además, que no existen fuerzas exteriores.

Parece que este caso ideal, y decimos ideal porque fuerzas exteriores existen siempre, parece, repetimos, que es posible.

Porque, en efecto, para determinar un sistema de n puntos, que suponemos enlazados por fuerzas interiores entre las molécolas, hemos visto que son necesarias y suficientes $3n - 6$ cantidades.

Siendo n el número de puntos y debiendo ser iguales á o las tres componentes que actúan sobre cada punto para el equilibrio de éste, tendremos $3n$ ecuaciones de condición para determinar las $3n - 6$ incógnitas; y á primera vista resultan seis ecuaciones más.

Sin embargo, lo natural es que todas las fuerzas internas se hagan equilibrio como si el sistema fuese rígido, dado que la reacción es igual y contraria á la acción; en cuyo caso las $3n$ ecuaciones deberán satisfacer á 6 ecuaciones que expresarán, con relación á cualquier punto del espacio, que las componentes totales y los tres pares totales del sistema de fuerzas, sean separadamente iguales á cero.

Es decir, que las $3n$ ecuaciones de equilibrio satisfacen idénticamente á seis ecuaciones, y, por lo tanto, se reducen á $3n - 6$ ecuaciones distintas.

Todo esto es de buen sentido, intuitivo en cierto modo, y aun probable; pero no es de evidencia matemática, porque mientras no se conozcan las formas de las $3n - 6$ ecuaciones no puede asegurarse que sirvan para determinar los valores de las $3n - 6$ incógnitas r.....

- En efecto; dado un número cualquiera de ecuaciones, mientras no se conozca su forma no podemos asegurar que

el problema sea posible: pudieran ser incompatibles ó pudieran reducirse á menor número.

El hecho de que el número de ecuaciones sea igual al número de incógnitas es, si se nos permite la expresión, un buen *síntoma*, pero nada más.

3.° Puede suponerse también que el llamado estado natural consista en un estado previo de equilibrio entre las fuerzas interiores y fuerzas exteriores.

Es decir, que se hayan aplicado á los puntos ciertas fuerzas exteriores, las cuales habrán desarrollado fuerzas elásticas, llegando el sistema obtiene á un estado de equilibrio determinado.

Este no es el estado natural que suponen algunos autores, porque es un estado elástico en que actúan fuerzas exteriores.

Pero en rigor este es el estado natural de los cuerpos.

Los demás estados que hemos considerado hasta aquí son estados *ideales*.

En la realidad no hay cuerpo que no esté sometido á fuerzas exteriores, por ejemplo, la presión de la atmósfera ó la gravedad, ó la reacción de los puntos de apoyo.

Así el verdadero problema de Elasticidad, que hemos de estudiar, es la superposición de un problema de Elasticidad á otro precedente.

En un sistema elástico actuaban, según las notaciones de Mr. Poincaré, fuerzas interiores cuyas componentes representaremos por

A_1, B_1, C_1 para el punto m_1

A_2, B_2, C_2 para el punto m_2

. . . . . .

A_n, B_n, C_n para el punto m_n

O abreviadamente

$$A_i,\ B_i,\ C_i$$

variando i desde 1 hasta n.

Actuaban asimismo fuerzas exteriores, que por el mismo sistema de notaciones, representaremos por

$$P_i,\ Q_i,\ R_i.$$

Y entre las fuerzas exteriores y las interiores, suponemos que existía equilibrio, de modo que se verificarían esta serie de ecuaciones en número $3n$

$$A_i + P_i = 0,$$
$$B_i + Q_i = 0,$$
$$C_i + R_i = 0,$$

variando siempre i entre 1 y n.

En tal estado, el cuerpo se dice que se halla en estado natural, según Mr. Poincaré, estado que como hemos dicho es el verdadero.

Ahora bien; á este cuerpo se le aplican nuevas fuerzas exteriores, cuyas componentes designaremos por

$$X_i,\ Y_i,\ Z_i.$$

Y el problema de Elasticidad que se nos plantea, es el siguiente:

Determinar las deformaciones y los esfuerzos engendrados por las nuevas fuerzas cuyas componentes acabamos de escribir.

***

Partiendo de esta última hipótesis, para el estado natural, ó inicial, el método que ha de seguirse para resolver el problema y la hipótesis de que se parte ya los hemos indicado en sus lineas generales.

La hipótesis de que partimos, es decir, de que se parte

en el método de Mr. Poincaré, es la de la conservación de la energía, que explicaremos una vez más.

Si al sistema elástico se le hace sufrir una serie de deformaciones infinitamente pequeñas, y sin velocidad, constituyendo un ciclo cerrado, es decir, volviendo el sistema á su posición de equilibrio inicial, será imposible, ni crear nueva energía, ni anular la energía existente.

Y esto, en el problema que estamos examinando, equivale á esta condición analítica: que las fuerzas internas se deriven de una función de fuerzas, que llamaremos como antes

$$U(x, y, z, x', y', z' \ldots\ldots).$$

De modo que en cada punto (x, y, z) las componentes de la fuerza interna que sobre él actúa, serán

$$\frac{dU}{dx}, \quad \frac{dU}{dy}, \quad \frac{dU}{dz}.$$

Y en efecto, en este caso el trabajo en un elemento de deformación, será una diferencial exacta,

$$\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz = dU$$

para cada punto, y por lo tanto para todos ellos, y la difencia del trabajo, que será la energía total, porque la energía cinética hemos supuesto que es nula, sólo dependerá de las coordenadas extremas, y cuando se cierre el ciclo y vuelvan los puntos á su primera posición, será nulo dicho trabajo, ó dicha energía.

Esto es repetir en forma abreviada lo que ya hemos explicado en la conferencia precedente con mayor extensión.

***

De las tres hipótesis que acabamos de hacer respecto al estado inicial, ya hemos dicho que prescindimos de la primera, que es puramente ideal, y por lo menos dudosa.

Prescindimos de la segunda, que tampoco se encuentra en la Naturaleza, á no ser en forma aproximada: las fuerzas exteriores podrán ser muy pequeñas, pero no pueden ser nulas.

Un sistema de puntos materiales no puede aislarse en absoluto del resto del Universo.

Aceptamos, en fin, la hipótesis de Poincaré respecto al estado natural del cuerpo al ser sometido á las condiciones de un problema de Elasticidad, que en el fondo es la superposición de estados elásticos.

Y apurando mucho el análisis y la crítica, tampoco el estado inicial que acabamos de definir es un verdadero estado natural; también es un estado ideal, aunque menos ideal que los anteriores; quiero decir que está más cargado de realidad, si se me permite la expresión, que el supuesto estado natural de las dos primeras hipótesis.

Y la razón es muy sencilla.

Se supone que el cuerpo se encuentra en estado de equilibrio estático, es decir, que las velocidades de los diferentes puntos es nula, y esto no sucede nunca en la Naturaleza. Un cuerpo en estado natural está sujeto á fuerzas interiores, como las A, B, C; á fuerzas exteriores, como las P, Q, R; y sus puntos tienen determinadas velocidades.

Suponer otra cosa, sería suponer que el cuerpo no tenía temperatura, sino que había llegado al cero absoluto.

El verdadero estado natural de un cuerpo no es de equilibrio estático, será, cuando más, de equilibrio dinámico; quiero decir, un estado de movimiento, pero estable.

Y así también, el problema de Elasticidad que vamos á estudiar, tampoco es en el fondo un problema de equilibrio, sino un problema dinámico.

Cuando sobre un cuerpo en estado natural actúan fuerzas

exteriores, lo natural es que comuniquen nuevas velocidades á los diferentes puntos del sistema.

Hace mucho tiempo que se ha dicho esto.

El equilibrio es una ficción, un idealismo de la Mecánica, una pura abstracción.

Y ocupándonos siempre en el mundo inorgánico, y sin abordar otra clase de problemas, claro es que todos estos de equilibrio y estática tienen mucho de convencional.

Convencionalismos útiles, casi nos atreveríamos á decir necesarios, para el desarrollo y aun para la enseñanza de la Ciencia, pero á los cuales no debemos atribuir un carácter de realidad que no tienen.

***

Estas últimas consideraciones justifican ciertas ideas que hemos expuesto en otras conferencias.

Dábamos gran importancia á la teoría de la Elasticidad, porque decíamos que si se pudiera estudiar en toda su extensión y en toda su profundidad, sería el problema único de la Fisica-matemática, sobre todo en la hipótesis mecánica, y casi nos atreveríamos á decir que en cualquier hipótesis.

Por el pronto, en la hipótesis mecánica, lo acabamos de ver confirmado por lo que se refiere al calor.

Desde el momento en que se tiene en cuenta las velocidades de los diferentes puntos materiales que constituyen un sistema elástico, no hay que esforzarse mucho para confundir en uno solo estos dos problemas: el de la Elasticidad y el de la Termodinámica.

¿Qué hay en un problema de termo-dinámica que no encontremos en un problema de elasticidad?

En ambos encontramos:

Puntos materiales constituyendo el sistema. Estos pun-

tos serán pequeños elementos del cuerpo, ó moléculas, ó átomos.

En el problema abstracto se confunden todos estos nombres.

En uno y en otro problema encontramos fuerzas interiores.

En ambos, fuerzas exteriores, en el caso más general.

Y en ambos debemos suponer que los elementos, partecillas materiales, moléculas ó átomos, que por el pronto confundimos unos con otros, están en movimiento.

Y todas estas ideas no son caprichosas, no las presentamos por el afán de generalizar los problemas á poca costa y sin graves riesgos, porque así generalizados no los hemos de resolver.

No nos encariñamos con fantasmas.

Si hasta ahora no se ha aplicado la teoría de la elasticidad á la Termodinámica, en cambio es un hecho que por la Termodinámica hay autores que resuelven el problema de la elasticidad, y encontramos un ejemplo en la teoría de la elasticidad de Mr. Poincaré: alguna vez estudiaremos tal aspecto del problema en estas conferencias, á sernos posible.

Lo que hay es, que siendo el problema de la Termodinámica un verdadero problema de elasticidad, de elasticidad-dinámica, pudiéramos decir, toma un carácter especial al introducir el concepto de temperatura, y al buscar en los cálculos, no la velocidad en cada instante de cada punto, sino una especie de valor medio de su fuerza viva.

Pero estas son consideraciones que ahora no podemos desarrollar.

Atengámonos por el momento al problema elástico en los términos, hasta cierto punto prácticos, en que hasta ahora se ha planteado, y lleguemos de una vez, aunque en rigor tenemos mucho camino andado para nuestro objeto, á la exposición del método de Mr. Poincaré, que será la materia de la conferencia inmediata.

En rigor ya hemos empezado esta tarea, aunque hayamos marchado con cierta lentitud.

XXXVIII.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décima.

SEÑORES:

Vamos á repetir una vez más, como nuevo resumen, lo que ya hemos dicho varias veces en este curso; pero creo que mis oyentes ó mis lectores han de agradecerme estas *repetidas repeticiones,* porque en la enseñanza elemental las repeticiones son provechosas.

Cuando se recorre un camino por primera vez, no basta mirar siempre hacia adelante; conviene detenerse de cuando en cuando y volver la mirada atrás, para hacerse cargo del camino recorrido y de la configuración del terreno, vistas de conjunto que ordenan los recuerdos y los puntos de vista parciales dentro de una unidad sintética.

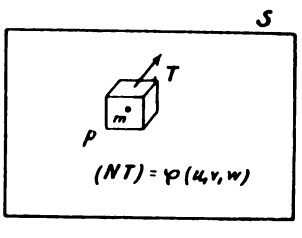


Figura 28.

Y por eso voy á decir, que las tres figuras 28, 29 y 30 simbolizan en cierto modo y son verdaderos esquemas de los tres métodos, que para resolver el problema de la Elasticidad venimos explicando: el método de Lamé, el método de Cauchy y el método de Poincaré.

En la figura 28 está simbolizado el método de Lamé. El ebuilibrio de cada punto *m* se expresa rodeándolo de un paralelepípedo elemental *p*, determinando en función de datos

é incógnitas las tensiones sobre sus caras y escribiendo las ecuaciones, que expresan el equilibrio de este sólido elemental.

La figura 29 sintetiza, en cierto modo, el método de Cauchy. Un punto cualquiera *m* del sólido elástico *S* está solicitado por los demás puntos de dicho sólido *m'*..... y basta escribir las ecuaciones de equilibrio del punto *m*.

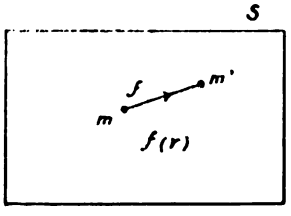


Figura 29.

La figura 30 expresa sintéticamente, y también pudiera decir esquemáticamente, el método de Poincaré.

También hay que expresar el equilibrio de cada punto *m*, buscando la acción de los demás puntos *m'*.

Pero estas fuerzas *f* ya no son centrales.

Y ahora agregamos, para completar nuestra comparación, que en cada uno de estos métodos entran *funciones desconocidas*.

En el método de Cauchy (fig. 29), la función desconocida *f(r)* que expresa la acción de dos puntos de masa *m* á la distancia *r*.

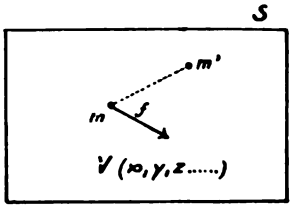


Figura 30.

En el método de Poincaré (figura 30) también entra una función desconocida *U*, que es la función de fuerzas, igual y de signo contrario á la función potencial; porque, como hemos dicho en la conferencia precedente, en el método de Mr. Poincaré, el principio de la conservación de la energía suple al principio de las fuerzas centrales del método de Cauchy.

Y también en el método de Lamé entran funciones desconocidas; porque hemos de recordar que dicho método tiene

dos partes: primera, expresar el equilibrio del paratelepípedo elemental en función de las tensiones; segunda, expresar las tensiones en función de las deformaciones, es decir, las N, T en función ó en funciones φ de las deformaciones u, v, w.

Y en estos tres métodos, que tan distintos son en el fondo, vamos encontrando, sin embargo, semejanzas, analogías, en cierto modo paralelismo.

Se va repetidas veces en la Ciencia de un punto á otro; parece que se va por caminos distintos, y distintos son en rigor; pero como el problema es el mismo, los caminos tienen que marchar por la misma zona de terreno.

Y así, en los tres métodos, hay que expresar el equilibrio de un elemento del sistema, porque en la Ciencia no se obtiemen de un golpe las leyes *totales* y *finitas*, y hablamos en términos generales; sino que hay que penetrar en los elementos infinitamente pequeños, donde, al menos, para nuestra inteligencia, las leyes se simplifican.

Y después, en los tres métodos, nos encontramos como dificultad, al parecer irresoluble del problema, con funciones desconocidas: φ ó funciones que enlazan las tensiones con las deformaciones en el método de Lamé; f ó función que expresa la acción central de dos elementos en el método de Cauchy; U ó función de fuerzas, función igual y contraria á la potencial, que ya no expresa esfuerzos, sino energías, en el método de Poincaré; por eso hemos dicho que este método tenía orientaciones hacia la nueva Física matemática, la cual á su vez tiende á ir substituyendo las fuerzas por las energías.

Y desde aquí el paralelismo es aún mayor, porque la manera de introducir en el cálculo, en cada uno de estos métodos, la función que le corresponde φ, f, U, es exactamente la misma; como que es un procedimiento de cálculo.

Ya que no podemos conocer estas funciones y que lo que nos interesa, dada la naturaleza del problema, es conocer

sus variaciones para variaciones muy pequeñas de sus variables independientes, lo que se hace es desarrollarlas por la serie de Taylor; lo mismo según Lamé, que según Cauchy, que según Poincaré: siempre igual, substituir á una función que no conocemos, y en una extensión suficientemente pequeña, una función algebráica, ordenada por las potencias de los incrementos y en que los coeficientes se referirán á un estado que es el estado inicial ó el de punto de partida: en rigor este debe ser un dato.

Y el paralelismo continúa, porque la simplificación inmediata procede de una hipótesis que es idéntica en los tres casos, á saber: que sobre cada punto del sistema elástico no influyen los puntos lejanos, sino los próximos, los puntos que distan de aquel cuyo equilibrio hemos de establecer, longitudes menores que el radio de actividad molecular.

Pues todavía la semejanza, el paralelismo, mejor dicho la identidad, para esta etapa de los tres métodos, continúa, porque al llegar á este punto, lo que se hace es atender para determinar la forma de los coeficientes á la naturaleza del cuerpo elástico: si es homogéneo, si es heterogéneo, si tiene un eje de simetría ó uno ó varios planos de simetría también, y, por fin, si es isótropo.

Y al llegar aquí ya no hay paralelismo, sino identidad, porque los tres métodos conducen á las mismas ecuaciones diferenciales, que era el punto á que queríamos llegar, y apenas si en los coeficientes hay una diferencia que, como dice Mr. Poincaré, puede servirnos para comprobar el grado de exactitud de la hipótesis de las fuerzas centrales.

***

Todavía es punto de semejanza entre los tres métodos—aunque esto nada tiene de particular, porque es una condi-

ción del problema—, la necesidad de definir el punto de partida, que es lo que llamábamos el estado natural del cuerpo.

Sobre el estado natural del cuerpo, vimos que se podían hacer tres hipótesis.

Se aplicaba la primera á la teoría de las fuerzas centrales, suponiendo el equilibrio entre cada dos puntos.

Y como esto traía consigo, siendo n el número de puntos $\frac{n(n-1)}{2}$ ecuaciones de condiciones entre $3n-6$ incógnitas, que son las necesarias y suficientes para definir un sistema de n puntos, y como desde $n=5$ en adelante, el primer número es superior al segundo, desechábamos esta hipótesis, que ya hemos analizado más detenidamente en cursos anteriores, y la desechábamos por la razón expuesta y por otras que sería largo de enumerar.

Es un estado ideal, más que un estado natural, y probablemenre imposible en la práctica.

En la segunda hipótesis se supone que no existen fuerzas exteriores, y que las fuerzas interiores, sin ser nulas aisladamente, se equilibran sobre cada punto.

A *priori* no puede desecharse tal hipótesis, porque el número de incógnitas es $3n-6$ y el número de ecuaciones, contando con que las fuerzas satisfacen á las seis ecuaciones de equilibrio de un cuerpo sólido, es también $3n-6$.

Es también un caso ideal, porque fuerzas exteriores siempre existen.

Pero posible y que en la práctica puede suponerse que se realiza aproximadamente.

La tercera hipótesis es la de Poincaré.

Se supone un estado inicial de equilibrio entre las fuerzas interiores y exteriores, y todo problema de elasticidad, se aplica á cuerpos que se encuentran en dicho estado, y á los cuales se somete á la acción de *nuevas fuerzas*.

Esta será la hipótesis que nosotros admitiremos; y en rigor, éste tampoco es un estado natural, porque prescindi-

mos de las velocidades iniciales de los diferentes puntos, que es como si dijéramos, de la temperatura del cuerpo.

Sólo podría realizarse, si dicho cuerpo estuviera al cero absoluto de temperatura.

Ya lo hemos dicho varias veces: el problema general de Termodinámica es un problema de Elasticidad; y recíprocamente, las fórmulas de la Elasticidad pueden obtenerse, como veremos en otra ocasión, aplicando los principios de la Termodinámica.

En estas pocas líneas hemos hecho el resumen de la conferencia precedente, para enlazar lo que en ella dijimos con lo que hemos de exponer en esta conferencia.

***

Así como somos aficionados, acaso con exceso, á volver la vista atrás, á examinar, por decirlo así, los terrenos que hemos recorrido y el camino que hemos venido siguiendo, á fin de tener una idea del conjunto, idea que se expresa en éstas síntesis generales que vamos haciendo, así también nos agrada dirigir la vista hacia adelante para formarnos una idea sintética del camino que vamos á recorrer y de los horizontes que ante los alumnos se dilatan, horizontes que debemos suponer que son para ellos desconocidos.

Digo esto, porque antes de entrar en el mecanismo del método de Mr. Poincaré, me propongo dar una idea de conjunto, aunque ya en conferencias anteriores he empezado á realizar este trabajo.

Dijimos, en efecto, que el ilustre matemático parte de la hipótesis de que los cuerpos elásticos están compuestos de innumerables puntos materiales, entre los cuales se desarrollan fuerzas internas atractivas ó repulsívas.

Agregamos, que en la nueva teoría se prescinde de la hipótesis de las fuerzas centrales, pero que se supone que

existe una función de fuerzas, que es como decír que al principio de las fuerzas centrales, se substituye el principio de la conservación de la energía.

Con esto, en rigor, basta para comprender el método de Mr. Poincaré en su conjunto.

Pero en su aplicación, en sus procedimientos analíticos, también difiere, tanto del método de Lamé y sus análogos, como del método de Cauchy y sus discípulos.

Su procedimiento matemático puede condensarse en los siguientes términos, que por el pronto acaso parezcan un poco vagos, pero ya los iremos precisando.

1.° A las coordenadas x, y, z substituye por completo, ó en gran parte, y esta limitación ya la explicaremos en breve, las distancias entre cada dos puntos del sistema. Y al decir *distancias* no hemos dicho bien; lo que introduce en sus cálculos son los *cuadrados de estas distancias*, que representa en general por R.

2.° Antes de obtener las ecuaciones de equilibrio de los diferentes puntos, expresa en función de R, R', R''..... la función de fuerzas U, ó si se quiere, la potencial del sistema; y esto es natural, porque el equilibrio de cada punto del cuerpo elástico, ó mejor dicho, sus ecuaciones de equilibrio, suponen el conocimiento de las fuerzas internas ó de sus componentes, y estas hemos visto en la conferencia anterior que son las derivadas por relación á x ,y, z de la función de fuerzas U.

3.° Siguiendo la marcha general de todos estos problemas, que ya explicábamos en nuestras últimas conferencias, establece la hipótesis de que la influencia de unos puntos materiales sobre otros, sólo es apreciable cuando la distancia entre cada dos puntos es inferior al radio de la acción molecular.

Y esta simplificación, de casi todos los problemas de la Física matemática, toma en el método de Mr. Poincaré una forma más precisa, que explicaremos detenidamente, aunque por ahora la expresemos con cierta vaguedad, diciendo que,

en cierto modo, la potencial del sistema es la suma de las potenciales de diferentes elementos encerrados en volúmenes infinitamente pequeños del cuerpo, como si estos elementos estuvieran aislados.

O en forma más concreta: *la potencial del conjunto es la suma de las potenciales de los elementos.*

4.° De este modo obtiene una expresión de U, que después de varias transformaciones resulta, por ejemplo, en el caso de los cuerpos isótropos, que depende de aquellos seis coeficientes que determinábamos en el curso anterior para marcar la deformación de cada elemento del sólido elástico, elementos que llamábamos a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, (pág. 109 del tomo anterior).

Marchando por otro camino, llegamos á un punto que, si no es el mismo que en el método de Lamé, tiene con él grandes analogías; allí expresábamos, por ejemplo, las tensiones N, T en función de a, b.

Aquí expresamos las potenciales en función de estos mismos elementos a, b.

Y es natural; si la potencial del sistema la reducimos á la suma de las potenciales de los elementos del sólido, como la potencial depende de la deformación, es decir, de lo que cada punto varía, porque de estas variaciones depende la variación de energía del sistema, natural es que ésta dependa de las cantidades que determinan y definen dicha deformación, es decir, de las a y b, ó en general, de las nueve derivadas $\frac{du}{dx}$.....

5.° Obtenida esta expresión simplificada de la potencial U, Mr. Poincaré no toma sus derivadas con relación á x, y, z para substituirlas en las ecuaciones de equilibrio de cada punto, sino que escoge otro camino, al parecer distinto del primero, en el fondo idéntico, y que tiene sus ventajas indiscutibles.

Expresa el equilibrio del sistema aplicando el principio de las velocidades virtuales, ó si se quiere de los trabajos ele-

mentales, para lo cual está brindándose, por decirlo de este modo, la función de fuerzas ó la función potencial, al menos para las fuerzas internas. Como que precisamente integrando términos de esta forma:

$$Xdx + Ydy + Zdz,$$

se ha obtenido, por representar estos grupos diferenciales exactas, la función potencial U; claro es que, tomando su variación d, llegaremos á los trabajos virtuales.

6.° Por medio de la integración por partes, ó, si se quiere, por una fórmula muy conocida de análisis, se obtiene una integral que ha de ser igual á cero, y cuyos elementos se demuestra también que han de ser nulos.

Precisamente de este modo se llega á las ecuaciones de equilibrio, que coinciden, ó pueden coincidir, exactamente con las de Lamé, y de paso se han obtenido las componentes N, T de las tensiones.

Coincidencia curiosa: al principio, el método de Poincaré tenía cierta semejanza con el de Cauchy; luego se separó de esta dirección, sin aproximarse al método de Lamé, del cual era esencialmente distinto; y al fin se viene á dar, respecto á la forma, en las ecuaciones clásicas de este último autor.

***

Consideremos un sólido elástico S sometido á fuerzas interiores, cuyas componentes para cada punto de los n puntos materiales que constituyen dicho sistema S, designaremos, según la notación de Mr. Poincaré, por

$$A_i, \quad B_i, \quad C_i.$$

El subíndice i tomará todos los valores desde 1 á n.

Designaremos, asimismo, por

$$P_i, \quad Q_i, \quad R_i$$

las tres componentes de las fuerzas exteriores que actúan sobre cada punto designado por el subíndice i.

Las ecuaciones de equilibrio serán, evidentemente,

$$\begin{aligned} A_i + P_i &= 0, \\ B_i + Q_i &= 0, \\ C_i + R_i &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

en cuyo grupo estarán, evidentemente, contenidos los n grupos

$$\begin{aligned} A_1 + P_1 &= 0, \\ B_1 + Q_1 &= 0, \\ C_1 + R_1 &= 0, \\ A_2 + P_2 &= 0, \\ B_2 + Q_2 &= 0, \\ C_2 + R_2 &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n + P_n &= 0, \\ B_n + Q_n &= 0, \\ C_n + R_n &= 0. \end{aligned}$$

Son, pues, $3n$ ecuaciones que determinarán las $3n$ coordenadas de los n puntos del sistema, para que en dicho sistema estén en equilibrio las fuerzas interiores y las fuerzas exteriores, constituyéndose de esta manera el estado natural, ó, si se quiere, el estado inicial del cuerpo.

Claro es que si representamos por U la función de fuerzas, las componentes A_i. B_i. C_i. estarán definidas en general, según la hipótesis de que se parte en este método, por las expresiones

$$A_i = \frac{dU}{dx_i}, \quad B_i = \frac{dU}{dy_i}, \quad C_i = \frac{dU}{dz_i}. \qquad (2)$$

Y definido el estado inicial, pasemos al problema general de la Elasticidad, aplicando á dicho cuerpo fuerzas exteriores sobre cada punto, cuyas componentes serán

$$X_i, \quad Y_i, \quad Z_i.$$

Las ecuaciones de equilibrio generales se establecen con tanta facilidad como para el estado inicial.

Los puntos del sistema no quedarán, naturalmente, en la posición que tenían, sino que pasarán á posiciones muy próximas á aquéllas, puesto que suponemos que las deformaciones elásticas del sólido son muy pequeñas en comparación á las dimensiones de éste.

Las variaciones de dichas coordenadas las representaremos, separándonos en esto, y sólo en esto, de las notaciones de Mr. Poincaré, para continuar con las notaciones adoptadas en los cursos anteriores, por u, v, w.

De suerte, que el punto cuyas coordenadas en el cuerpo en estado natural eran x, y, z, se habrán convertido en $x + u$, $y + v$, $z + w$.

Las ecuaciones de equilibrio serán, como antes decíamos, análogas á las ya escritas para el estado inicial, cambiando las coordenadas, que serán en general $x + u$, $y + v$, $z + w$; y agregando las fuerzas X, Y, Z.

Tendremos, pues, el siguiente grupo:

$$\frac{dU}{d(x_i + u_i)} + P_i + X_i = 0,$$

$$\frac{dU}{d(y_i + v_i)} + Q_i + Y_i = 0,$$

$$\frac{dU}{d(z_i + w_i)} + R_i + Z_i = 0,$$

que comprende n grupos, los cuales se obtienen dando á i todos los valores desde 1 hasta n.

Y para evitarnos el repetir esto mismo, siempre que sea necesario, lo expresaremos, según costumbre, escribiendo enfrente del grupo general este símbolo ($i = 1.2..... n$).

Explicábamos en otra conferencia, que la función U de fuerzas, que contenía en general las $3n$ coordenadas de los n puntos, ya que nos era desconocida en su forma y en sus coeficientes, la sustituíamos aproximadamente, desarrollándola por la serie de Taylor, ordenada por los incrementos u, v, w; y agregamos ahora que, dada la pequeñez de estas cantidades, no tomaremos más que los tres primeros términos.

Tendremos, pues, para la función de fuerzas aplicada al sólido ya deformado:

$$U(..... x_i + u_i, y_i + v_i, z_i + w_i .....) = U(..... x_i, y_i, z_i .....) +$$

$$+ \Sigma\left(\frac{dU}{dx_i} u_i + \frac{dU}{dy_i} v_i + \frac{dU}{dz_i} w_i\right),$$

$$+ \frac{1}{2} \Sigma\left(\frac{d^2U}{dx_i^2} u_i^2 + \frac{d^2U}{dy_i^2} v_i^2 + \frac{d^2U}{dz_i^2} w_i^2\right),$$

$$+ \Sigma\left(\frac{d^2U}{dx_i dy_i} u_i v_i + \frac{d^2U}{dx_i dz_i} u_i w_i + \frac{d^2U}{dy_i dz_i} v_i w_i\right).$$

Mr. Poincaré, para abreviar la escritura, representa el primer término del segundo miembro, que es independiente de u, v, w, por U_0.

El segundo término, que es lineal, ó de primer grado de pequeñez, en u, v, w, por U_1.

Y los dos últimos, que constituyen un polinomio homogéneo de segundo grado, en u, v y w, por U_2.

De suerte que tendremos:

$$U = U_0 + U_1 + U_2.$$

Las ecuaciones de equilibrio, serán por lo tanto

$$\frac{d(U_0 + U_1 + U_2)}{d(x_i + u_i)} + P_i + X_i = 0,$$

$$\frac{d(U_0 + U_1 + U_2)}{d(y_i + v_i)} + Q_i + Y_i = 0, \qquad (i = 1,2 \ldots\ldots n)$$

$$\frac{d(U_0 + U_1 + U_2)}{d(z_i + v_i)} + R_i + Z_i = 0.$$

Como aquí las verdaderas variables son u, v y w, porque las x, y, z, se refieren á posiciones fijas en el sistema inicial, podemos escribir las ecuaciones precedentes de este modo:

$$\frac{d(U_0 + U_1 + U_2)}{du_i} + P_i + X_i = 0,$$

$$\frac{d(U_0 + U_1 + U_2)}{dv_i} + Q_i + Y_i = 0,$$

$$\frac{d(U_0 + U_1 + U_2)}{dw_i} + R_i + Z_i = 0.$$

Ahora bien; U_0 no contiene la u, v, w, así para la diferenciación con relación á estas cantidades es una constante, luego sus derivadas con relación á u, v, w serán cero, y las ecuaciones de equilibrio tomarán esta forma aún más sencilla:

$$\frac{dU_1}{du_i} + \frac{dU_2}{du_i} + P_i + X_i = 0,$$

$$\frac{dU_1}{dv_i} + \frac{dU_2}{dv_i} + Q_i + Y_i = 0,$$

$$\frac{dU_1}{dw_i} + \frac{dU_2}{dw_i} + R_i + Z_i = 0,$$

Observemos que la U_1 era lineal en u, v, w, y de esta forma:

$$U_1 = \Sigma\left(\frac{dU}{dx_i} u_i + \frac{dU}{dy_i} v_i + \frac{dU}{dz_i} w_i\right) \qquad (i = 1,2 \ldots\ldots n)$$

luego

$$\frac{dU_1}{du_i} = \frac{dU}{dx_i}, \quad \frac{dU_1}{dv_i} = \frac{dU}{dy_i}, \quad \frac{dU_1}{dw_i} = \frac{dU}{dz_i};$$

porque al diferenciar, todos los términos, menos uno, desaparecen: unos, porque corresponden á valores distintos de i; otros, por no contener la u, si se refiere á esta variable la diferenciación; y lo mismo para las demás v, w. De manera que las ecuaciones de equilibrio del sólido elástico deformado por la aplicación de las fuerzas X, Y, Z, podrán escribirse de este modo:

$$\frac{dU}{dx_i} + \frac{dU_2}{du_i} + P_i + X_i = 0,$$

$$\frac{dU}{dy_i} + \frac{dU_2}{dv_i} + Q_i + Y_i = 0,$$

$$\frac{dU}{dz_i} + \frac{dU_2}{dw_i} + R_i + Z_i = 0.$$

Y substituyendo, en vez de los primeros términos, sus valores, según las ecuaciones (2), tendremos por fin:

$$A_i + \frac{dU_2}{du_i} + P_i + X_i = 0,$$

$$B_i + \frac{dU_2}{dv_i} + Q_i + Y_i = 0,$$

$$C_i + \frac{dU_2}{dw_i} + R_i + Z_i = 0.$$

Pero las ecuaciones (1) que expresan el equilibrio en el estado inicial, permiten suprimir los términos primeros y terceros, y quedan para las ecuaciones de equilibrio del sistema deformado, las siguientes:

$$\frac{dU_2}{du_i} + X_i = 0,$$

$$\frac{dU_2}{dv_i} + Y_i = 0, \qquad (i = 1,2 \ldots\ldots u)$$

$$\frac{dU_2}{dw_i} + Z_i = 0.$$

Recordemos que U_2 tiene esta forma:

$$U_2 = \frac{1}{2} \Sigma \left(\frac{d^2 U}{dx_i^2} u_i^2 + \frac{d^2 U}{dy_i^2} v_i^2 + \frac{d^2 U}{dz_i^2} w_i^2 \right) +$$

$$+ \Sigma \left(\frac{d^2 U}{dx_i dy_i} u_i v_i + \frac{d^2 U}{dx_i dz_i} u_i w_i + \frac{d^2 U}{dy_i dz_i} v_i w_i \right)$$

en que los coeficientes son funciones de x, y, z, es decir, de las coordenadas de los puntos en el estado inicial; de suerte, que si se conociese U, dichos coeficientes serían funcciones perfectamente conocidas.

Cierto es que no se conoce la forma de U; mas por medio de hipótesis y en casos particulares, puede precisarse dicha forma.

Por lo demás, para el desarrollo del método y para deducir las leyes generales de la Elasticidad, debemos suponer que es conocida la función U.

Diferenciándola con relación á u_i, v_i, w_i, las ecuaciones de equilibrio se reducirán á las siguientes:

$$\Sigma\left(\frac{d^2U}{dx_i^2}u_i+\frac{d^2U}{dx_i\,dy_i}v_i+\frac{d^2U}{dx_i\,dz_i}w_i\right)+X_i=0,$$

$$\Sigma\left(\frac{d^2U}{dy_i^2}v_i+\frac{d^2U}{dx_i\,dy_i}u_i+\frac{d^2U}{dy_i\,dz_i}w_i\right)+Y_i=0,\quad (i=1,2.....n)$$

$$\Sigma\left(\frac{d^2U}{dz_i^2}w_i+\frac{d^2U}{dx_i\,dz_i}u_i+\frac{d^2U}{dy_i\,dz_i}v_i\right)+Z_i=0;$$

y representando los coeficientes por una letra para simplificar:

$$\Sigma(A_i\,u_i+B_i\,v_i+C_i\,w_i)+X_i=0,$$

$$\Sigma(B_i'\,v_i+A_i'\,u_i+C_i'\,w_i)+Y_i=0,\quad (i=1,2.....n)$$

$$\Sigma(C_i''w_i+A_i''\,u_i+B_i''\,v_i)+Z_i=0;$$

tendremos, pues, n grupos de tres ecuaciones, es decir, $3n$ ecuaciones de primer grado respecto de las incógnitas u, v, w.

Claro es que el problema, teóricamente, está resuelto, porque dichas ecuaciones nos darán los valores de las $3n$ incógnitas u, v, w.

Sin embargo, la solución es ilusoria, ó, mejor dicho, prácticamente imposible, por el número inmenso de incógnitas y de ecuaciones.

Si en vez de tratarse del equilibrio se tratara del movimiento, en lugar de las fuerzas exteriores X, Y, Z tendríamos que poner las fuerzas exteriores también y además las fuerzas de inercia, de modo que tendríamos $3n$ ecuaciones diferenciales simultáneas, con las $3n$ funciones desconocidas u, v, w, y el tiempo como variable independiente.

También en teoría está resuelto el problema, y también la solución es imposible en la práctica.

Una dificultad de este género hemos encontrado en los métodos de Cauchy y Lamé, y por eso pasábamos á las ecuaciones en diferenciales parciales.

Mr. Poincaré toma, al llegar á este punto, otro derrotero,

y aplica otro método, del cual hemos dado hace un instante una especie de resumen ó síntesis, y que ahora vamos á seguir paso á paso.

El insigne maestro empieza por estudiar la función de fuerzas U, ó la función potencial, que es igual y de signo contrario á U.

***

Nuevas variables.—En el método que vamos exponiendo se empieza por substituir á las variables generales x, y, z,

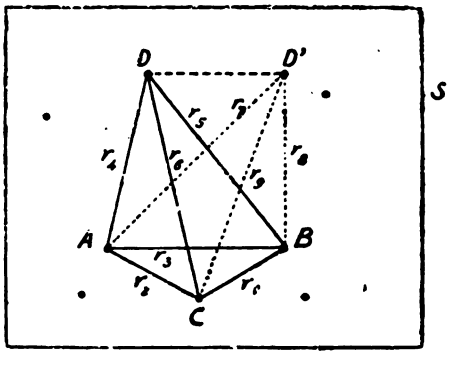


Figura 31.

que determinan cada punto, nuevas variables R..... que expresan la distancia de cada dos puutos del sistema; mejor dicho, R representa no la distancia de cada dos puntos m_1, m_2, sino el cuadrado de dicha distancia; de suerte que si las distancias de cada dos puntos se representan en general por r, tendremos

$$R = r^2.$$

Las nuevas variables no son r, sino R.

Si las variables fuesen r, el sistema de puntos que constituye el cuerpo elástico podría estar representado, como ya indicamos en otra conferencia, del siguiente modo:

Sean S (fig. 31) el sólido elástico y A, B, C, D, D'....,

diferentes puntos materiales de los que constituyen dicho sólido.

Se trata de definir geométricamente el expresado sistema; es decir, de fijar las posiciones relativas de los diferentes puntos.

Esto puede hacerse de muchas maneras.

Una de las más sencillas es la siguiente:

Tomemos tres puntos A, B, C.

Sus posiciones relativas se definirán por tres rectas r_1, r_2, r_3.

A estos tres puntos vamos á referir todos los demás; por ejemplo, D, D'.....

El punto D estará definido por las tres distancias r_4, r_5, r_6.

El punto D' por las tres distancias r_7, r_8, r_9, y así sucesivamente.

En conjunto resultarán *tres* distancias para los tres primeros puntos, y para cada uno de los restantes, que son $n-3$, el número $3(n-3)$; es decir,

$$3+3(n-3)=3n-6.$$

Este último número de distancias es necesario y suficiente para definir todos los puntos del sólido elástico, cuya posición relativa quedará de este modo determinada.

Pero lo mismo da fijar las distancias r, que fijar sus cuadrados.

Lo mismo define la posición de los puntos A y B la longitud r_1, que R_1, porque conocida R_1 de la relación

$$r_1^2 = R_1,$$

se deduce

$$r_1 = \sqrt{R_1}.$$

Podemos, por lo tanto, decir que las nuevas coordenadas son

$$R_1, R_2, R_3 \ldots\ldots R_{3n-6}.$$

En general R.

En suma, las nuevas coordenadas que fijan el sistema son los cuadrados de las distancias de los puntos tomados dos á dos.

Pero debemos hacer aquí una advertencia importante: las $3n-6$ cantidades r, si bien son las necesarias para definir el sistema, no agotan todas las distancias r. Por ejemplo, en la figura 31 la recta $D\,D'$ no está comprendida, ni puede estar comprendida, según las explicaciones que hemos dado hace un momento, en las $3n-6$ cantidades r que definen el sistema, como se ve evidentemente en la figura y como se observa desde luego.

Porque el número de distancias r es el del número de puntos combinados dos á dos; es decir,

$$\frac{n(n-1)}{2},$$

y este número, desde cinco puntos en adelante, es mayor que $3n-6$.

Para abreviar la explicación representemos estos números por una letra, haciendo

$$N_1 = 3n-6, \qquad N_2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Y decimos que, en general, N_2 será mucho mayor que N_1; como que N_2 es de segundo orden de magnitud creciente, por ser de segundo grado en n, y en cambio N_1 es de primer grado, por ser lineal en dicha cantidad n.

Así,

$$N_2 > N_1, \qquad \text{desde } n = 5 \text{ en adelante.}$$

De lo dicho, que es elemental, se deduce que todas las cantidades r, no son variables independientes; las únicas variables independientes, sea cual fuere el sistema de distancias

que se escoja, el que hemos definido ú otro cualquiera, son en número N_1, y las restantes $N_2 - N_1$, son funciones de las primeras; definidas aquéllas, quedan determinadas las demás por fórmulas trigonométricas fáciles de obtener.

Así en la figura 31 podemos decir

$$\text{distancia } DD' = \varphi\,(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9),$$

siendo φ cierta función trigonométrica más ó menos complicada, pero que se obtiene sin dificultad.

Pero lo que hemos dicho de las distancias r, podemos decir de sus cuadrados, de suerte que en el sistema de las R no habrá más que N_1 cantidades independientes, á saber:

$$R_1, R_2, R_3 \ldots\ldots R_{N_1},$$

y las restantes

$$R_{N_1+1}, R_{N_1+2} \ldots\ldots R_{N_2},$$

serán funciones de las primeras; así podremos escribir:

$$R_{N_1+N} = \psi\,(R_1, R_2 \ldots\ldots R_{N_1}).$$

Insistimos en estas ideas, que son elementales, porque al aplicar el método de Mr. Poincaré, sobre todo al principio, es decir, en el cálculo de la función U, ocurren ciertas dudas, que el texto de la obra del insigne matemático, correcto, pero conciso, no aclara del todo.

Por lo demás, tales dudas no influyen sobre la aplicación del método; pero bueno será que de ellas nos hagamos cargo en estas conferencias, que, como tantas veces hemos dicho, son de carácter elemental, puesto que nos dirigimos á alumnos que por primera vez estudian la Física-matemática, y no á maestros para los cuales nuestras aclaraciones serán ociosas.

Y hechas estas observaciones, que en breve explanaremos, sigamos la explicación del método de Mr. Poincaré.

***

Trata el insigne autor de expresar la función de fuerzas U, ó lo que es lo mismo, la función potencial en valores de las nuevas coordenadas R.

Supongamos que en el estado inicial las distancias de los puntos que constituyen el sistema, están representadas, como antes decíamos, por la serie de sus cuadrados, es decir, por las magnitudes:

$$R_1, R_2, R_3 \ldots\ldots R_{N_2}.$$

Estas magnitudes no serán, pues, las distancias de los puntos dos á dos, sino los cuadrados de estas distancias; notación que, como veremos en breve, simplifica la escritura de los cálculos.

Supongamos que á este sistema de puntos, en un estado inicial, ó en un estado natural, si se prefiere esta denominación, se le aplican fuerzas exteriores

$$X_i, \quad Y_i, \quad Z_i,$$

variando i desde 1 hasta n, que es el número de puntos del cuerpo.

El sistema experimentará una deformación elástica, bajo la acción de las nuevas fuerzas.

Los puntos saldrán de su primitiva posición de equilibrio, para ocupar nuevas posiciones, que serán las que correspondan al nuevo equilibrio elástico, que tratamos de determinar, porque este y no otro es el problema que se nos presenta.

Las magnitudes $R_1, R_2, R_3 \ldots\ldots R_{N_2}$ correspondientes á

cada par de puntos, no continuarán siendo las mismas; habrán recibído ciertas variaciones, y si representamos la variación general, por la letra griega ρ, según las notaciones de Mr. Poincaré, R_1 se convertirá en $R_1+\rho_1$; R_2 en $R_2+\rho_2$, y así sucesivamente; de suerte que las nuevas magnitudes, ó si se quiere, cuadrados de distancias, serán

$$R_1 + \rho_1,\ R_2 + \rho_2,\ R_3 + \rho_3 + \ldots\ldots R_{N_2} + \rho_{N_2},$$

y no olvidemos que ρ significa, no el incremento de una distancia entre cada dos puntos, sino el incremento del cuadrado de la distancia en cuestión.

Así como el estado inicial estaba definido por las magnitudes ó coordenadas R, el nuevo estado se hallará definido por las magnitudes $R + \rho$.

Al variar de posición los puntos, la potencial será distinta de lo que era en la posición inicial, y será una cierta función de las expresadas magnitudes.

Mr. Poincaré dice textualmente:

« U es una función de las cantidades $R + \rho$.....

$$U = F(R + \rho,\ R' + \rho' \ldots\ldots).»$$

Y no dice más.

Y aquí aparece una primera duda, que tiene su importantancia, para el que por primera vez estudia esta materia, por elemental que la duda sea.

La función F expresa el valor de U, ó sea de la función de fuerzas, ó de la potencial, para el sólido deformado.

Sobre esto no cabe duda. Porque si la potencial del sistema depende de la posición relativa de los puntos, y ésta posición relativa, su configuración geométrica, pudiéramos decir, depende de las magnitudes $R + \rho$, es evidente que U será una cierta función de tales magnitudes.

Pero, ¿de cuáles de ellas?, pudiera preguntarse.

¿De los N_2 pares de puntos, que determinan otras tantas distancias, cuales entran en la función F?

Porque F puede tener varias formas, atendiendo á que las magnitudes $R + \rho$ son en número N_2 y las necesarias para fijar la posición relativa de los puntos del sistema son N_1, y ya recordamos que

$$N_2 = \frac{n(n-1)}{2}, \quad N_1 = 3n - 6.$$

De manera que las magnitudes $R + \rho$, verdaderamente independientes, son en número N_1, según antes explicábamos.

Así es que, á la pregunta que antes hemos formulado, respecto á las magnitudes $R + \rho$ que entraban en la función F, se puede dar un número inmenso de contestaciones, que podremos, para simplificar, reducir á dos grupos:

1.° Puede suceder que F sólo contenga N_1 magnitudes $R + \rho$ consideradas como verdaderas variables independientes.

2.° Puede suceder que entren en F todas las magnitudes, ó, además de las elegidas por independientes, muchas que no lo sean.

En resumen: F, *expresando siempre* el valor de la función de fuerzas ó de la potencial para el sistema deformado, puede aceptar un número de formas distintas inmensamente grande.

Y, sobre todo, las del primer caso serán esencialmente diversas de las del segundo.

Pero Mr. Poincaré no especifica cuál de estas formas es la elegida, ó acaso no necesita especificarlo, por considerar todas estas formas equivalentes.

Lo son, en efecto, porque todas expresan el valor de U; pero de elegir unas ú otras, pueden surgir dudas y aun aparentes contradicciones y paradojas.

Claro es, por lo demás, que de unas formas se puede pa-

sar á otras: por ejemplo, de las del segundo grupo á las de primero; porque basta escoger N_1 cantidades $R + \rho$ como independientes; por ejemplo, las

$$R_1 + \rho_1, R_2 + \rho_2 + \ldots\ldots + R_{N_1} + \rho_{N_1},$$

y eliminar todas las demás de la función F por medio de ecuaciones análogas á la que antes escribíamos para el estado de equilibrio,

$$R_{N_1 + N} = \psi(R_1, R_2 \ldots\ldots R_{N_1}).$$

Que, como en este caso, las R se han convertido en $R + \rho$, tendrán la forma

$$R_{N_1 + N} + \rho_{N_1 + N} = \psi(R_1 + \rho_1, R_2 + \rho_2 \ldots\ldots R_{N_1} + \rho_{N_1})$$

Y hasta aquí no hay dificultad de ningún género.

Las dudas, ó por lo menos las confusiones, para el alumno, podrán venir más tarde al desarrollar el método, como veremos en la conferencia inmediata.

XXXIX.—D. Francisco de Paula Rojas.

POR JOSÉ RODRÍGUEZ MOURELO.

> El mal que hacen los hombres,
> el límite traspasa de su vida;
> el bien que hacen los hombres, con frecuencia
> se entierra con sus restos y se olvida.
> (SHAKESPEARE.—*Julio César*.—Acto III. Escena III, traducción de *F. Abarzuza*.)

Acaso á nadie convienen mejor que á nuestro llorado compañero en la Real Academia de Ciencias los dos últimos versos de la grave sentencia que el mayor poeta inglés pone en boca de Marco Antonio, á los comienzos de aquel intencionado discurso, pronunciado para honrar los funerales del gran romano, y de camino excitar al pueblo á tomar pronta venganza en los asesinos de César; y hasta pudieran ser la triste y desolada despedida de aquel honradísimo maestro, cuya más sobresaliente cualidad, entre las muchas eminentes que le adornaban, era la de ser bueno. Y fué tal su destino que, aun antes de enterrar sus restos, ya el bien que hiciera, siempre á manos llenas y colmando las medidas, estaba de tiempo atrás enterrado y olvidado. Para D. Francisco de Paula Rojas, el sabio y el bueno, que llevaba en su figura y en sus pensamientos mucho de la figura y de las puras intenciones del espejo de los caballeros, que se llamó Alonso Quijano, el Bueno, hubo en vida el más cruel é injustificado olvido.

Mercedes y honores que á otros, sin merecerlos, otórganseles á toda hora, fuéronle negados; y el maestro admirable, el sabio investigador, tuvo al fin de su vida trabajosa, consagrada por entero á los demás, la triste recompensa de la mezquina jubilación de catedrático, que él mismo, caballero andante del ideal, solicitó al sentirse enfermo y agotado. Rin-

dióle la fatiga más que los años, y amargaron, sin duda, los últimos de su vida el desvío y la indiferencia, que no apreciaron debidamente, ni en la oportuna sazón, aquella labor científica de una inteligencia superior, toda luz y toda claridad, que sabía comunicar á sus escritos y á sus lecciones, junto con el más exquisito donaire, uniendo á la justa expresión del pensamiento las sales y agudezas del nativo gracejo.

Bien es cierto que en los tiempos de la plenitud de su vigor intelectual, cuando la producción científica era más copiosa, ni el medio parecía adecuado, ni el círculo en el que había de moverse la actividad de Rojas suficiente para desarrollar sus elevados y originales pensamientos. Y fué de suerte que los azares de la carrera profesional, lleváronle, durante buena parte de su vida, á explicar las más diversas ciencias, y á cambiar, á cada paso, de asignatura, hasta que, ya bien entrado en años, pudo ejercer el magisterio de aquélla ciencia que constituía su afición, y á la que consagrara su estudio y sus investigaciones. Diérase á conocer, ya en la juventud, como peritísimo en las cuestiones de electricidad y sus aplicaciones, que por entonces comenzaban á ser debidamente tratadas desde los puntos de vista puramente científico y práctico; y como si esta parte de la Física fuese la determinante y característica de la vocación de Rojas, la electricidad parece haber constituído, como si digéramos, el ideal de la vida científica de nuestro amigo, ideal purísimo hacia el cual caminaba con no igualado desinterés, arrastrado por su encanto, solicitado por aquellos atractivos misteriosos que cautivan el ánimo del sabio y son el mayor impulso de la voluntad, lo que la impele en las indagaciones de todo linaje, obligándole á penetrar en lo más hondo y transcendente de los fenómenos naturales, con el fin de averiguar las circunstancias de su producción, las relaciones entre ellos existentes y las leyes que los rigen y determinan.

No hubiera hecho otra cosa en su vida sino iniciar á los

discípulos en esta maravillosa ciencia de la electricidad, influyendo así en la difusión de la cultura, y la labor científica de D. Francisco de Paula Rojas, en tal camino dirigida, fuera muy suficiente para darle honrosísimo puesto y crearle merecida fama. Valió mucho en semejante respecto, fué modelo de expositores y maestros y nadie le aventajó en la claridad y sencillez de la expresión de los conceptos; pero con ser esto mucho, su mérito más preciado y cualidad sobresaliente fué la originalidad; véanse, si no, entre otros ejemplos que pudiera citar, las singulares lecciones de Hidráulica general que explicó en la Escuela General Preparatoria de Ingenieros y Arquitectos, autografiadas por sus alumnos, que las conservan con verdadero amor y devoción.

Cuando Rojas comenzaba su carrera profesional y realizaba sus trabajos eran tiempos muy poco apropiados, en nuestra patria, para el desarrollo de las ciencias, escaso el número de sus cultivadores y muy reducido el círculo de su acción; no había, en realidad, medio científico, y aun se demostraba cierta hostilidad hacia cuanto significase investigación propia y original; dominaban la indiferencia y el desdén tratándose de estudios positívos, y la ignorancia en materias científicas era llegada á los mayores extremos, y con ella parecían los hombres de entonces muy bien avenidos. A nuestro llorado amigo y compañero, como á otros pocos espíritus superiores de aquella época, fuéles necesario hacer un verdadero sacrificio y prescindiendo de sus aficiones, que los llevaban al trabajo, sólo y aislado, de la investigación y del cálculo, hicieron esta grandísima y nunca bastante ensalzada obra de caridad de la propaganda científica y esta admirable enseñanza que ha formado el buen ambiente que ahora nos rodea. Hablaron poco de lo propio para difundir lo ajeno, y en su afán de instruír, diéronse á vulgarizar las ciencias y cumplieron la meritísima tarea de enseñar al que no quiere, logrando, cuando menos, interesarle. Por eso una flor exquisita debe crecer lozana y adornar la

humilde fosa donde yacen los restos de Rojas, la flor inmaculada del agradecimiento que todos debemos á aquel bondadosísimo maestro.

Obsérvese lo que significan el desinterés y la abnegación de un hombre superior, dotado de extraordinaria inteligencia, impulsado por su vocación hacia las indagaciones en los nunca agotados campos de la ciencia pura, seguro de alcanzar, por su esfuerzo, resultados originales, en los que pudiera recrearse su entendimiento, hallando en la propia labor los mayores goces espirituales, desviándose del camino natural de sus aficiones en provecho de los demás. Comprendiendo muy á derechas el patriotismo, se preocupa ante todo de enseñar; no es entendido, y procura que le entiendan; ciérnese muy alto su pensamiento, y sin perder un ápice de sus santos ideales, abate el vuelo y desciende para hablar á los humildes, hacerles conocer la buena nueva, y en sencilla frase, con no superada claridad, contarles las maravillas de la ciencia, relatarles sus incesantes progresos y demostrarles la utilidad de sus aplicaciones.

De esta admirable y copiosa labor de D. Francisco de Paula Rojas, dan testimonio: el *Manual del consumidor de gas*, que data de 1862, y que, á pesar del tiempo transcurrido y de su aparente sencillez, es todavia ahora de muy provechosa consulta; los incomparables y amenísimos *Estudios originales sobre varias cuestiones de Mecánica Industrial y de Física Industrial* (Valencia, 1864), que son verdadero modelo de claridad y de exposición científica, donde se revelan juntamente sus singulares condiciones de sabio, de escritor y de maestro; los numerosos artículos publicados, durante seis años consecutivos, en el periódico *La Electricidad*, y que puede asegurarse que, popularizando los rápidos adelantos de esta ciencia, sirvieron para iniciar su estudio en España y estimular el planteamiento de sus enseñanzas. Todos estos fragmentos y ensayos, en los cuales se relataban, sencillamente, es cierto, pero con galano y atractivo len-

guaje, descubrimientos y trabajos realizados en el extranjero, bien elegida la materia, añadida su exposición y exornada con los más juiciosos y atinados comentarios que puede imaginarse, constituyen por ventura algo á modo de la historia de los progresos y formación de la ciencia de la electricidad en su período más activo, en la que el narrador ha puesto no poco de su saber personal, y en ello consiste, en primer término, la originalidad de Rojas, en sus aspectos de divulgador y propagador científico.

Pueden considerarse de semejante índole, siquiera alguno de ellos haya sido escrito con distintos fines, otros dos trabajos de no escaso mérito. Titúlase el primero *La luz eléctrica y sus aplicaciones*, verdadero estudio popular, en el que el rigor científico está avalorado por la claridad y transparencia de la forma, y recuerda aquella notabilísima *Historia de una candela*, uno de los mejores libros de Faraday; el de Rojas, al que el autor concedía tan poca importancia como á todas sus demás obras, fué publicado por fragmentos en *El Mundo Ilustrado*. Es el segundo la *Cartilla para el abonado á la luz eléctrica*, cuya instructiva lectura nunca se encarecerá bastante, y ciertamente no se ha difundido cuanto debiera, á pesar de tratarse de algo cuya conveniencia y utilidad son notorias é inmediata su aplicación, en cosa de tanta monta como el alumbrado doméstico, que á todos interesa. Cuando se publicó, hace pocos años, fué debidamente elogiado; yace ahora en el más completo olvido.

Entre las Notas y variados artículos de propaganda científica, que han constituído uno de los más eficaces medios de enseñanza que empleó D. Francisco de Paula Rojas durante su largo magisterio, cítanse dos como más principales y sobresalientes, residiendo su mérito en la originalidad de la exposición y de los procedimientos á que se refieren, y es de suerte que tienen toda la importancia y todo el carácter de las que suelen leerse en las sesiones de las más renombradas Academias extranjeras, para ser luego publicadas en sus

Actas. Una de estas interesantísimas Notas constituye el folleto titulado *Estudio completo de la distribución en las máquinas de vapor de expansión fija, por medio de la válvula de corredera*, cuyo asunto entraba de lleno en la esfera de la competencia del que es la más pura gloria del Cuerpo de Ingenieros industriales españoles. Se denomina la otra *Sucinta exposición del método gráfico para el estudio de las corrientes alternas*, y con su sencilla apariencia y aquella claridad de expresión que fueron sus características, es obra de un electricista de primer orden, de un verdadero sabio, original en sus ideas, acertado siempre en sus juicios: trabajo exquisito y positivo de un maestro.

Que Rojas lo fué en grado eminentísimo, no hay para qué decirlo, sobre todo habiéndole oído explicar una sola vez; su lenguaje sencillo, su dicción correcta, la frase concisa, con cierto dejo castizo no exento de elegancia, la palabra persuasiva, atraían á los alumnos y cautivaban su atención. Hallábase dotado de superior y muy cultivado entendimiento, era de ingenio finísimo; en su inteligencia no había nieblas, apareciéndosele claras todas las cosas, y tenía el don de presentar las más difíciles y complicadas reducidas á la mayor simplicidad y como si fueran cuestiones elementales; y hacíalo con tanta facilidad, sin prescindir nunca del rigor científico, que parecía no haberle costado trabajo alguno lo que era en realidad el fruto de muy largos, laboriosos y dificilísimos estudios. Todo era en él claridad y sencillez, y aquella inmensa bondad del caballero andante de la ciencia se reflejaba en el Catedrático, y en tal sentido fué Rojas el más acabado modelo del profesor, y eran sus aficiones de suerte que, cumplidos los deberes oficiales, se consagraba á instruir á los artesanos, en cuya tarea era extremado, y dejaron merecida fama las numerosas conferencias que explicó en el Ateneo de Barcelona.

Fueron realizadas casi todas las obras de D. Francisco de Paula Rojas, ejercido su admirable magisterio, escritos y pu-

blicados sus libros, bien trabajosamente, sin el preciso sosiego ni la tranquilidad que demanda la labor científica. Aparte de la lucha por la vida, nada fácil para quien pone muy altos sus ideales y no le mueven los del interesado lucro, ni anhela convertirlos en materiales provechos, fué víctima de continuos cambios y mudanzas; vióse obligado á enseñar materias muy distintas de aquellas que por su nativa vocación era llamado á exponer é investigar; y sólo ya bastante entrado en años logró verse en la Cátedra que por derecho del saber le correspondía desde los principios de su carrera. Otros derroteros y otros rumbos hubiera tomado entonces el que estaba llamado para las grandes investigaciones de la Ciencia pura, y de seguro hubiera formado escuela quien tantos entusiasmos sentía por ella, comprendíala en sus más elevados conceptos y atraía y persuadía con su palabra sincera, tan buena, tan honrada, como era bueno, honrado y sincero aquel hombre excelente, admirador de lo ajeno, que nunca hablaba de lo propio.

Recordaré ahora brevemente, como demostración de lo dicho, la vida de Rojas. Nació en Jerez de la Frontera, á 29 de Noviembre de 1833, y en sus estudios debió ser precoz y aventajadísimo, por cuanto á los diez y nueve años había terminado la carrera y era ya Ingeniero industrial; además, siguiendo los impulsos de su vocación, en aquel tiempo se consagró á la enseñanza, y en el Magisterio científico pasó cincuenta años de su vida, derrochando verdaderamente un caudal de saber, regalando, con no igualada generosidad, los primores de su inteligencia soberana, reservándose para sí lo árido y difícil de la dilatada labor, variadísima, compleja y de bien rudo aprendizaje. Inauguró sus tareas pedagógicas el 1.° de Noviembre de 1852 en el Real Instituto Industrial de Madrid, en calidad de Ayudante gratuíto, como si este primer cargo sin sueldo fuera augurio ó presagio de la generosidad y desprendimiento que tuvo Rojas, como inherentes á su carácter, toda la vida. Un año más tarde, en 1853,

ya tenía sueldo el novel Ayudante y posición oficial definida en la Enseñanza; era el principio de una carrera, si no lucrativa, gloriosa para cuantos, según la expresión del poeta, no son movidos por el interés, cuando anhelan ver grabado su nombre en los mármoles pentélicos del templo de Apolo.

Guardábale el destino la primera sorpresa y el primer cambio á D. Francisco de Paula Rojas en 1854, de cuyo año data su nombramiento, siquiera fuese en Comisión, para la cátedra de Química de la Escuela Industrial de Sevilla, cuyo cargo desempeñó un año, porque en 1855 ganó, en lucidísima oposición, la cátedra de Física general é Industrial de la Escuela Superior Industrial de Valencia, viendo así logradas sus aspiraciones y conquistado en buena lid el puesto á que su vocación le llamaba. Desplegó entonces su actividad y comenzó la obra de misericordia de la divulgación de la ciencia, ansioso de sacudir frialdades é indiferencias, para constituir el indispensable medio científico; se dirigió al pueblo, afanoso por instruirlo; le contó en lenguaje claro, con sencillez no igualada, las maravillas de la ciencia y de la industria; sembró por todas partes las ideas, las repartió con prodigalidad sin ejemplo, y olvidándose á sí propio, todo su pensamiento, toda su labor, todos sus afanes, los empleó, como el latino, en provecho de los demás.

Sólo diez años le duró á Rojas aquella cátedra. En 1865 fué suprimida, como otras, la Escuela Industrial de Valencia y trasladado el Profesor de Física á la de Barcelona y á la cátedra de Construcciones Industriales, única á la sazón vacante. Muy grande debió ser la contrariedad del maestro con semejante cambio, que significaba apartarle de sus aficiones y trabajos predilectos, interrumpir los comenzados, distraer su labor hacia otros estudios, y sobre todo, desviar su bien determinada vocación. A pesar de ello, supo convertirla en estímulo y fué de manera que el desempeñar su clase de modo perfecto, conforme lo atestiguan los numerosos discípulos que de ella salieron, no constituyó obstáculo para

que continuara entregándose á sus ocupaciones y estudios favoritos, antes bien, aquella época activa es la de su mayor producción científica en todos sentidos, cuando alcanzó más fama y llegó á la categoría de autoridad en cuestiones de electricidad teórica y práctica y data de entonces uno de sus mejores libros, y por raro contraste un catedrático de Construcciones industriales es el fundador de los estudios eléctricos en España. Quiso la fortuna que la vocación de Rojas estuviera bien determinada y afirmada, y los nuevos estudios á que su magisterio oficial en este tiempo le obligaba, no fueron parte á distraerlo ni un punto de los que constituían el ideal de su vida.

Hubo de tornar á la enseñanza favorita D. Francisco de Paula Rojas sólo en 1880, en cuyo año obtuvo, mediante concurso, la cátedra de Física en la misma Escuela Industrial de Barcelona; pero no le duraron mucho las alegrías de la nuecátedra. Establecida en Madrid, en 1886, la Escuela general Preparatoria de Ingenieros y Arquitectos, vino á ella como Profesor numerario de Hidrostática, Hidrodinámica é Hidráulica, cuyas enseñanzas desempeñó á maravilla; y suprimida la citada Escuela en 1892, fué nombrado Catedrático de Física Matemática en la Universidad Central, llevándolo tardíamente al puesto que le correspondía y que debiera haber ocupado muchos años antes. Fué durante algún tiempo Decano de la Facultad de Ciencias, y el día 4 de Noviembre de 1904 se jubiló, á su instancia, con mezquino haber, y sin que se le concedieran aquellos honores que sobradamente había ganado el sabio y meritísimo Catedrático.

Tiene la obra de Rojas, vista en conjunto, muchos y muy variados aspectos, y no soy yo el llamado á examinarlos uno por uno. Desde luego determina una gran personalidad científica, y márcase en ella, de continuo, la originalidad del pensamiento; no es docente en el estricto sentido de la palabra, y, sin embargo, refiérese, en gran parte, á exposición de doctrina, en cuyo arte fué el autor extremado, y enseña de modo

magistral; sus características primordiales son la claridad y la sencillez. Presenta, examina, discute y juzga, siempre con evidente acierto, las doctrinas más elevadas y resuelve los problemas más difíciles y complicados reduciéndolos á cuestiones simplicísimas y concretas, sin artificios inútiles, ni aparato externo vacío, poniendo de la manera más concisa y rigurosa cuanto hay en ellos de fundamental y útil, prescindiendo de lo superfluo y de lo alambicado que se quiebra de puro sutil; y á tales extremos llegó Rojas en punto á ello que, sin casi advertirlo, hizo que fueran elementales y sencillas cuestiones que parecen árduas y casi imposibles cuando otros autores las tratan, llegando por caminos bastante más largos á los mismos resultados. Nadie le aventajó en el supremo arte de hacer fácil lo difícil y superior, sin quitarle nada de su valor científico, antes bien, aumentándolo de continuo con las observaciones, siempre justas, que el estudio y su entendimiento exquisito le sugerían.

Intentaré ahora hacer ver, á mi manera, el aspecto, por decirlo así, más científico de la personalidad de D. Francisco de Paula Rojas, á quien cuantos le conocimos y fuimos sus amigos habremos de dar el sobrenombre de *el Bueno*, examinando brevemente y sin entrar en pormenores, la mejor parte de la copiosa labor de su vida; me refiero en particular á sus principales libros, todos ricos de doctrina, y de los cuales puede decirse lo que el Sr. Echegaray decía al contestar al discurso de recepción de Rojas en nuestra Academia de Ciencias el día 25 de Enero de 1894: «contienen alta ciencia á alta presión», y yo me atrevería á añadir: «expuesta con claridad insuperable», como si sobre las verdades explicadas y comentadas hubiese arrojado el autor toda la luz vivísima de su entendimiento soberano, tan cultivado en las disciplinas científicas.

Uno de estos libros, el titulado *Calentamiento y Ventilación de edificios*, constituye la tercera parte del tomo VI de la Colección de Memorias de la Academia, que lo publicó

por haber obtenido el premio en el concurso del año de 1867. Era entonces el asunto — y lo es en parte todavía ahora — problema nada fácil, sobre todo cuando, para resolverlo en la práctica, se otorgaron las preferencias á ciertas reglas empíricas, prescindiendo de los principios científicos; y el mérito de la obra de Rojas consiste, á mi ver, sobre todo, en haber demostrado su necesidad, haciendo notar cómo á cada momento gobiernan y sirven de norma á las operaciones prácticas de todos los sistemas. Muchos años van transcurridos desde la publicación del libro; durante este tiempo, los adelantos tocante al calentamiento y ventilación de edificios han sido considerables, y, sin embargo, todavía es provechosa y utilísima la lectura de la obra de Rojas cuando se han de resolver ciertas cuestiones prácticas, y bien puede ser calificada de clásica en la materia. Hubo siempre y hay demanda de ejemplares; la primera edición se agotó, y en 1883 la Academia se vió precisada á hacer la segunda, lo cual demuestra la utilidad é importancia del libro; y debe consignarse el acierto de la Academia al premiar su mérito, otorgando al autor la mayor distinción que podía concederle, mientras no llegaron las circunstancias adecuadas para honrarlo de modo más expresivo, recibiéndolo con singular júbilo como miembro de la Corporación, á la cual consagró el mejor de sus trabajos.

Justicia hizo asimismo á los méritos de D. Francisco de Paula Rojas el Ateneo Barcelonés cuando, en el certamen de 1876, otorgó el premio á su libro de *Termodinámica*, imprimiéndolo luego y repartiéndolo profusamente. Con aparente carácter elemental, sin el tan frecuente abuso de fórmulas y desarrollos, empleando únicamente los que se han menester, contiene abundante y sabrosa doctrina, y es de las obras que hacen pensar, y al instruirnos dejan preparado el ánimo para emprender mayores estudios; es un escrito de maestro á quien son familiares las teorías superiores de la Física, que logra exponerlas de manera muy personal, de-

terminando los principios de sus aplicaciones y dando el modo de resolver los problemas de varia índole que traen aparejados.

Vió alcanzado Rojas el mayor de sus triunfos científicos en el año de 1886, con motivo de uno de los temas del concurso ordinario de la Real Academia de Ciencias, al cual se presentó, obteniendo el premio por una obra titulada *Estudio elemental teórico práctico de las máquinas dinamo-eléctricas,* que forma impresa el tomo XII de la Colección de Memorias de nuestra Corporación. Era entonces el asunto de palpitante actualidad, y lo trató Rojas como no es posible mejor; la materia está entendida y razonada á maravilla y maravillosamente presentada, extremando, si cabe, la claridad y la sencillez de la exposición, que lejos de perjudicarla, avalora la ciencia que rebosa en sus páginas. Adviértese en ella la lozanía de un espíritu superior, de una inteligencia admirable que domina la materia con absoluto poderío, complaciéndose en penetrarla, desentrañando sus complicaciones, abriéndose paso entre los hechos más difíciles y entre los fenómenos menos explicados, logrando ponerlos claros, sencillísimos, como la cosa más natural del mundo. Y por sobre esto aparece en todo su labor original, y se destaca su personalidad científica; no es un afortunado expositor de ciencia, que logra presentarla ataviada con arte; es un sabio que discurre con su propio criterio y sus conocimientos singulares acerca de las máquinas dinamo-eléctricas, en los momentos en que su teoría se dilucidaba y de camino su empleo se extendía de modo prodigioso y sus aplicaciones aumentaban de día en día, gracias, sobre todo, á la maravillosa y nunca bastante alabada invención de Gramme.

Llama particularmente la atención en este libro de Rojas, que me atrevo á diputar por lo mejor y más perfecto de toda su labor científica, la manera justa y precisa como acertó á comprender y definir, en sencillos y clarísimos términos, la teoría de las máquinas dinamo-eléctricas, cuando hace vein-

titrés años, que es la fecha de su obra, por muy pocos era entendida á derechas, y casi nadie había logrado ponerla de modo que pudiera siquiera ser metódicamente estudiada y analizada. No obstante lo subido del mérito, aquel bondadosísimo maestro, que toda su ciencia prodigaba y que ponía todo su interés en el trabajo de los demás, apenas concedía un momento de atención á ésta su más fina y sobresaliente labor.

Ya puesto en el camino cuya parte más difícil recorriera victorioso, alternó las tareas de la cátedra con la publicación de la *Electro-dinámica industrial,* obra en tres tomos, seguidos de los *Complementos teóricos,* al término de cuyo trabajo hubo de ayudarle otro electricista muy notable, su entrañable amigo D. Eduardo Mier, autor de una necrología sentidísima de Rojas, publicada en la *Energía Eléctrica,* de la que son muchos de los datos del presente escrito, complaciéndome en consignarlo. No pretendió Rojas hacer un libro de texto, cuajado de árduos problemas, verdadero rompecabezas ó gran aguzador de estudiantil memoria, ni quiso componer uno de tantos Manuales técnicos, tan repletos de recetas y fórmulas prácticas cuanto exentos de buena doctrina científica. Menos se propuso escribir una Guía de investigadores, dedicada á formar sabios, ó una obra de pura teoría, con todo el aparato matemático que le es indispensable. Sin ser ninguna de estas cosas en particular, de todas ellas participa la *Electro-dinámica industrial,* en la que el autor parece haber extremado todavía la claridad y la sencillez que toda su vida le fueron peculiares; hay en su libro muchísima ciencia y muchísima doctrina, y parece una obra elemental; no pone recetas, es parco en los datos numéricos, omite pormenores en las descripciones de aparatos y procedimientos, y el libro resulta sobremanera útil, diría casi indispensable, para el electricista práctico, y de seguro quien lo estudie á fondo está bien preparado, y puede desde luego abordar los mayores Tratados, donde se exponen y discuten las cuestiones más

superiores de la ciencia eléctrica. Esto ha querido Rojas que fuese su libro, y conforme lo pensó, así acertó á escribirlo, prestando á la ciencia española eminentísimo servicio.

Muchas veces comparo la *Electrodinámica* de Rojas y *El Calor* de Tyndall, y entre los dos hermosos libros encuentro grandes semejanzas. Tienen ambos apariencia elemental, parecen escritos sin esfuerzo alguno, como la cosa más natural del mundo, y son, no obstante, dos obras científicas de primer orden; la sencillez está en la forma, en la manera de decir, y no perjudica en nada á las doctrinas; es como las aguas limpidas y transparentes de algunos ríos que permiten ver y aun parecen acercar los fondos más profundos, ó como la atmósfera sin nubes que nos consiente admirar la hermosura y la magnificencia de los cielos.

Al término de su vida, catedrático jubilado, rendido por la fatiga, enfermo y aislado, pudo ver Rojas, con tristísima amargura, cómo iban en breve tiempo olvidándose sus enseñanzas, su trabajo y su ciencia; y aquel pobre viejo, que se sentía morir poco á poco, jamás, en el círculo de sus amigos y de su familia, profirió una queja, ni se lamentó de la injusticia, ni dejó de hacer el bien y de interesarse en el trabajo de los demás; era un hombre superior, que llevaba la generosidad hasta el último extremo; riquísimo de pensamientos nobles y elevados, tenía mucho que dar y no le importaba recibir mercedes. Fué, á su manera, un gran bienhechor de la humanidad; nos dió los beneficios de su ciencia, de sus enseñanzas, de sus bondades sin límite. Contadas veces, aun en sus enfermedades, le abandonó la alegría; dotado de mucho ingenio, á sus labios acudía la frase oportuna y su conversación estaba esmaltada con sales y donaires; narrador admirable, sabía dar vida á cuanto refería, era un sabio alegre, decidor y en extremo oportuno, con la imaginación siempre despierta, de espíritu abierto, de corazón sano; y con haber vivido mucho en contacto con toda clase de gentes, jamás tuvo enemigos; pudieron olvidarle en vida,

cometiendo grave falta, nadie quiso mal al más bondadoso de los hombres. Quédese para quien pueda hacerlo el analizar la copiosa y meritísima labor científica de D. Francisco de Paula Rojas; yo he querido tan sólo rendir un tributo de cariño y de gratitud al compañero y al amigo, bien pequeña ofrenda para un español tan grande, y únicamente aspiro á que sirva de recuerdo y no se olvide el bien que nos hizo, difundiendo generoso la cultura, aquel que en nuestra patria debe considerarse iniciador de los estudios de la joven y admirable ciencia de la electricidad.

Madrid, Marzo de 1909.

XL.—Método para determinar la dirección de los vientos superiores por las ondulaciones del borde de los astros.

POR VICENTE VENTOSA

I

En los últimos cuarenta años, y principalmente desde que la Meteorología llamada *dinámica* comenzó á tomar puesto preferente entre las ciencias de observación, procuróse con empeño determinar la dirección y condiciones de las corrientes superiores de la atmósfera: estudio difícil, del cual parece que deben desprenderse las leyes de la circulación general del océano gaseoso, ora apacible, ora embravecido, en cuyo fondo vivimos; y, por tanto, la solución del intrincado problema de la *previsión del tiempo*, ó de los temporales, de

muy varia índole que sobre el haz del globo terráqueo se experimentan.

Para ello, en efecto, no bastan los anemómetros que los Observatorios poseen y utilizan, aunque de importancia incuestionable en el concepto climatológico; porque, situados estos aparatos cerca del suelo, hállanse sometidos á la acción perturbadora de las influencias locales; y de sus indicaciones, difícil es las más veces inferir la dirección y fuerza de las corrientes aéreas en las altas regiones de la atmósfera. No es descomunal, para el objeto de que se trata, la altura de la Torre de Eiffel; y, sin embargo, el régimen de los vientos, que los anemómetros en su cima instalados revelan, discrepa ya en términos considerables del que otros anemómetros, en nivel más bajo, acusan.

Sin otros elementos de observación que los indicados, el problema en que nos estamos ocupando quedaría resuelto sólo á medias, por el desconocimiento, casi absoluto, de lo que en las altas regiones atmosféricas acontece; donde, si posible fuera relacionar la presión, temperatura y humedad del aire, observadas en dichas altitudes, con la dirección y velocidad de los movimientos del mismo, libres de las influencias locales, es de presumir se hallaran resultados conformes, en general, con los que predice la teoría mecánica, desenvuelta por insignes meteorologistas, entre ellos Ferrel, y Guldberg y Mohn.

Hase, pues, procurado con empeño explorar en toda su extensión la atmósfera por diversos é ingeniosos procedimientos, principalmente por la elevación de globos y cometas de diferentes formas, provistos de instrumentos gráficos ó registradores; siendo ya de suma importancia las nociones adquiridas acerca de la distribución de la temperatura, de la presión y de los demás elementos meteorológicos en las diferentes capas del aire. Este género de observaciones va teniendo cada día mayor aplicación y adquiriendo, en cierto modo, carácter internacional, pues actualmente se en-

saya con la frecuencia posible y á plazo fijo en diversos puntos de Europa y América, y hasta en el mar, con el fin de comparar los resultados obtenidos en todos ellos (*).

Pero cuando solamente se trata de averiguar las variaciones que un día tras otro experimentan los movimientos de la atmósfera, y cuyo conocimiento es indispensable para la previsión del tiempo á corto plazo (único hasta ahora conseguido), los procedimientos últimamente indicados no pueden todavía ser de gran provecho, tanto por su coste excesivo, que sólo las naciones ricas pueden sufragar, cuanto por las dificultades prácticas halladas en su empleo cotidiano, según lealmente confiesa Mr. Lawrence Rotch, Director del Observatorio «Blue Hill», en los Estados Unidos, y á quien principalmente se debe el notable impulso que estas investigaciones han recibido (**).

Para la observación de los vientos superiores, de todos los procedimientos propuestos hasta la fecha, el más barato y cómodo, y el único susceptible de ordenado empleo y de fecundos resultados (exceptuando acaso el que luego describiremos), consiste en la determinación de los movimientos de las nubes, clasificadas éstas por sus formas y por las alturas aproximadas á que respectivamente se ciernen. Importantes trabajos de este género han sido realizados por varios meteorologistas de veinticinco años á esta parte, y con especialidad por el Dr. Hildebrandsson en Upsal (Suecia), y por los Sres. Clayton y Fergusson, del Observatorio «Blue Hill», ya citado; demostrando el que llevaron á cabo en este último establecimiento la transcendencia de las observaciones de las nubes para dilucidar los movimientos generales de la atmós-

---

(*) Véanse, por ejemplo, las obras siguientes:
Sounding the Ocean of Air, by A. Lawrence Rotch, London, 1900.—*Barometric Gradient and Wind force.—Report to the Director of the Meteorological Office ....*, etc., by Ernest Gold, M. A., London, 1908.

(**) *Sounding the Ocean of Air*, p. 142 y 143.

fera, así como la circulación del aire en los máximos y mínimos barométricos, uno de los problemas principales y de mayor interés de la física del globo.

II

La observación regular ó sistemática de las nubes adolece, sin embargo, de algunos inconvenientes para dar exacto conocimiento de la dirección media del viento en las altas regiones atmosféricas; como que, ora por falta de nubes observables, ora porque las inferiores ocultan á las superiores, y los movimientos de unas y otras se entrelazan y confunden, los resultados de tan penoso trabajo de observación son á veces poco terminantes ó satisfactorios.

Procedimiento más general para llegar al mismo fin, de aplicación exclusiva cuando el cielo está despejado, y nuevo á juicio nuestro, es el que se funda, ó ha de fundarse, en el atento estudio del movimiento ondulatorio que el viento produce en las imágenes telescópicas de los astros, de diámetro aparente bien apreciable, y con especialidad en las del Sol ó de la Luna. La observación minuciosa de ese movimiento descubre algunas circunstancias curiosas, que sucintamente vamos á exponer á renglón seguido.

Cuando con auxilio de un anteojo se observa atentamente el limbo del Sol, por ejemplo, adviértese que las ondulaciones de la imagen varían de aspecto sin cesar, y de modo extraño al parecer, pero muy natural en rigor, de una región á otra. En su mayor grado de sencillez el fenómeno se reduce á lo siguiente. En dos puntos, diametralmente opuestos del borde, ó limbo aparente del Sol, las ondulaciones se propagan ó suceden tangencialmente al mismo borde y en igual sentido: paralelas unas á otras. Pero en las regiones intermedias, las ondas, como de trepidación atmosférica, cuya di-

rección es siempre la misma, parecen más ó menos inclinadas por referencia al limbo, y, en los extremos del diámetro perpendicular al en primer término considerado, le cortan normalmente ó coinciden con el expresado diámetro.

El movimiento que en dos palabras acabamos de definir, indica, por su dirección, la del viento que le produce, y puede servir para determinarla, como pronto veremos. Pero antes conviene advertir que lo observado en realidad es el movimiento relativo del viento y del astro, porque este último, lejos de permanecer fijo en el espacio, participa de la rotación diurna aparente de la esfera celeste. El efecto perturbador de esta rotación de carácter constante ó uniforme, es apenas sensible en la mayoría de los casos, y basta que en el cálculo de los resultados que se persiguen figure como elemento de mera corrección de estos resultados.

En la práctica, y por regla general, el fenómeno descrito, es bastante más complejo de lo que por de pronto hemos apuntado. Lo cual procede de que el anteojo integra, por decirlo así, todos los movimientos de la atmósfera que simultáneamente se verifican en las capas de aire que el rayo visual atraviesa, de muy diversos modos agitadas. Y en la imagen telescópica los movimientos más amplios ó enérgicos serán los que con más claridad se revelen, perturbados por los movimientos secundarios, de casi nunca insignificante ó despreciable eficacia. Por eso, en torno de la imagen del astro se perciben con frecuencia dos, y á veces más, ondulaciones independientes, que se cruzan y mezclan unas con otras, formando en algunos momentos y lugares confuso remolino y como especie de hervidero. Mas, siendo esto así, ¿cómo discernir y analizar uno por uno estos varios movimientos? ¿Y cómo poner en claro la altura en la atmósfera donde se verifican en realidad, ó de donde proceden?

Puesto que, según experiencia vulgar nos enseña, un objeto parece tanto más pequeño cuanto de más lejos le miramos, natural es pensar que las ondas aéreas, si sus dimen-

siones ó amplitudes no varían mucho con la altura, cuando procedan de regiones elevadas de la atmósfera parecerán de menor amplitud que las dimanadas de las capas inferiores; de manera que, en la imagen telescópica del astro donde se proyectan, se distinguirán unas de otras por su extensión ó aspecto. Bastará, pues, modificar el poder amplificador del anteojo para que las apariencias del fenómeno descrito varíen en términos muy significativos y de interpretación racional provechosa.

La observación confirma la exactitud de estas conjeturas teóricas. Pues, cuando la fuerza óptica del anteojo es muy considerable, los movimientos constituídos por ondas cortas y suaves se perciben mucho mejor que los resultantes de ondas largas y enérgicas, mientras que se advierte precisamente todo lo contrario cuando la imagen del astro, en torno de la cual se retrata con caracteres elocuentes la complicada agitación de la atmósfera, es de magnitud relativamente pequeña. Las ondas que antes predominaban se desvanecen entonces, y las antes desvanecidas y borrosas son las que ahora con perfecta claridad se destacan. El anteojo, según ésto, se convierte de tal manera en instrumento de análisis ó de separación de las diversas ondas del aire, como el espectroscopio separa y analiza las ondas luminosas que en número infinito surcan y agitan en todos sentidos el piélago etéreo insondable.

Tal es el principio de que hacíamos uso en nuestras primeras investigaciones, y que dimos á conocer, juntamente con los resultados hasta entonces obtenidos, en una Memoria publicada en Bélgica en 1890 (*) y reproducida después en diversos idiomas, por varias revistas de Europa y América. Hay, sin embargo, otro principio en el que han estado basadas preferentemente nuestras observaciones hechas en

---

(*) *La direction des vents supérieurs déterminée par les ondulations du bord des astres.* («Ciel et Terre», Bruxelles, 1890.)

años posteriores, y cuya importancia, para el fin que perseguíamos, al pronto no advertimos. Este principio no es más que la *propiedad*, bien conocida en la óptica geométrica, *de los focos conjugados.*

Se sabe que la imagen de un objeto, teóricamente situado en el infinito, se forma, dentro de un anteojo, en el plano focal principal del objetivo, y que las imágenes de objetos más cercanos llegarán á percibirse con toda claridad, aumentando hasta un punto determinado la distancia focal. En lo que á los astros concierne, cuya distancia á la Tierra, comparada con las dimensiones del anteojo, puede considerarse como infinita, la imagen de todos ellos estará sensiblemente situada en el mismo plano focal; pero no sucederá lo mismo cuando los objetos ocupen un lugar dentro de los estrechos límites de nuestra atmósfera; entonces, para distinguirlos bien, será preciso modificar la distancia del ocular al objetivo en una magnitud muy apreciable, y, mayor ó menor, según sea la distancia del objeto observado. Ahora bien: entre estas dos distancias existe una relación determinada, conforme á las leyes de la óptica geométrica; de suerte que, si una de estas distancias es conocida, la otra podrá serlo también.

Para fijar más las ideas, recordemos la fórmula que expresa dicha relación:

$$(\varphi - f)(\varphi' - f) = f^2$$

en la que f representa la distancia del foco principal al centro óptico del objetivo, y φ, φ' las distancias análogas referentes á los dos focos conjugados. Si φ designa la distancia del objeto exterior, ó sea la que buscamos, dicha fórmula dará

$$\varphi = \frac{f^2}{\varphi' - f} + f.$$

Pero el denominador, $\varphi' - f$, del primer término de esta expresión es la *extensión focal*, ó la corrección *positiva* que debe aplicarse á f para poner en foco la imagen de un objeto situado á la distancia φ; corrección, en nuestro caso, siempre pequeña respecto del numerador f^2: luego el segundo término f alterará muy poco el valor del primero y podrá, sin error apreciable, suprimirse en el cálculo, teniendo además en cuenta el grado de precisión á que podemos aspirar en los resultados de la observación. Por otra parte, si para facilitar el cálculo expresamos la diferencia $\varphi' - f$ en milímetros y f en metros, la fórmula precedente se convertirá en esta otra, que es la que hemos utilizado en la reducción de nuestras observaciones, y tendremos ocasión de recordar en las páginas siguientes:

$$\varphi = \frac{1000 f^2}{\varphi' - f} \ldots\ldots \qquad (A)$$

Multiplicando ahora φ por el seno de la altura angular del astro, en el instante de la observación, se tendrá la altitud del objeto observado sobre el plano horizontal que pasa por el centro del objetivo. El problema queda, por tanto, *teóricamente* resuelto. Veamos hasta qué punto los hechos observados corroboran estas deducciones de la teoría.

Supongamos, en primer lugar, que haya una sola corriente aérea en la región superior de la atmósfera, mientras en las regiones inferiores reina la calma. Ajustando el ocular del anteojo en el foco principal del objetivo, se verá distintamente la ondulación producida en el borde del astro por dicha corriente alta. Si entonces agrandamos la distancia focal, alejando poco á poco el ocular del objetivo, no dejará por eso de percibirse la ondulación, pero cada vez peor definida; y al cabo, continuando la misma maniobra, acabará por desvanecerse en el borde difuso y como esfumado del astro. Pues, si estando el ocular en esta última posición, comen-

zase de pronto á soplar un viento relativamente inferior, la ondulación correspondiente aparecería en el acto en el limbo del astro, con la claridad necesaria para que su dirección se pudiera medir. E inversamente á lo que sucedió en el caso primero, acontecerá ahora que, conforme vayamos acercando el ocular al objetivo, irá de grado en grado esfumándose, como en cuadro disolvente, la ondulación larga, y, al llegar al foco principal, sólo se revelará por cierta agitación del borde, no susceptible de medida, á menos de ser muy enérgica, pero que suele dificultar bastante la observación de la corriente superior.

Los fenómenos arriba descritos no se presentan de ordinario con tanta sencillez. Pasa á veces de dos el número de corrientes aéreas simultáneamente reinantes, y aún en el caso de haber sólo dos, pueden estar sobrepuestas tan cerca una de otra, que sea entonces muy difícil observarlas por separado. No obstante, aun en circunstancias tan desfavorables, con alguna práctica, y acudiendo á ciertos artificios que la experiencia sugiere, llega á ser posible rastrear el orden de altitud de las corrientes observadas.

Caso notabilísimo, y que ocurre con frecuencia, es el de una corriente que, en vez de soplar en dirección constante en todas las capas atmosféricas, sufre una desviación progresiva conforme varía su altitud, tanto de derecha á izquierda como de izquierda á derecha, simulando un movimiento helizoidal. Esta sucesión de corrientes, que cambian continuamente de dirección á diferentes alturas, y que, alargando ó acortando la distancia focal del anteojo, se manifiesta con toda claridad, sin que en la existencia del tal fenómeno pueda caber la menor duda, ha sido confirmada por las investigaciones de M. L. Teisserenc de Bort, hechas en el Atlántico intertropical. Más adelante presentaremos algún ejemplo significativo de esta clase en corroboración de nuestro aserto.

Tarea inacabable sería querer puntualizar aquí todas las

apariencias á que puede dar origen el océano aéreo proyectado en el borde de un astro: son tan numerosas y variadas, como variable es de un día á otro el aspecto del mar. Parece que estamos en presencia de un libro, siempre abierto, que nos ofrece la Naturaleza, donde es dable leer las incesantes vicisitudes que experimenta la inmensa envoltura gaseosa en cuyo seno vivimos. Quizás, á pesar de esta diversidad de fenómenos, se llegue algún día á reducirlos á un número relativamente limitado de situaciones bien caracterizadas, como se ha conseguido clasificar en un corto número de grupos las formas tan variadas y á primera vista, al parecer, tan caprichosas de las nubes.

III

De todos los astros, el que hemos empleado casi exclusivamente en nuestras observaciones ha sido el Sol, preferible, sin duda alguna, á los demás por su gran tamaño aparente, su figura regular é invariable y la lisura de su borde, perfectamente redondo, excepto en la proximidad del horizonte. Fácil de observar todos los días en que no está siempre oculto por las nubes, es, hasta por el deslumbrante resplandor de su disco, el que mejor y con más comodidad se presta á este género de investigaciones, en nuestros climas por lo menos.

A la observación directa del Sol, preferimos, para el objeto de que ahora se trata, la observación de su imagen proyectada sobre una pantalla, cuya distancia al ocular del anteojo puede aumentar ó disminuir como se quiera, dentro de prudentes límites. El anteojo de que para nuestras observaciones casi siempre nos hemos valido es el de la ecuatorial de Merz, perteneciente al Observatorio de Madrid, de 27 centímetros de abertura, ordinariamente reducida á solos 19 por medio de un diafragma. Debiendo además advertir que

con este instrumento se obtienen proyectadas simultáneamente en la pantalla dos distintas imágenes del astro: procedente una del anteojo principal y la otra del *buscador,* y cuyos diámetros respectivos eran, por término medio, de 70 y 20 centímetros. Siendo tan diferentes los diámetros de ambas imágenes, no se encontró ventaja en modificar la posición de la pantalla cuando, por comparación entre ellas, se quiso efectuar el análisis de las ondas aéreas.

Como ambos anteojos de la ecuatorial se hallan provistos de micrómetro, la observación detallada del movimiento ondulatorio de la atmósfera se reduce á medir el ángulo de posición de cada sistema de ondas con uno de los hilos del retículo, colocado paralelamente á la ondulación, tangencial al limbo del astro, y á llevar en cuenta por separado el sentido del movimiento. Y en muchos casos procúrase también apreciar la velocidad angular del mismo movimiento, contando el número de segundos que una onda cualquiera emplea en recorrer el intervalo comprendido entre dos hilos del retículo, perpendiculares á la dirección en que se propaga.

Además, no nos hemos descuidado de observar con el anteojo la dirección de las nubes proyectadas sobre la imagen solar, aprovechando cuantas ocasiones se han presentado, no sólo como operación suplementaria de la observación de las ondas, sino también como medio de comprobar los resultados obtenidos con estas últimas. La observación de las nubes, siempre importante, parécenos más exacta y fácil haciéndola durante el paso de ellas por el disco solar que por ningún otro procedimiento. Únicamente el nuestro es inaplicable á los cirri y cirrostrati muy tenues ó difusos, que no producen en la pantalla otro efecto sino iluminar el campo del anteojo y debilitar al propio tiempo el resplandor de la imagen del astro. En casos tales hemos recurrido para determinar sus movimientos á diversos métodos conocidos.

Conforme suele practicarse, siempre que se puede, en las ciencias de observación, conviene repetir las operaciones de

mensuración varias veces, con el fin, en este caso, de disminuir ó reducir los errores eventuales de puntería ó ajuste. Nuestras series constan, por lo común, de seis lecturas micrométricas, efectuadas en el intervalo de tres ó cuatro minutos de tiempo, y por referencia, alternadamente, á los bordes opuestos del Sol, con grado de precisión que depende en mucha parte del de visibilidad de las ondulaciones y del estado de agitación del limbo; en general, el error probable del promedio de cada serie no excede de ± 2 grados. Ocho ó diez series, efectuadas en posiciones diferentes del ocular, han solido constituir el trabajo de cada día.

A los Sres. Ekholm y Hagström, meteorologistas suecos, que con especial cuidado procuraron estudiar los movimientos de las nubes, son debidas dos fórmulas de cálculo (*), reproducidas también por Mr. Cleveland Abbe (**), y de aplicación inmediata asimismo á la resolución del problema á que nuestras observaciones se encaminan. Esas fórmulas, que sirven para reducir al horizonte el ángulo de posición, medido en un plano perpendicular al eje óptico del anteojo ó tangente á la esfera celeste en el punto ocupado por el astro de que se trata en el instante de la observación, son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{tang} \beta = \operatorname{tang} \gamma \operatorname{sen} h \\ \varphi = \alpha + \beta \end{array}\right\} \ldots\ldots (B),$$

en las cuales β representa el ángulo que forma la dirección del viento con el plano vertical del eje del anteojo: ángulo contado en el mismo sentido que el azimut;

(*) *Mesures des hauteurs et des mouvements des nuages*. Upsal, 1885, pág. 22.

(**) *Treatise en meteorological apparatus and methods*. Wáshington, 1888, pág. 335.

γ la proyección de β sobre el plano del retículo del anteojo, ó el ángulo medido con el micrómetro;

α el azimut actual del astro;

h su altura sobre el horizonte; y

φ el azimut verdadero de la ondulación, ó la dirección buscada del viento.

Sobre el valor del ángulo β no cabe ambigüedad, porque evidentemente ha de pertenecer al mismo cuadrante que γ.

Las fórmulas (B) fueron aplicadas por sus autores á la reducción de las observaciones por ellos efectuadas con un altazimut ó teodolito especial; mas de hacerse con un anteojo montado ecuatorialmente, á los datos ó elementos de cálculo que en ellas figuran, hay que agregar el ángulo paraláctico, con signo contrario al del azimut. De manera que, siendo p este ángulo y π el de posición, determinado también por medición directa, resulta que

$$\gamma = \pi - p \ldots\ldots (C).$$

Y además, como el punto cardinal, en cierto modo más importante ó como fundamental, de la Rosa de los Vientos es el Norte, desde el Norte nos pareció natural y conveniente contar los ángulos de posición, y, por lo tanto, el γ en el sentido ordinario (N., E., S., O.).

(Continuará).

XLI.—Los principios fundamentales de la Mecánica racional.—Un primer capítulo de dinámica.

POR JOSÉ RUIZ-CASTIZO.

(Conclusión).

V.- Notas y observaciones.

32. **Su objeto.**—En el estado actual de la Ciencia, caracterizado por un gran movimiento de ideas y por turbulentas corrientes de crítica que la agitan, desentenderse de esta intensa labor para exponer los principios fundamentales de la Mecánica, sería dar indebidamente carácter de teoría científica definitimente constituída, y á prueba de comentarios y discusiones, á una que no lo es. Así, pues, aun teniendo en cuenta la dificultad de bosquejar siquiera, en términos didácticos, tan vasto campo de estudio, procede, á nuestro juicio, añadir algunas observaciones que puedan orientar al principiante, instruirle sumariamente en los motivos y alcances de las más importantes objeciones suscitadas, contribuir á formar su propio criterio y estimularle á profundizar este análisis en obras especiales de crítica, donde se desarrolle con toda clase de detalles y comentarios. (Véase al final una nota bibliográfica.)

33. **Movimientos absolutos y relativos.**—Renunciaremos á todo ensayo de definición del *espacio, el tiempo y la materia,* porque entendemos que los esfuerzos más felices sólo conducen á formular verbalismos. Diremos únicamente que, no siendo cognoscible para nuestra inteligencia categoría alguna sino por ideas de relación, las nociones de dichas entidades son *productos intuitivos de nuestro hábito de conocer coexistencias y sucesiones,* ó bien sea de formar estados de

conciencia en que afirmamos ciertas analogías y diferencias entre los seres físicos que originan nuestras sensaciones orgánicas. Y así, las locuciones *espacio absoluto, tiempo absoluto y movimiento absoluto* no responden en Filosofía á concepto alguno real, perfecto ni imperfecto, de la inteligencia humana: significan sencillamente *lo incognoscible.*

Mucho se ha debatido sobre el concepto de movimiento absoluto. Para darle sentido científico, ciertos escritores han tratado de referirlo hipotéticamente, *ya á un cuerpo α inmóvil, situado en la región de las estrellas fijas, ya al sólido estelar, ya á un flúido etéreo inmóvil que llenase el espacio,* etcétera; pero puesto que todo ello implica la afirmación de una inmovilidad absoluta, se ve fácilmente que con tales hipótesis sólo se logra alejar la dificultad, nunca resolverla.

Procede, no obstante, observar que hay manifestaciones tangibles que parecen demostrar algo que sería legítimo llamar movimiento absoluto: tales son las fuerzas centrífugas en la rotación terrestre (como en su lugar veremos); mas dado que no existe noción absoluta del espacio, lo que en realidad cabe deducir de aquí es una contradicción que imposibilita toda solución racional del problema.

Esto, sin embargo, no crea dificultad seria á la Ciencia; para el mecánico, el movimiento absoluto es una idea clara: sencillamente *un movimiento referido á ejes que,* POR ABSTRACCIÓN, *suponemos carecen de todo movimiento.* Y esta abstracción es legítima; pues no pudiendo la Filosofía derivar de una entidad desconocida é incognoscible, como es el espacio absoluto, idea alguna de movilidad ni de inmovilidad, ninguna conclusión filosófica se opone á que imaginemos un sistema de ejes que carezcan de movimiento asignable para nuestra conciencia por ideas de relación.

34. **Fuerza, inercia y masa.**—Sobre estos tres conceptos fundamentales de la Mecánica se acumulan las más graves objeciones. En el conocimiento ordinario del mundo físico, y hasta en el científico superficial, diríamos, no aparecen re-

vestidos de serias dificultades; mas no bien se trata de analizarlos, escapan tenazmente á todo ensayo de esclarecimiento, surge imposibibilidad de reducirlos á términos mejor conocidos, y los más geniales intentos para darles sentido filosófico sólo han conducido á establecer símbolos verbalistas y nominalismos.

La noción de fuerza, bajo el aspecto primitivo y rudimentario, es una clara intuición debida á nuestros ejercicios sensoriales; pero la generalización que la eleva al concepto científico de *causa agente ó resistente de los cambios dinámicos, efectivos ó potenciales, que observamos en los cuerpos*, aunque parece al pronto legítima, ni satisface por completo á las conclusiones de un sano análisis filosófico, ni contribuye realmente á disipar las oscuridades que envuelven los conceptos mecánicos que discutimos.

En primer lugar, no podemos concebir la fuerza sino como acción de la materia sobre la materia, y esta acción no siempre se ejerce por contacto; las fuerzas gravitatorias, por ejemplo, se ejercen á distancias enormes, y esta especie de envío de fuerza á través del espacio, lo mismo vacío que ocupado por materia, sin acusar efectos más que en el punto de destino, por decirlo así, constituye una de las ideas más abstrusas y rebeldes á todo esfuerzo imaginativo. Además, ni aun en las mismas acciones de contacto hay verdaderamente otra cosa que una engañosa ilusión de los sentidos, de modo que sólo en apariencia tienen la condición de inmediatas: cuantos esfuerzos se han aplicado á dilucidar su mecanismo, sea con ayuda de las más atrevidas y variadas hipótesis, sea mediante los más sagaces experimentos, no han logrado obtener resultados que satisfagan á la menos exigente inteligencia.

Por otra parte, en la consideración de tales acciones, así inmediatas como mediatas, surge un dualismo filosófico incomprensible y vicioso. Si las fuerzas que apreciamos por nuestros sentidos emanan de la materia, y la materia á su

vez sólo se nos revela por las acciones ó fuerzas que ejerce, nos vemos obligados á concebir *dos categorías ligadas entre sí, ante nuestra conciencia, por dos relaciones simultáneas é inversas de causa á efecto,* puesto que cada una de dichas entidades es causa del conocimiento de la otra. Y esto carece visiblemente de sentido lógico.

En segundo lugar, la estrechísima relación existente entre los tres conceptos de fuerza, inercia y masa, cada uno de los cuales es esencial é indispensable para formar los otros dos, viene á complicar más y más la cuestión hasta hacerla inextricable. Mirado el principio de la inercia bajo el aspecto simple con que lo hemos enunciado, aun contenta el espíritu en cierto modo; pues sólo es discutible en el sentido de si debe ser aceptado como rigoroso ó aproximado, como universal y necesario ó contingente. Y bajo tal aspecto, aunque nunca la experimentación directa podrá decirnos nada definitivo, ya que es imposible operar con cuerpos no sometidos á causa alguna, ni en movimiento absoluto, ni en trayectorias y tiempos indefinidos, la *hipótesis* de esa ley universal de la existencia de la materia tiene hoy por hoy todos los títulos de inducción racional perfectamente aceptable.

Pero el concepto de inercia envuelve algo más transcendental, según arriba indicamos. En efecto: puesto que cada cuerpo, por su tendencia á conservar su actual estado de inercia, *consume,* para salir de él y alcanzar otro dado, la acción de una fuerza medida por su masa (suponemos para mayor sencillez que la fuerza es constante y la acción dura el mismo tiempo), tenemos que admitir que cada cuerpo posee algo á modo de una *resistencia de inercia* medida por su misma masa, resistencia que ésta opone al cambio de velocidad que la fuerza le imprime. Resulta así de nuevo el dualismo que antes apareció por otra consideración: de un lado, la *masa de inercia,* que demanda acción para cambiar de estado dinámico; de otro, la *masa activa* que ejerce la

fuerza, como se ve claramente, entre otros fenómenos, en el de la gravitación.

Aparte de esto, la generalización susodicha del primitivo concepto de fuerza ha merecido acerbas críticas por varios otros motivos. Uno de ellos es el de conservar á esta entidad un carácter de antropomorfismo que le resta títulos de concepto científico. A decir verdad, no todos los pensadores hallan motivada esta objeción; porque, sea cualquiera la naturaleza de los fenómenos cuyas imágenes procuramos formar, no parece posible evitar que estas imágenes conserven elementos mentales propios de nuestra razón, es decir, antropomórficos; y con tal que estos elementos no impriman carácter á la traducción analítica de las leyes mecánicas, ni desvirtúen los términos de relación que las expresan, ningún perjuicio puede derivar, para la verdad científica, del criticado proceso imaginativo.

Asimismo ha sido tachada la noción de fuerza de incapaz para asignar individualidad á la fuerza como causa. ¿Dónde radica, se ha dicho, el derecho de afirmar que *una fuerza dada es la misma antes y después?* A esta objeción puede replicarse solamente con la *hipótesis* de la constancia de las leyes naturales, por lo menos, en tiempos sobradamente dilatados respecto de la duración de nuestras operaciones y aun de nuestra vida. Según tal hipótesis, podemos aseverar que *un mismo fenómeno, repetido en idénticas circunstancias, acusa la manifestación de una misma fuerza.*

Aun dentro de este punto de vista, cabe discutir también el derecho de comparar entre sí como causas de movimiento, esto es, como fuerzas, acciones físicas diferentes; por ejemplo, un peso y una tensión elástica. Sin duda, substancialmente, no podemos equiparar dichas acciones; los que sí podemos comparar son sus efectos objetivos, y sólo en tal concepto considera el mecánico las causas como cantidades homogéneas, asignándoles en abstracto idénticas representaciones analíticas.

Por lo tocante á la noción de masa, ya hemos dicho que es, no sólo indescifrable en su origen, sino indefinible por sí misma, y únicamente revelable por las acciones de las fuerzas; y aunque la ley de la gravedad nos permite formar de ella un concepto físico por función directa de nuestros sentidos, subsiste siempre la obscuridad en la causa de ser los pesos proporcionales á las masas, de modo que al analizar el por qué de esta proporcionalidad, recaemos en la misma dificultad de fondo, en la de no poder deslindar los conceptos que discutimos.

Por todas estas razones, y otras que omitimos, la crítica moderna declara inconsistentes las nociones clásicas de fuerza y masa, así para la Filosofía como para la Ciencia constituída, y en consecuencia, muchos autores rehusan apoyarse en ellas para fundar la Mecánica; más aún si se tiene en cuenta que, como pasamos á indicar, también otros postulados ofrecen aspectos vulnerables á la crítica.

35. **La independencia de efectos.**—El contenido de este postulado es de imprescindible necesidad para completar las nociones de fuerza é inercia, y asignar á aquélla individualidad bien definida; por lo mismo, es una proposición puramente hipotética que afecta en todo á dichas dos nociones fundamentales. A tal punto, que sin dificultad se podría prescindir de él, con sólo atribuir á aquellas entidades las cualidades geométricas ó vectoriales que la independencia atribuye á los efectos. En todo caso, las ideas son unas mismas, y no hay ventaja positiva en romper con la costumbre general de separarlas en dos proposiciones.

En cuanto al carácter de universalidad con que ha sido aceptado, tampoco escapa á la crítica de nuestros días. Hay campos físicos de fuerza que se influyen mutuamente; de modo que no existe independencia de efectos en tales casos. Es, pues, de rigor restringir la generalidad de este postulado, y no mirarlo como expresión de una verdad universal y necesaria.

36. **El principio de la acción-reacción.**—Otro tanto cabe decir del postulado sexto. «El principio de Newton, bajo su forma absolutamente general, no tiene nada de claro, y su sentido es hasta dudoso en más de un ejemplo referente al Magnetismo y la Electricidad.» En estas palabras se expresa sobre el particular *M. Picard* (obra citada), y en otras muy parecidas se muestran acordes con tal opinión muchos otros analistas y comentadores. Nada tenemos que añadir para dejar establecida la reserva con que esta proposición debe ser empleada en ciertas cuestiones.

37. **Los postulados de la oposición, la reacción normal y la transmisión.**—Sobre estas tres proposiciones, lo único discutible de que debemos tratar aquí es su inclusión entre los principios fundamentales de la Mecánica. En la mayoría de los tratados, ó se aceptan como axiomas, ó se pretende demostrarlas racionalmente por deducción de otras anteriores. Pero esta misma divergencia prueba que ni las demostraciones que de ellas se han dado ni la evidencia *a priori* son tan claras y convincentes, que no hayan sido objeto de críticas é impugnaciones.

Nos sumamos, pues, con los autores que se inclinan á ver en estas tres proposiciones una generalización hipotética de nociones intuitivas ó empíricas, de ningún modo necesarias á la razón humana, ni justificables según sus leyes.

38. **Los principios del paralelogramo y de la palanca.**—Algo parecido puede decirse á propósito de estas dos proposiciones. Obsérvese que no las denominamos postulados: en efecto, en ellas no se postula ninguna verdad que no pueda someterse á inmediata verificación, por lo menos, en determinados casos. En nuestro modo de ver, son leyes empíricas, experimentalmente demostrables; aunque para muchos autores son teoremas racionalmente deducibles, el primero, del principio de la independencia ó de un raciocinio especial (más especioso que convincente), el segundo, de la teoría de composición de fuerzas.

Una de las objeciones de más fondo que se hacen á la Mecánica clásica, es la de que unifica sin razón los conceptos dinámico y estático de la fuerza, dando con ello, implícita ó expresamente, carácter de entidad substantiva á toda causa de movimiento: en ciertos tratados se establece estáticamente la composición vectorial de las fuerzas concurrentes, y se extiende después la ley á los efectos dinámicos, mientras que en otros se procede á la inversa, deduciendo esta composición del principio de la independencia. Y, naturalmente, tanto unos como otros dan á entender que la fuerza se nos ofrece como causa substantiva, cuyos efectos son totalmente independientes del estado de reposo ó movimiento en que el sujeto móvil se halle.

Pues bien; á esta objeción, que en el fondo significa la duda de si una fuerza, desde que cesa el equilibrio en que intervenía, conservará en el movimiento las mismas leyes de acción, no puede en verdad replicarse *a priori*, sino con el contenido del principio de la independencia y con la hipótesis de la constancia de las leyes físicas; pero en todo caso, creemos lógico procurar desvirtuar en lo posible la objeción y aumentar los elementos de juicio favorables á dicho principio, mediante la concordancia entre la composición de efectos dinámicos que él establece, con la de los estáticos evidenciada por la experiencia, es decir, mediante algo parecido á una verificación experimental directa, en los casos que la permiten.

Y otro tanto decimos del principio de la palanca, aparato cuyo conocimiento experimental, como fundamental de nuestra ciencia, tiene en nuestro modo de ver mucho mayor importancia de la que acostumbra á dársele en los tratados. El fué, indudablemente, el punto de partida de los estudios estáticos, y el que por sucesivas transformaciones é inducciones ha ido guiando á la inteligencia humana hasta la gran síntesis conocida en la Ciencia con el nombre de *Principio ó teorema de las velocidades virtuales;* y ante esta con-

sideración, creemos lógico darle todo su valor y, en vez de *deducir de lo general discutible lo particular directamente demostrable, inducir de lo particular demostrado los fundamentos de la teoría que conduce á la generalización.*

39. **Conclusiones generales.**—Toda ciencia, ha dicho un analista eminente (*), puede elegir libremente sus axiomas ó postulados de partida, sin otra restricción que la impuesta por la necesidad lógica de evitar contradicciones. Ampliando el aforismo, que no creemos rechace nadie, diremos también nosotros que todo expositor de una ciencia puede elegir libremente sus puntos de partida, sin otra restricción que la necesidad de verse conducido lógicamente á los resultados ya obtenidos por otros investigadores y contrastados por la verificación experimental.

Pues bien: á pocas ciencias de la enciclopedia humana podrá aplicarse todo esto con mayor razón que á la Mecánica racional. Por lo mismo que, según queda bosquejado, sus conceptos fundamentales aparecen envueltos en tan acentuada obscuridad, los esfuerzos encaminados á constituirla sobre bases sólidas é inconmovibles, á dar claridad y allegar elementos de convicción en sus verdades de partida, son cada día más intensos y numerosos, y los sistemas de exposición en que se huye de la forma clásica para los principios fundamentales, se multiplican profusamente.

No es propio de este lugar extendernos en una enumeración siquiera de estos sistemas; únicamente diremos que entre ellos son más de notar varios en que se elimina de los principios la noción de fuerza, que sólo figura después, y se conserva con tal nombre simplemente por comodidad, cuando aparece como resultado de transformaciones en las expresiones analíticas. Para ello, naturalmente, hay que recurrir á otros principios hipotéticos ó postulados; y como, en general, tanto estos sistemas como los demás que se han

(*) *M. Poincaré.* Obra citada.

imaginado se equivalen entre sí, en cuanto á los resultados y conclusiones analíticas, dicho está que también los principios se equivalen entre sí. Por tanto, los ataques de la crítica dirigidos contra un sistema, alcanzan virtualmente á todos los demás: como que no van, en realidad, contra la Mecánica, sino contra la alta Filosofía de la Ciencia, que no sabe ni puede decirnos qué son el espacio, el tiempo, la materia, la fuerza, la inercia, la masa.

Considerando, además, que algunos de los nuevos postulados son difíciles de concebir para los principiantes y se hacen extraños hasta á inteligencias avezadas al estudio de estas difíciles cuestiones, compréndese que predomine en los autores, hoy por hoy, la tendencia á conservar, con ligeras variantes debidas al estilo personal de cada uno, la forma clásica de exposición de la Mecánica, la debida á los Galileo, los Newton, los d'Alembert, los Laplace, los Lagrange y demás analistas que han seguido sus huellas. Como norma crítica para juzgar de la exactitud de cada uno y de todos los sistemas, queda en todo caso *la verificación a posteriori*, esto es, la contrastación de los resultados teóricos con los de la observación y la experiencia; y hasta el día, en lo principal y más saliente de las conclusiones del análisis, según el procedimiento clásico, se han registrado y se registran tan numerosas y significativas concordancias, que el hecho de que la teoría se declare incapaz para dar razón de algunos fenómenos físicos, aparte de que puede responder á ignorancias concretas de algunas leyes peculiares á tales fenómenos, ó bien á errores de interpretación, solamente autoriza *y aun obliga* á poner al frente del sistema clásico, como de cualquiera otro, un lema que advierta *la incognoscibilidad de lo absoluto*. De ese modo, quien á su estudio se dedique, no perderá nunca de vista que no es prudente, que no es propio de verdaderos sabios, declarar universal é inmutable ninguna ley física, ni olvidará que toda conclusión científica debe considerarse sujeta á posible rectificación, impuesta un

día acaso por nuevas investigaciones, y se penetrará debidamente de que *las conquistas de la humana inteligencia son, sí, brillantes, pero sólo estimadas respecto de nuestra pequeñez, en tanto que son estrechas y pobres en relación con la grandiosidad del Universo.*

Nota bibliográfica. — He aquí, en cualquier orden, varias obras de crítica que pueden consultarse:

Clerk Maxwell. «Matter and motion.» London: 1908.

Streinz. «Die physikalische Grundlangen der Mechanik.» Leipzig: 1883.

Neumann. «Ueber die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie.» Leipzig: 1870.

Mach. «Die Mechanik in ihrer Entwickelung, historisch-kritisch dargestellt.» Leipzig: 1883.

Andrade. «Leçons de Mécanique physique.» París: 1898.

Picard. «Quelques réflexions sur la Mécanique.» París: 1902.

Freycinet. «Sur les principes de la Mécanique rationelle.» Paris: 1902.

Poincaré. «La sciencie et l'hypotèse.» París.

Vaschy. «Sur la définition des masses et des forces.» Nouvelles Annales de Mathématiques. Janvier, 1895.

Bouasse. «Etude des théories de la Mécanique.» Paris: 1895.

Adhémar. «Les principes de la Mécanique et les idées de Hertz.» Revue des questions scientifiques. 20 Janvier 1902. Bruxelles.

Discusión académica de la Société scientifique de Bruxelles.» Anales de la misma: sesión de 9, 10, 11 de Abril de 1901.

Echegaray. «Conferencias sobre Física matemática», publicadas en la *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid.*

Muñoz del Castillo. «Unidades físicas.» Madrid: 1890.

Herwig. «Physikalische Begriffe und absolute Maſse.» Leipzig: 1880.

Isenkrahe. «Das Räthsel der Schwerkraft.» Braunschweig: 1879.

Hertz. «Die Principien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt.» Leipzig: 1894.

Boltzmann. «Die Principien der Mechanik.» Leipzig, 1897.

Bertrand Rusell. «L'idée d'ordre et la position absolue dan l'espace.» Mémoire. Bibliothèque du Congrès international. Tomo III, París: 1900.

Blondlot. «Exposé des principes de la Mécanique.» Mémoire. Idem Id.

Wickersheimer. «Les principes de la Mécanique.» París: 1908.

Marcolongo. «Le Moderne teorie di Fisica matematica.» Messina: 1903.

Alasia. «L' «Evoluzione della meccanica» di P. Duhem.» Pavia: 1904.

Del *autor de este trabajo.* «Sobre las hipótesis que sirven de fundamento á la Mecánica racional.» Zaragoza: 1903.

Hirn. «L'avenir du Dynamisme dans les sciences physiques.» «La Cinétique moderne et le Dynamisme de l'avenir.» París: 1896.

Volkmann. «Einführung in das Studium der theoretischen Physik.» Leipzig: 1900.

Narr. «Einleitung in die theoretische Mechanik.» Leipzig: 1875.

PUBLICACIONES RECIBIDAS

(Continuación.)

Academy of Sciences (Kansas).—Transactions of the ...—Vol. XX, Part. II.—December, 1906.—State Printing Office.—Topeka, 1907.

Académie Hongroise des Sciences.—Rapport sur les travaux de l' ... en 1906.—Présenté par le Secrétaire Général G. Heinrlch.—Budapest, 1907.

Akadémiai (Magyar Tud.).—Almanach. 1907.—Kiadja A Magyar Tud. Akad.

Societatis Entomologicæ Bohemiæ.—Acta ...—Rocnik IV. 1907. Cislo 3.—V Praze.

Ferreira da Silva (A. J.).—Revista de Chimica Pura e Applicada.—3.º anno, núm. 11, 15 Nov. 1907.—Porto.

Mascart, Haller.—Annales de Chimie et de Physique.—Par Mm. ... Huitième série.—Tome XII.—November, 1907.—Paris, 1907.

K. Svenska Vetenskapsakademien I Stockholm. Arkio för Kemi, Mineralogy och Geologi. Band 2, Hafte 4 6.—Arkiv för Zoology. Band 3, Hafte 3 4.—Utgifvet af ...—Upsala & Stockholm.

K. Vetenskapsakademiens Nobelinstitut.—Meddelanden fran... Band I. Número 7.—Upsala & Stockholm.

American Academy of Arts and Sciences.—Proceedings of the... Vol. 42, número 20-26. March April, 1907.—Boston, Mass.

Royal Irish Academy.—Proceedings of the... Volume XXVII, Section A. Número 3 —Dublin, 1907.

Royal Society of London.—Philosophical Transantions of the.. Serie B. Vol. 199. Pp. 253-279.—London, 1907.

Field Columbian Museum.—Botanical Series.—Vol. II, núm. 4, 5 Report Series.—Vol. III, núm. 1.—Chicago, U. S. A. January, February, 1907.

American Climatological Association.—Transactions of the... For the year 1906. Volume XXII.—Philadelphia, 1906.

Koninklijke Natuurkundige Vereeniging in Nederl-Indie.—Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indie.—Deel LXVI. Tiende serie. Deel X. Weltevreden, 1907.

Bureau of Standards.—Departiment of Commerce and Labor. Bulletin of the .. Vol. 3. Núm. 3 & 4.—Washington, 1907.

Royal Society of London.—Proceedings of the... Serie B. Vol. 79. Número B. 535.—Biological Sciences.—November 18, 1907.

Smithsonian Institution.—Bureau of American Ethnolog y Bulletin 30.—

Handbook of American. — Indians North of México — Editel by Frederick Webb Hodge Tu two parts.—Part. 1.—Washington, 1907.

Geological Survey. — Department of the Interior. — United States... — Charles D. Walcott, Director. — Mineral Resources of the United States.— Calendar year 1905.—David T. Day.—Washington. 1906.

Geological Survey (United States).—Department of the Interior...—Charles D. Walcott, Director.—Water.—Supply and Irrigation. — Paper números 182, 183, 187, 188, 189.—Washington, 1906-1907.

Naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig.—Sitzungsberichte der... 1906.— Leipzig, 1907.

Academie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg.—Bulletin de l'...— 1907, núm. 16, VI serie 15 Novembre.—St. Petersbourg.

American Museum.—The American Museum Journal. Volume VII, Number 7 Nov., 1907.—New York City.

Academia delle Science di Torino (R).—Atti della...—Vol. XLII, Disp. 1.ª 11.ª, 1906-1907.—Torino, 1907.

Osservatorio Astronomico di Torino (R).—Osservazioni Meteorologiche fatte nell'anno 1906 all'Osservatorio della R. Universitá di Torino.—Calcolate dal Doctor Vittorio Fontana.—Torino, 1907.

Université Impériale de Kharkow.—1907.

Society of Edinburgh (Royal).—Proceedings of the . .—No. V.—Volumen XXVII.—Pp. 369-432.

Royal Society.—Proceedings of the ..—Serie A. Vol. 80.—No. A. 535.— London.

Wildeman (E. de). - Etat Independant du Congo. Mission Emile Laurent (1903 1904). Enumeration des plantes recoltées, par Emile Laurent, etcétera.—Fascicule V. Pages I, VIII, CXXI-CCXXV, et 451-617.—Bruxelles.—Novembre, 1907.

College of Sciences Imperial University of Tokyo.—The Journal of the..., Japan.—Vol. XXI. Article, 7, 9, 10, 11; idem XXIII. Article, 1.—Tôkyô, Japan, 1906-1907.

La Feuille des Jeunes Naturalistes. — 1er Décembre 1907.—IV serie 38 année, Núm. 446. - Paris.

Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity.—Vol. XII. Núm. 3. September, 1907.—Baltimore.

The Astrophisical Journal. — Movember, 1907.—Chicago and New York.

Observatory at Batavia.—Cloud Observations at Batavia. Frequency of different forms of clouds during the three years 1903-1905.

Air-pressure, temperature, humidity, and wind on days of bright sunshine at Batavia, 1889 1906. Ang. 1st By W. Van Bemmelen.

List of Magnetic, Disturbances Recordeel at the Batavia Observatory during the period, 1880-1899. By W. Van Bemmelen.

Appendix I, II, III, to Observations made at the royal magnetical and meteorological... Vol. XXVIII. 1905.—Batavia, 1907.

Galileo Galilei.—Le Opere di ... Edizione Nacionale sotto gli auspicii di

Sua Maestá il Ré d'Italia. Volume III, Parte seconda, XIX, Trent'anni di studi galileiani, per Antonnio Favaro. Firenze, 1907,

Wisconsin Natural History Society.—Bulletin of the ... Vol. 1-5. New series.—Milwankee, Wisconsin, 1900-1907.

Royal Yrisch Academy.—Proceeding of the... Vol. XXVI Section B, número 10.—Dublin, 1907.

Accademia di Scienze, Lettere e Arti degli Zelanti Acireale. - Rendicorti e Memorie della..., Anno Accad, CCXXX-CCXXIII.— Serie 3.ª, Vol. I IV 1901-1904.—Rendiconti.- Anno Accad. CCXXXIII-CCXXXIV.—Serie 3.ª, Vol. V, 1905 1906.—Memorie della classe di Lettere.—Acireale, 1906-1907.

University of California.—...Publications in Zoology. Vol. 4, núm. 2, pp. 53-185, 19 tex. fig. Nov. 26, 1907.- Berkeley.

Department of Agriculture in India.— Memoirs of the. . Sept. 1907. Chemical Series Vol. I, núm. 5.—Sept. 1907. Botanical Series Vol. II, número 2.—Calcutta.

Society (The Royal Geographical).—The Geographical Journal. Vol. XXX. Núm. 6. December, 1907.—London.

Poincaré (H), Bigourdan (G.), Deslandres (H.), Puiseux (P.), Radan (R.).—Bulletin Astronomique.—Tome XXIV.—Décembre, 1907.—Paris.

Biblioteca Nazionale Centrale di Ferenze. - Bollettino delle Publicazioni Italiane. - 1907.—Núm. 83.—Novembre.

Laisant (C. A.), Bourlet (C.), Bricard (R.).—Nouvelles Annales de Mathématiques.—Quatrième série.—Tome VII.—Octubre, 1907.—Paris, 1907.

Laisant (C. A.), Maillet (Ed.), Lemoine (E), Grévy (A.).—L'Intermédiaire des Mathematiciens.- Tome XIV.—1907.—Núm. 11.- Nov. 1907.—Paris.

Kelvin, G. C. V. O. D. C. L. Ll. D. J. R. S. etc. John Joly. M. A. D. Se. F. R. S. F. G. S. and William Francis, F. L. S. - The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science.—Sixth Series. - Núm. 84.- December, 1907.—London.

Bibliothéque Universelle.— Archives des Sciences Physiques et Naturelles. Cent douzième année.—Quatrième période.—Tome XXIV. — Núm. 11, 15. Novembre 1907. - Genève.

Ciel et Terre.— Revue populaire d'Astronomie de Météorologie et de Physique du globe. — Vingt. huitième année.— Núm. 19.—1.er Décembre 1907.— Bruxelles.

Society (Royal Astronomical).—Monthly Notices of the...—Vol. LXVIII. Núm. I. November 1907.—London.

Geological Survey of India.—Records of the... Vol XXXV, Part. 4-1907. Calcutta, 1907.

Academie des Sciences.—1907 Deuxième semestre Comptes rendus hebdomadaires des séannces de l'... — Tome 145.—Núm. 22 (25 Nov. 907) 23 (2 Décem. 907) 24 (9 Décem. 907). Paris.

(Se continuará.)

XLII. — Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia undécima.

SEÑORES:

La base del método de Mr. Poincaré para resolver el problema de la Elasticidad, es el principio de la conservación de la energía, como hemos explicado varias veces.

Si las fuerzas exteriores determinan una deformación, que suponemos infinitamente pequeña, el trabajo de dichas fuerzas se conserva íntegro, sea cual fuere el ciclo que los puntos materiales describan.

La aplicación de este principio basta para determinar en cada punto las componentes de las fuerzas interiores, que sobre dicho punto actúan.

Y esto supone, que para dichas fuerzas existe una función determinada U de todos los puntos del sistema, mejor dicho, de sus coordenadas.

Las componentes para un punto material cualquiera del sólido elástico, se determinarán tomando las derivadas con relación x, y, z, ó si se quiere con relación á u, v, w, que son las que determinan la nueva posición de cada punto.

Es pues fundamental en el método de Mr. Poincaré el estudio de la función U, ó también el de la función potencial

$$\Pi = -U.$$

Esta función U contiene todas las coordenadas $x\ y\ z$, $x'\ y'\ z'$..... de todos los puntos del sistema elástico.

Pero, según decíamos en la conferencia anterior, á estas coordenadas, que son las naturales y las que generalmente se usan, Mr. Poincaré substituye otras coordenadas, que no son precisamente las distancias r..... entre cada dos puntos del sistema, sino sus cuadrados r^2....., á fin de simplificar los cálculos.

Estas nuevas coordenadas son las que designa por

$$R,\ R',\ R''.....$$

De manera que la función U vendrá expresada de este modo antes de la deformación,

$$U = F\,(R,\ R'.....).$$

Y una vez verificada la deformación bajo la acción de las fuerzas exteriores, como las magnitudes R serán distintas de lo que eran antes, si representamos en general por ρ el incremento de las R, es decir, el incremento de los cuadrados de las distancias, la función U se convertirá en

$$U = F\,(R + \rho,\ R' + \rho',\ R'' + \rho''.....)$$

Pero aquí ocurre una duda, según explicábamos en la conferencia anterior.

Para determinar un sistema de puntos n, el número de distancias ó de cuadrados de distancias, que da lo mismo, necesario y suficiente es $3n - 6$, que representaremos por N_1; número muy inferior, porque es de otro orden, al de todas las distancias entre cada dos puntos, que tiene por valor $\frac{n\,(n-1)}{2}$ y designaremos por N_2.

Y la duda es esta; duda que no se aclara, que no se resuelve explícitamente en la obra de Mr. Poincaré.

En la función F, ¿entran todas las distancias R en número N_2?

¿O entran las necesarias y suficientes, es decir, las verdaderas variables independientes, que son en número N_1?

¿O entra un número intermedio mayor que N_1 y menor que N_2?

Esto no se especifica, y no deja de tener su importancia para la claridad del método, sobre todo en la enseñanza elemental.

Porque es lo cierto, que la forma de función F no queda suficientemente definida.

Es decir, *su valor numérico*, que es el de la función de fuerzas ó el de la potencial para un estado cualquiera del sistema elástico, *definido queda sea cual fuere la forma de F.* Pero esta forma, es decir, la forma analítica de F, es múltiple en cualquiera de los tres casos que considerábamos.

1.° Si no entran más variables R en la función F que las puramente precisas, su número será N_1; pero éstas pueden ser escogidas arbitrariamente.

Puede escogerse el sistema que explicábamos en las conferencias anteriores, es decir, por ejemplo, tres puntos cualesquiera, constituyendo en cierto modo una base, y referida á esta base, por tres distancias, todos los demás puntos del sólido, lo cual da ya por sí multitud de formas para F.

Podemos, en cambio, unir los puntos cuatro á cuatro, constituyendo una red completa de tetraedros.

Podemos todavía formar redes parciales, y referir los puntos restantes del sistema, á tetraedos parciales de estas redes.

Caben, en suma, un número inmenso de combinaciones.

2.° Si en F entran las N_2 distancias, todavía podremos formar multitud de funciones F.

Como escogidas las N_1 variables independientes, cada una de las restantes es función de éstas; combinando todas estas ecuaciones con la de U, es fácil, es elemental, que puede darse á F una forma en que entren todas las magnitudes R por un número ilimitado de combinaciones.

3.° Si queremos que en F entren un número de magnitudes R mayor que N_1 y menor que N_2, no habrá más que acudir á los medios indicados en el segundo caso.

Y permítasenos que no insistamos más en cuestiones verdaderamente elementales.

De este análisis se deduce, que la forma de F no está definida de una manera precisa; que el número de verdaderas variables independientes es N_1, y que si entra alguna otra magnitud R en F, esta magnitud debe considerarse como función de las que hayamos elegido como variables independientes, cuyo número es N_1, número necesario y suficiente para determinar el valor de la función F en cualquier estado del sistema elástico, es decir, para determinar la potencial que en ese estado posee.

***

Sea como fuere, y sin precisar la forma de la función F, claro es que podremos escribir, como escribe Mr. Poincaré,

$$U = F(R + \rho, R' + \rho' \ldots\ldots).$$

Como las magnitudes ρ son muy pequeñas, porque definen la deformación, y las deformaciones elásticas que consideramos son muy pequeñas con relación á las dimensiones del cuerpo, será legítimo desarrollar la función U por la serie de Taylor, y es claro que suponemos implícitamente que la función U goza de esta propiedad.

Tendremos, pues,

$$U = F(R, R' \ldots\ldots) + \frac{dF}{dR}\rho + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2F}{dR^2}\rho^2 + \frac{d^2F}{dR'^2}\rho'^2 + \ldots\ldots\right)$$
$$+ \frac{dF}{dR'}\rho' + \left(\frac{d^2F}{dR\,dR'}\rho\rho' + \frac{d^2F}{dR\,dR''}\rho\rho'' + \ldots\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Y nos detenemos en los términos de segundo orden, despreciando los restantes, por suponer que dicha aproximación es suficiente para el problema en cuestión.

Para simplificar la escritura, podemos condensar los términos análogos bajo el signo Σ, y tendremos la fórmula siguiente, que es idéntica á la anterior:

$$U = F(R, R' \ldots\ldots) + \Sigma \frac{dF}{dR} \rho + \frac{1}{2} \Sigma \frac{d^2F}{dR^2} \rho^2 + \\ + \Sigma \frac{d^2F}{dR\, dR'} \rho\rho' + \ldots\ldots$$

Esto es perfectamente legítimo, sea cual fuere el caso que consideremos, y sean las R dependientes ó independientes.

Lo único que queda en suspenso es el carácter y la forma que ha de tener F, porque, según sea F, serán distintas sus derivadas con relación á R, R'.....

Verdad es que en el desarrollo del método no tendremos que hacer estos cálculos, y nos contentaremos con obtener *coeficientes en bloque*, por decirlo así, lo cual quita importancia, en parte, á la duda que antes formulábamos.

Bajo la primera Σ entran todas las ρ que contiene la función F.

En la segunda, todos los cuadrados de estas mismas.

En la tercera, todos los productos, dos á dos.

Entre ellas habrá N_1, que serán independientes; las restantes serán funciones de las primeras; de suerte que la expresión anterior no puede ofrecer ningún género de duda, al menos así lo esperamos, si hemos interpretado debidamente dicha ecuación.

Aquí termina la primera parte del procedimiento, que antes explicábamos en síntesis general.

Hemos obtenido la expresión de la función U, ó si se quiere de la potencial que corresponde al estado del sólido elástico ya deformado. Sin que en esta primera parte nos

quede más duda, que la ya explicada respecto á la forma analítica de la función F, según las variables R y ρ que entren en ella.

***

Combinación de los dos sistemas de variables.—Pero decíamos que Mr. Poincaré no conserva en todo el cálculo las variables R y ρ, sino que emplea á la vez estas cantida-

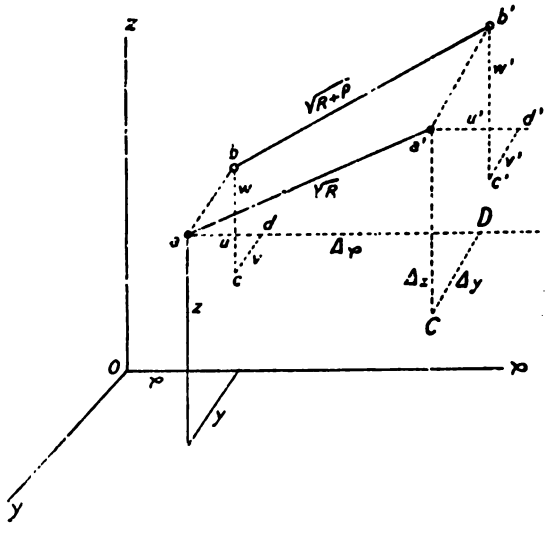


Figura 32

des y las coordenadas ordinarias x, y, z, así como las verdaderas incógnitas del problema u, v, w.

A este fin conserva las R en los coeficientes diferenciales; pero expresa las ρ en función de u, v y w.

El método para conseguir esto es bien sencillo y bien elemental.

Sean a y a' (fig. 32) dos puntos del sistema que corres-

ponden al valor R; de modo que la distancia $a\,a'$ será igual á $\sqrt{R}$.

Las coordenadas del punto a suponemos que son x, y, z. Las del punto a' las representaremos por

$$x + \Delta x, \quad y + \Delta y, \quad z + \Delta z.$$

De modo que tendremos en la figura

$$aD = \Delta x, \quad DC = \Delta y, \quad a'C = \Delta z.$$

Deformado el sólido elástico, el punto a vendrá á parar á b; el a' á b'; y según las notaciones establecidas para expresar las variaciones de las coordenadas por virtud de la deformación, tendremos:

$$ad = u, \; cd = v, \; bc = w; \; a'd' = u', \; c'd' = v', \; b'c' = w',$$

y también

$$u' - u = \Delta u, \quad v' - v = \Delta v, \quad w' - w = \Delta w,$$

siguiendo la misma notación que hemos empleado para los incrementos de x, y, z.

La recta $a\,a'$ vendrá á parar á $b\,b'$, y su longitud será evidentemente $\sqrt{R + \rho}$.

Con estos elementos podemos expresar el valor de ρ en función de u, v y w.

En efecto; tendremos

$$R = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2,$$

$$R + \rho = (\Delta x + u' - u)^2 + (\Delta y + v' - v)^2 + (\Delta z + w' - w)^2,$$

ó bien

$$R + \rho = (\Delta x + \Delta u)^2 + (\Delta y + \Delta v)^2 + (\Delta z + \Delta w)^2;$$

y desarrollando

$$R+\rho=\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2+2(\Delta x\Delta u+\Delta y\Delta v+\Delta z\Delta u)+$$
$$+\Delta u^2+\Delta v^2+\Delta w^2;$$

poi fin restando de esta ecuación la primera

$$\rho=2(\Delta x\Delta u+\Delta y\Delta v+\Delta z\Delta w)+\Delta u^2+\Delta v^2+\Delta w^2.$$

Como hemos obtenido este valor de ρ podríamos obtener los de ρ', ρ''..... para todos los incrementos de las magnitudes R, R'..... que entran en la expresión de U, consiguiendo lo que indicábamos antes, á saber: expresar las ρ en función de las u, v, w.

Porque en efecto; ya hemos visto antes que

$$\Delta u=u'-u,\quad \Delta v=v'-v,\quad \Delta w=w'-w.$$

En el valor de ρ distingue Mr. Poincaré dos partes: la primera

$$2(\Delta x\,\Delta u+\Delta y\,\Delta v+\Delta z\,\Delta w),$$

que puede ponerse bajo esta forma:

$$2[\Delta x\,(u'-u)+\Delta y\,(v'-v)+\Delta z\,(w'-w)],$$

y que, por lo tanto, *es función lineal* de las u, v, w, y como estas son cantidades muy pequeñas, porque las deformaciones lo son, esta primera parte del valor de ρ puede decirse en términos generales y dada su forma lineal, que es una cantidad muy pequeña de primer orden.

Mr. Poincaré la designa por ρ_1, de suerte que tendremos

$$\rho_1=2\,(\Delta x\,\Delta u+\Delta y\,\Delta v+\Delta z\,\Delta w).$$

La segunda parte del valor de ρ es

$$\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2,$$

ó también

$$(u' - u)^2 + (v' - v)^2 + (w' - w)^2;$$

y desarrollando

$$u'^2 + v'^2 + w'^2 + u^2 + v^2 + w^2 - 2u'u - 2v'v - 2w'w,$$

de suerte que es de segundo grado de pequeñez, por lo menos, en u, v, w, puesto que es un polinomio homogéneo de este grado.

Se representará por ρ_2, y tendremos

$$\rho_2 = \Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2,$$

de suerte que podremos escribir

$$\rho = \rho_1 + \rho_2,$$

en que los subíndices nos indican que la primera cantidad del segundo miembro es una *función lineal*, por lo menos de primer orden de pequeñez, y en que el segundo término es un polinomio de segundo grado, ó de segundo orden de pequeñez, por lo menos.

Si lo que hemos hecho para R y para ρ lo hiciéramos para todas las rectas que unen dos á dos los puntos del sistema elástico y que entran en F, tendríamos análogamente á los valores obtenidos,

$$\rho' = \rho'_1 + \rho'_2$$
$$\rho'' = \rho''_1 + \rho''_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Podemos, pues, eliminar en el valor general de U todas las cantidades ρ en función de las u, v, w.

Y tendremos

$$U = F(R, R'.....) + \Sigma \frac{dF}{dR}(\rho_1 + \rho_2) + \frac{1}{2} \Sigma \frac{d^2F}{dR^2}(\rho_1 + \rho_2)^2 +$$

$$+ \Sigma \frac{d^2F}{dR\,dR^2}(\rho_1 + \rho_2)(\rho'_1 + \rho'_2),$$

en que U representa la potencial después de la deformación; F la potencial en el estado natural; los coeficientes diferenciales serán funciones de la R; la primera Σ contendrá tantos términos como cantidades R entran en F.

De la segunda Σ podemos decir otro tanto, y la última contendrá, á su vez, tantos términos como combinaciones pueden efectuarse, dos á dos, con las R que entran en F.

Pero, ¿cuál es la forma analítica de F y cuántas R entran?

Sobre esto pesa la misma duda que al principio; duda, volvemos á repetirlo, que en el desarrollo del método no tiene importancia, pero que puede tenerla para ciertos puntos, que indicaremos después.

Todo lo demás es correcto y preciso.

Continuemos, pues, desarrollando el método en cuestión.

El último valor de U puede ponerse bajo esta forma:

$$U = F(R, R'.....) + \Sigma \frac{dF}{dR}\rho_1 + \Sigma \frac{dF}{dR}\rho_2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \Sigma \frac{d^2F}{dR^2}(\rho_1^2 + 2\rho_1\rho_2 + \rho_2^2) +$$

$$+ \Sigma \frac{d^2F}{dR\,dR^2}(\rho_1\rho'_1 + \rho_2\rho'_2 + \rho_2\rho'_1 + \rho_1\rho'_2).$$

Ahora bien; $\rho_1\,\rho_2$ es de tercer orden de pequeñez, por lo menos; ρ^2_2 es de cuarto orden de pequeñez; $\rho_1\,\rho'_2 + \rho_2\,\rho'_1$ es de tercer orden, y $\rho_2\,\rho'_2$ de cuarto orden.

Suprimiendo todas estas cantidades, tendremos:

$$U = F(R, R'.....) + \Sigma \frac{dF}{dR} \rho_1 + \Sigma \frac{dF}{dR} \rho_2 +$$
$$+ \frac{1}{2} \Sigma \frac{d^2F}{dR^2} \rho_1^2 + \Sigma \frac{d^2F}{dR\, dR^2} \rho_1 \rho'_1.$$

Mr. Poincaré compara esta ecuación con la que antes obtuvimos

$$U = U_0 + U_1 + U_2,$$

que expresaba el valor de la función de fuerzas ó de la potencial en valores de u, v, w; y como U_1 era lineal, y U_2 de segundo grado, es evidente, puesto que ambas expresiones de U deben ser idénticas, que debe tenerse igualando las expresiones del mismo orden,

$$U_0 = F(R, R'.....)$$
$$U_1 = \Sigma \frac{dF}{dR} \rho_1$$
$$U_2 = \Sigma \frac{dF}{dR} \rho_2 + \frac{1}{2} \Sigma \frac{d^2F}{dR^2} \rho_1^2 + \Sigma \frac{d^2F}{dR\, dR'} \rho_1 \rho'_1.$$

De todas maneras, de estas expresiones apenas hemos de hacer uso en adelante.

Con esto concluye la segunda parte del método, según antes lo hemos sintetizado.

Es decir, que hemos expresado U en las antiguas y las nuevas coordenadas á la vez: la F y las derivadas, no contienen más que las R; las ρ_1 y ρ_2 son polinomios de primero y segundo grado en u, v, w, y también contiene Δx, Δy, Δz, que son las diferencias de coordenadas de las extremidades de cada distancia $\sqrt{R}$.

Y pasemos á la tercera parte, es decir, á la simplificación

de las fórmulas, teniendo en cuenta la influencia del radio de actividad molecular.

***

Simplificación de las fórmulas, teniendo en cuenta el radio de actividad molecular.

Lo hemos indicado varias veces y con diversos motivos: los tres métodos que nos hemos propuesto explicar para resolver el problema de los sistemas elásticos sometidos á diferentes fuerzas, parecen completamente distintos, y el alumno que por primera vez los estudia, recibe la impresión vivísima de esta diferencia radical.

Y sin embargo, entre los tres hay grandes semejanzas, que hemos procurado señalar. Y una de estas semejanzas, uno de estos puntos de contactos, digámoslo así, entre los tres métodos, es el que vamos á estudiar ahora.

En el método de Cauchy, por ejemplo, para determinar las componentes de la fuerza interior, que actúa sobre cada punto é igualarlas á cero, empezábamos por estudiar la acción de todos los puntos del sistema sobre el punto elegido, desde el punto más próximo al más lejano, integrando en toda la extensión del cuerpo elástico.

Si m es el punto cuyo equilibrio queremos establecer, y m' es otro punto material inmediato á m, hay que calcular la acción de m' sobre m.

Si m'' es un punto muy lejano, aunque esté en los límites del cuerpo, hay que hacer para m'' los mismos cálculos que para m', determinando la acción ó el esfuerzo atractivo ó repulsivo que ejerce m'' sobre m.

Y lo mismo para todos los puntos del cuerpo.

Y después de hecho esto, aplicamos un principio que es general, resultado de la experiencia ó hipótesis que naturalmente ocurre y en la experiencia se funda.

Decimos: sobre *m* sólo influyen prácticamente los puntos próximos *m'*.....; los puntos lejanos no ejercen ninguna influencia, ó es una influencia despreciable en la práctica.

Y prácticamente se determina, como explicábamos en otra conferencia, en otro curso, una distancia mínima que llamaremos *r* y á que se da el nombre de radio de actividad molecular.

Todo punto *m'* que dista de *m* una longitud menor que *r* ejerce acción apreciable sobre este punto, y hay que calcular el esfuerzo que desarrolla al establecer el equilibrio del punto material *m*.

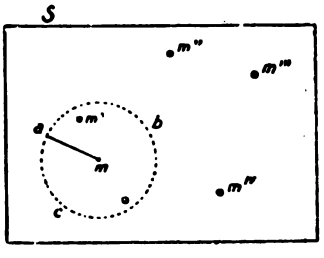


Figura 32 bis.

Todo punto *m''* en que la distancia *m m''* es mayor que *r*, queda fuera de juego.

De suerte, que si tomando *m* como centro (fig. 32 bis) con un radio *m a* = *r* trazamos una esfera *abc*, para el equilibrio del punto *m*, sólo hemos de tener en cuenta los puntos materiales *m'*..... interiores á dicha esfera. De todos los puntos exteriores á la misma *m''*, *m'''*..... podemos prescindir en absoluto.

Esto simplifica los cálculos, y esto es practicamente rechazar el principio de la acción á distancia, cuando la distancia es superior á fracciones muy pequeñas de milímetro.

Este mismo principio de simplificación se aplica en el método de Lamé.

Y este mismo principio, bajo la forma conveniente, vamos á aplicarlo en el método de Poincaré.

Por eso decíamos, que los métodos son distintos, á partir de su origen se separan y luego, de cuando en cuando, se unen por efecto de un principio común ó de una hipótesis ó de hipótesis análogas.

Introduzcamos en la función U que emplea Mr. Poincaré este principio que acabamos de recordar.

Sea un sólido elástico S (fig. 33) en estado de equilibrio natural con fuerzas ó sin fuerzas externas, importa poco; y sean a, b, c..... d, e, f..... diferentes puntos materiales de dicho sólido en estado de equilibrio natural, según decimos.

Si aplicamos fuerzas exteriores X, Y, Z....., el sólido experimentará deformaciones infinitamente pequeñas.

Los puntos a, b, c..... vendrán á parar á a', b', c'....., y los puntos d, e, f..... ocuparán las posiciones d', e', f'.....

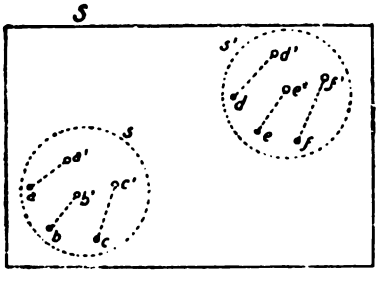


Figura 33.

Estas deformaciones harán variar la función de fuerzas, ó si se quiere la función potencial; de modo que si llamamos ΔU á la variación de la función de fuerzas, en esta cantidad habrá variado, salvo el signo, la potencial del sistema; y si las fuerzas exteriores cesasen y los puntos volvieran á su posición primitiva, dado que en todo este ciclo las velocidades fuesen nulas, al volver el sistema á su primera posición desarrollaría un trabajo ΔU como hemos explicado en otras ocasiones.

Y ya hemos hecho notar, dicho sea entre paréntesis, que la función de fuerzas y la función potencial siempre pueden contener una constante arbitraria.

Ahora bien; todo punto ó conjunto de puntos, que cambia de posición, modifica el valor de la función potencial, y unos puntos influyen en otros.

Y de aquí se deducen estas consecuencias.

Si a, b, c..... cambian de posición determinarán una variación en la potencial.

De suerte que los puntos contenidos en el espacio s por

variar de posición, y admitiendo que los demás puntos del cuerpo quedan fijos, determinarán en la potencial general U una variación de potencial $\Delta_1 U$.

Pero además, en la teoría general, modificarán la posición de los puntos d, e, f..... contenidos en el espacio s', y la variación de estos últimos alterará en general la potencial del sistema.

En una palabra; la variación de potencial en un espacio s tiene resonancia en los demás espacios del cuerpo.

Si á su vez alteramos las posiciones de d, e, f....., podemos repetir todo lo dicho para los puntos a, b, c.....

En suma; si en dos espacios s y s' alteramos las posiciones de los puntos que contienen, la potencial U variará por tres conceptos: 1.° Por la deformación de s, que alterará la potencial del sistema. 2.° Por la deformación de s'. Y 3.° Por que estas deformaciones influyen recíprocamente unas en otras.

Esto es general, admitiendo que las acciones se transmiten en el interior del cuerpo por el principio de la acción á distancia. Pero si aplicamos el principio, que por abreviar podemos llamar del *radio de actividad*, las tres acciones anteriores se reducen á dos. La potencial del sistema varía separadamente por la deformación de s y por la deformación de s', sin que una influya en otra; es decir, que respecto á los espacios s, s' situados á mayores distancias que el radio de actividad, la variación total en la función de fuerzas ó en la potencial es la suma de las variaciones de la potencial producidas por deformaciones en cada uno de estos espacios. Al menos así entendemos nosotros la simplificación en que vamos ocupándonos para el método de Mr. Poincaré.

Y ahora vamos á ver cómo la explica el insigne autor.

***

Vamos á traducir literalmente aquellos párrafos que, á nuestro entender, expresan con más claridad el pensamiento del maestro, sin otras modificaciones que las de introducir algunas figuras que aclaren los conceptos.

Pero recordemos antes las tres ecuaciones que hemos escrito hace un momento.

$$U_0 = F(R, R'.....)$$

$$U_1 = \Sigma \frac{dF}{dR} \rho_1$$

$$U_2 = \Sigma \frac{dF}{dR} \rho_2 + \frac{1}{2} \Sigma \frac{d^2F}{dR^2} \rho_1^2 + \Sigma \frac{d^2F}{dR\,dR'} \rho_1 \rho'_1.$$

Estas ecuaciones no tienen importancia para el desarrollo del método; sólo sirven para agrupar los términos del desarrollo de U que antes expusimos en tres grupos, por decirlo así: uno que se refiere á la cantidad constante U_0; otro que comprende los términos lineales en u, v, w....., y el tercero que comprende los de segundo orden. Y hace esta clasificación el autor para poder tratar separadamente cada uno de ellos; mejor dicho, los dos últimos.

Y ahora transcribamos la traducción del párrafo 25 de la obra de Mr. Poincaré, que es como sigue:

«*Radio de actividad molecular.*—Para continuar los cálculos es necesario introducir una nueva hipótesis: vamos á suponer que las acciones moleculares no se ejercen sino á distancias muy pequeñas; de modo que son inapreciables cuando alguna de estas distancias es mayor que cierta longitud sumamente pequeña, á que se da el nombre de radio de actividad molecular.

Por consiguiente, $\frac{dF}{dR}$ y $\frac{d^2F}{dR'}$ se supondrá que son muy pequeñas, á menos que la distancia á $\sqrt{R}$ de las dos moléculas que están á las extremidades de R no sea inferior á dicho radio de actividad.

Para los términos análogos á $\frac{d^2 F}{dR\,dR'}$ hay algo más que advertir. Sean m_1, m_2 las moléculas cuya distancia es $\sqrt{R}$; m_3, m_4 las moléculas cuya distancia es $\sqrt{R'}$; pues el término $\frac{d^2 F}{dR\,dR'}$ será despreciable, á menos que las moléculas m_1, m_2, m_3, m_4 no estén todas cuatro en el interior de una esfera de radio muy pequeño: no basta para esto que R y R' sean muy pequeñas por sí; es necesario que los otros lados del cuadrilátero m_1, m_2, m_3, m_4 lo sean también. Estas condiciones son absolutamente necesarias.

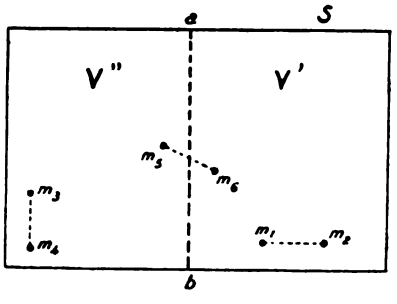


Figura 34.

Dividamos ahora el volumen del cuerpo S (figura 34) en dos volúmenes parciales V', V''.

Y de los tres grupos U_0, U_1, U_2 vamos á considerar primero el grupo U_1.

Suprimamos en U_1 todos los términos, para los cuales $\sqrt{R}$ es superior al radio de actividad molecular. Para ello distinguiremos en U_1 tres grupos de término. En el primero colocaremos los términos tales, que las dos moléculas correspondientes m_1, m_2 estén ambas en el interior del volumen V'. A este conjunto de términos, es decir, á esta parte de U_1 la designaremos por U_1'. En el segundo grupo colocaremos los términos tales, que las moléculas m_3, m_4 estén ambas en el volumen V'' y designaremos el valor de su conjunto por U_1''. En fin; el tercer grupo comprenderá los demás términos; es decir, aquellos para los que las dos moléculas m_5, m_6 estén una en el volumen V', otra en el volumen V'', representando por U_1''' la suma de los términos de este tercer grupo.

Tendremos, pues,

$$U_1 = U_1' + U_1'' + U_1''.$$

Lo mismo que hemos hecho para V_1, vamos á hacer ahora U_2 efectuando una descomposición análoga á la anterior. Los térmimos análogos á $\frac{dF}{dR}$, $\frac{d^2F}{d^2R}$ corresponderán á un par de moléculas, que serán las colocadas á las extremidades de $\sqrt{R}$; y los términos como $\frac{d^2F}{dR\,dR^1}$ en que habrá dos pares de moléculas, puesto que hay dos distancias $\sqrt{R}$ y $\sqrt{R'}$ corresponderán á su vez á tres moléculas, si las distancias $\sqrt{R}$ y $\sqrt{R'}$ tienen una extremidad común, ó á cuatro moléculas si no tienen ninguna. Y será preciso que las dos moléculas, las tres ó las cuatro estén en el interior de una esfera muy pequeña. Esto, supuesto, reuniremos todavía en un primer grupo términos tales, que las moléculas correspondientes estén todas en el volumen V', y el conjunto de estos términos lo representaremos por U'_2; definiremos análogamente U_2''; y, en fin, U_2''' comprenderá términos tales, que las moléculas correspondientes estén las unas en el interior de V' y las otras en el interior de V''. De este modo resultará

$$U_2 = U_2' + U_2'' + U_2'''.$$

Procedamos ahora á simplificar las expresiones de U_1 y U_2.

Ocupémonos, en primer lugar, de U_1.

Los términos que entran en U_1''' son excesivamente menos numerosos que los que forman U_1' y U_1''. Son efecto, términos tales, que el vector $m_1\ m_2$ (fig. 35) (que es una reproducción de la figura 34) tiene sus extremidades: una en el volumen V'; la otra en el volumen V''. Este vector se ha

supuesto que es inferior al radio de actividad molecular, como para todos los demás vectores del cuerpo S, pues los términos que proceden de vectores superiores se han suprimido. Luego la distancia de la molécula m_1 á la superficie de separación es menor que este radio, y lo mismo puede repetirse para m_2. Las moléculas consideradas estarán, pues, comprendidas en una zona estrecha por una parte y otra de la superficie de separación $a\ b$, tal como la zona $a'\ b'\ b''\ a''$.

Así, pues, el volumen de dicha zona será del mismo orden de magnitud que el radio de actividad molecular, porque suponemos, desde luego, que el área de la superficie que le sirve de base es finita.

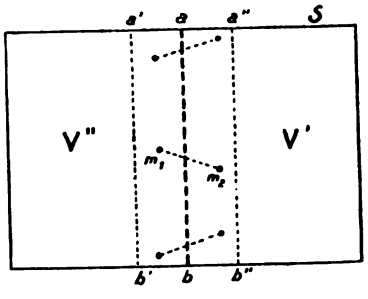


Figura 35.

De aquí resulta que el volumen de la zona en cuestión es muy pequeño comparado con los volúmenes V' y V''; por lo tanto, podemos despreciar U_1''' en comparación con U_1' y U_1'', y se podrá escribir

$$U_1 = U_1' + U_1''.$$

Un razonamiento análogo daría la igualdad con el mismo grado de aproximación

$$U_2 = U_2' + U_2''.$$

Estas igualdades expresan que, para tener los valores de U_1 y U_2 relativos á un volumen $V' + V''$, basta efectuar la suma relativa á los dos volúmenes parciales V' y V''.

El teorema subsiste, evidentemente, si se considera un número mayor de volúmenes parciales, con la condición, sin embargo, de que estos volúmenes parciales sean muy gran-

des con relación á la esfera de acción molecular; de lo contrario, la demostración no podría aplicarse, porque la zona $a'\ b'\ b''\ a''$ no sería despreciable con relación á V' y V'',»

Hasta aquí la traducción exacta de los párrafos citados que aparecen en la obra de Mr. Poincaré.

A estos párrafos se refieren, precisamente, las pequeñas dudas á que antes nos referíamos, y que conviene aclarar para la mejor inteligencia de mis alumnos.

Y sólo haremos algunas indicaciones, porque las dudas expresadas no afectan á la esencia del método empleado por el insigne maestro.

Hasta tal puuto, que para la exposición completa del método hubiéramos podido prescindir de esta parte de nuestra conferencia; pero conviene aguzar el espíritu crítico y extremar la severidad, si vale la palabra, de los que por primera vez estudian estas materias. Que no se acepte nada que no esté absolutamente demostrado, ó que si en algún caso no puede obtenerse este rigor, se tenga conciencia de lo que le puede faltar en orden á una lógica matemática impecable.

***

Los párrafos que antes hemos traducido empiezan suponiendo que cuando $\sqrt{R}$ es menor que el radio de actividad molecular, el coeficiente diferencial $\frac{dF}{dR}$ es despreciable por su grado de pequeñez.

Una consideración análoga se hace respecto á los coeficientes $\frac{d^2F}{dR^2}$ y $\frac{d^2F}{dR\,dR'}$; pero sólo nos ocuparemos del primero para no dar demasiada extensión á este que podemos llamar paréntesis en la exposición del método.

Pues bien; á nuestro juicio *no es evidente* que $\frac{dF}{dR}$ sea

despreciable cuando $\sqrt{R}$ es menor que el radio de actividad molecular. Y admitirlo sin más explicaciones, podría dar lugar á ciertas paradojas que por lo menos conviene aclarar.

Todo ello procede de no haber precisado la forma de la función F, porque esta función que expresa la función de fuerzas ó la potencial puede presentarse bajo formas muy diversas, como ya hemos dicho varias veces.

La función potencial depende de la distribución geométrica de los n puntos materiales, que constituyen el sólido elástico, luego dependerá de las variables independientes R, R'..... $R^{(N_1-1)}$ que son en número N_1: estas son necesarias y suficientes para definir la distribución geométrica de los puntos materiales en cuestión, y por lo tanto, son necesarias y suficientes para definir el valor de la potencial ó de la función de fuerzas, que corresponde á dicho estado del sistema elástico.

Así, pues, estas funciones podrán expresarse de este modo

$$-\Pi = U = F(R, R'..... R^{(N_1-1)})$$

y una vez escogido el triángulo que sirve de base, la función F estará perfectamente *definida* (no decimos *conocida* sino *definida*) salvo la constante de que en otras ocasiones hemos hablado.

Cuando las R sufren variaciones infinitamente pequeñas, la potencial sufrirá una variación definida de este modo:

$$dU = \frac{dF}{dR}\,dR + \frac{dF}{dR'}\,dR' + ... + \frac{dF}{dR^{(N_1-1)}}\,dR^{(N_1-1)}$$

pero si los coeficientes diferenciales que se refieren á valores de R son tales, que $\sqrt{R}$ sea inferior al radio de actividad molecular, de la ecuación anterior habrá que suprimír todos los términos en que la magnitud R se encuentre en este caso, y

sólo dependerá dU de los puntos b, c, d..... (fig. 36) muy próximos á a y habrán desaparecido de la ecuación los demás términos que se refieren al resto del sólido b', c', d'.....

Claro es que suponemos que el triángulo de referencia es ast.

De aquí resulta que en la variación de la potencial sólo influirán, como decimos, los puntos b, c, d..... que rodean al punto a á distancias menores que el radio de actividad molecular.

Todos los demás puntos no influirán en dicha variación.

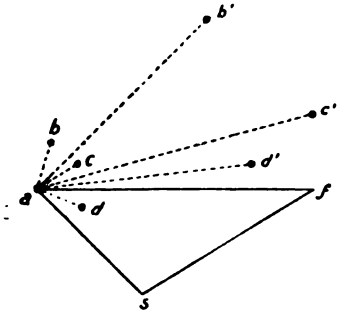


Figura 36.

Y esto es evidentemente absurdo; es paradójico que en la variación de la potencial, que afecta á todo el sistema, no influyan más que los puntos que rodean á pequeña distancia á un punto determinado, absurdo tanto mayor, cuanto podemos decir que el punto a es arbitrario.

Y otro tanto pudiéramos repetir del punto s y del punto t.

En suma, resulta *esta paradoja enorme*: que la variación de la potencial depende del triángulo de referencia que se elija.

Y esta paradoja se ve desde luego que depende de la hipótesis de que se parte: á saber, de que $\frac{dF}{dR}$ sea siempre despreciable cuando $\sqrt{R}$ sea superior al radio de actividad molecular.

En efecto, sea $a\ s\ t$ (fig. 37) el triángulo de referencia, y sea a' un punto material del sistema, tal que la distancia $a\ a' = \sqrt{R}$ sea mayor que el radio de actividad molecular.

Si el punto a', por una variación de R, viene á parar á a'', la variación de la distancia $a\ a'$ podrá no influir en la poten-

cial por la variación que haya experimentado la fuerza entre a y a'; pero las distancias $a'\ b$, $a'\ b'$, por ejemplo, se habrán convertido en $a''\ b$, $a''\ b'$, y si todos estos puntos están dentro de una esfera muy pequeña e, dentro de esta esfera las variaciones influirán en el valor de U; luego no podrá decirse en absoluto que $\frac{dF}{dR}$ sea pequeñisima aunque R sea grande.

Más claro: las R *influyen como coordenadas* que entran en

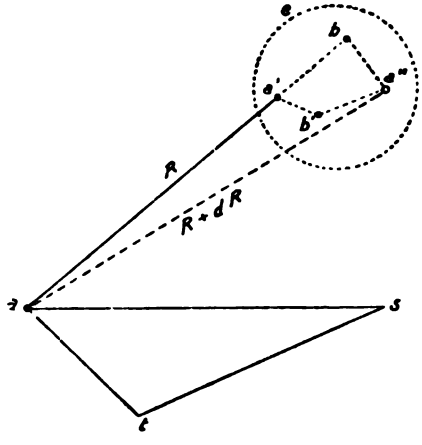


Figura 37.

la función F; y nada más que como coordenadas que sirven para fijar la posición de los puntos del sistema.

De todo ello resulta que no ha podido ser éste el sentido en que el autor del método que exponemos ha empleado las magnitudes R; pues si éste fuera, resultarían las dudas y las paradojas de que hemos procurado dar una idea.

El verdadero espíritu del método empleado por M. Poincaré, creemos que se desprende de los párrafos que antes traducíamos tomados de la obra de dicho autor.

Este sentido procuraremos interpretarlo en la forma más clara que nos sea posible, y á nuestra manera, por decirlo

así; y claro es, que lo fiel ó lo incorrecto de la interpretación es de nuestra propia responsabilidad.

Por ahora, en lo que nos queda de esta conferencia, no haremos más que apuntar la idea, proponiéndonos desarrollarla en la conferencia próxima.

***

Consideremos en el cuerpo elástico, trazadas todas las rectas R, todos los vectores, como dice Mr. Poincaré, que

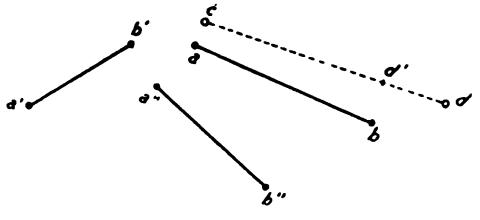


Figura 38.

unen los puntos de dicho sistema dos á dos. Cada vector, ó cada magnitud de R, corresponderá á un par de puntos.

Sean dichos vectores (fig. 38) $a\,b$, $a'\,b'$, $a''\,b''$.....; las magnitudes correspondientes serán $\sqrt{R}$, $\sqrt{R'}$, $\sqrt{R''}$, ...: éstas serán las longitudes de las rectas expresadas.

Cada una de ellas unirá un par de puntos materiales m y m'; m'', m'''; .....

Y suponemos que están trazadas todas estas rectas, de suerte que su número será el que hemos designado por N_2.

Al estado natural corresponden las rectas $a\,b$, $a'\,b'$, $a''\,b''$.....

Una vez deformado el sistema, todas estas rectas cambian de posición y de magnitud. Por ejemplo: la recta $a\,b$ toma la posición $c\,d$, cuya longitud es distinta de la primera. De suerte que, si $a\,b$ es $\sqrt{R}$, $c\,d$ será $\sqrt{R+\rho}$.

La diferencia $d\,d'$ entre el vector $a\,b$ y el vector $c\,d$ será, evidentemente,

$$d\,d' = \sqrt{R+\rho} - \sqrt{R}.$$

Pues bien, el principio que vamos á explicar es este: el cambio de cada recta ó vector trae consigo una variación en la potencial del sistema, por la recta en sí, prescindiendo de su relación con el resto del sistema; y admitimos que la suma de todas estas variaciones parciales de la potencial es la variación total de la misma al pasar el sistema del estado natural al de deformación.

En rigor, esto parece desprenderse de la exposición de Mr. Poincaré, puesto que siempre habla de pares de moléculas y de términos correspondientes á estos pares; términos que pertenecen al desarrollo de U en potencias de ρ.

Y nada tendríamos que observar si no fuera por la circunstancia que hemos indicado, á saber: la indeterminación de forma de la función F cuando comprende todas las R, función que puede afectar, como hemos creído poner en claro, infinitas formas diversas.

Sobre este punto insistiremos en la conferencia próxima, continuando en la misma el desarrollo del método, que, salvado este punto crítico, no nos ofrecerá dificultad de ningún género.

XLIII.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia duodécima.

SEÑORES:

Empezamos á estudiar en las conferencias anteriores la forma de la función de fuerzas U, ó si se quiere de la potencial del sistema elástico en cuestión.

Expresamos dicha función U no por medio de las coordenadas ordinarias x, y, z, sino de las coordenadas R, que representaban los cuadrados de las distancias entre cada dos puntos del cuerpo.

Y suponiendo una deformación sumamente pequeña, que convirtiese cada coordenada R en otra $R + \rho$, obtuvimos el desarrollo siguiente:

$$U_d = F(R + \rho, R' + \rho' \ldots\ldots) = F(R, R' \ldots\ldots) + \Sigma \frac{dF}{dR} \rho + \frac{1}{2} \Sigma \frac{d^2F}{dR^2} \rho^2 + \Sigma \frac{d^2F}{dR\,dR'} \rho\rho',$$

despreciando todos los términos de tercer orden, y designando por U_d la potencial después de la deformación.

Combinando después las coordenadas ordinarias x, y, z y sus variaciones u, v, w con las coordenadas R, llegamos á esta fórmula

$$U_d = F + \Sigma \frac{dF}{dR} \rho_1 + \Sigma \frac{dF}{dR} \rho_2 + \frac{1}{2} \Sigma \frac{d^2F}{dR^2} \rho_1^2 + \Sigma \frac{d^2F}{dR\,dR'} \rho_1 \rho'_1,$$

en que para abreviar hemos representado los términos lineales en u, v, w por ρ_1, y los términos de segundo orden de dichas cantidades por ρ_2, de modo que

$$\rho_1 = 2(\Delta x \Delta u + \Delta y \Delta v + \Delta z \Delta w)$$
$$\rho_2 = \Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2,$$

siendo en general

$$\rho = \rho_1 + \rho_2.$$

Y todo esto, que no sólo es perfectamente correcto, sino que es perfectamente claro, creemos que no ha de ofrecer dificultad de ningún género á los principiantes.

***

Pero consideramos que debíamos insistir sobre un punto que acaso ofrezca dudas.

Dudas que nacen de que no hemos definido con precisión la función F que representa el valor de U.

Porque F es una relación analítica entre las R, pero se puede preguntar: ¿cuáles de estas cantidades R entran en F? ¿Únicamente las R que hayamos elegido como variables independientes, cuyo número es N_1, ó algunas más, ó todas las R, es decir, todas las que corresponden á la totalidad de distancias entre cada dos puntos, cuyo número es N_2?

Porque es evidente, que en F podemos introducir todas las R que queramos hasta agotarlas, y esto de infinitas maneras.

Decimos que esto es evidente y materialmente puede verse, y conviene que los principiantes lo vean, para lo cual presentaremos un ejemplo muy sencillo.

Sea

$$U = F(R_1, R_2)$$

una función de dos variables independientes R_1 y R_2; y supongamos que existen otras dos cantidades R' y R'' que dependen de las variables independientes R_1, R_2 de este modo:

$$R' = \varphi_1 (R_1, R_2),$$
$$R'' = \varphi_2 (R_1, R_2).$$

Pues decimos que es posible introducir en F las R' y R'' de infinitas maneras, de modo que U vendrá expresada en función de R_1, R_2, R', R'' en formas, por decirlo así, inagotables, aunque bien pudieran clasificarse por grupos.

En efecto, de las dos últimas ecuaciones podemos deducir R_1 y R_2 en función de R', R'', y tendremos

$$R_1 = \psi_1 (R', R''),$$
$$R_2 = \psi_2 (R', R'').$$

Ahora bien; la expresión de U podemos expresarla, por ejemplo, de este modo:

$$U = F(R_1, R_2) = F(2R_1 - R_1, 2R_2 - R_2),$$

y sustituyendo por R_1 y R_2 los valores que hemos obtenido, tendremos:

$$U = F[2R_1 - \psi_1 (R', R''), 2R_2 - \psi_2 (R', R'')],$$

que es, en efecto, una función de R_1, R_2, R', R'', es decir,

$$U = F_1 (R_1, R_2, R', R'').$$

Claro es que la forma de F_1 no está definida de una manera precisa, porque la R' y la R'' la podemos introducir de infinitas maneras.

Valga esta otra como último ejemplo:

$$U = F(R_1, R_2) = F\left(\frac{R_1^2}{R_1}, \frac{R_2^2}{R_2}\right) =$$

$$= F\left(\frac{R_1^2}{\psi_1(R', R'')}, \frac{R_2^2}{\psi_2(R', R',)}\right) = F_2(R_1, R_2, R', R''),$$

en que F_2 será distinta á F_1.

Por eso decíamos, y perdónesenos si insistimos tanto en cosas tan triviales, que la forma de F, ó sea de la función de fuerzas, ó de la potencial, está perfectamente definida cuando se determinan de antemano las variables independientes R, aunque será distinta según sean dichas variables; más para cada grupo de variables independientes R, la forma analítica de F será única.

Pero cuando entra un número mayor, ó cuando entran todas las R, la función que expresa el valor de U puede afectar infinitas formas.

***

Esto importa poco cuando sólo se trata del valor de la función U, porque todas las F para cada sistema de valores de R han de dar un valor único para U.

Importa poco cuando las R reciben incrementos ρ_1 y la función se desarrolla por la serie de Taylor,, porque el desarrollo se obtiene como si todas fueran variables independientes.

Pero ya importa más, cuando se consideran las derivadas y se trata de demostrar, que en la teoría de la Elasticidad estas derivadas son nulas, ó pueden considerarse como nulas, cuando $\sqrt{R}$ es menor que el radio de actividad molecular.

Porque estas derivadas, según sea la forma de F, expre-

san un concepto distinto, que depende de la forma analítica de F.

Así vimos que podía presentarse una paradoja en el caso de que sólo entrasen en F las variables independientes.

Bien comprendemos que estas son consideraciones un tanto sutiles por más que sean elementales: las dos cosas á la vez, elementales y sutiles.

Y al final de la conferencia precedente agregábamos: parece que el pensamiento de Mr. Poincaré ha sido otro.

A saber: 1.° Considerar aisladamente cada distancia $\sqrt{R}$, considerar que dicha recta cambia de longitud y posición transportándose á la posición que ha de tener y á la longitud que ha de alcanzar al fin de la deformación muy pequeña que consideramos.

2.° Determinar lo que la potencial varía por esta variación parcial de R, como si fuera una variable independiente.

Y 3.° Repitiendo esto para todas las R, absolutamente para todas, para las del número N_2, sumar todas estas variaciones de U, que nos darán la variación total de dicha función U.

Más claro: si al variar R de R á $R + dR$

U ha recibido una variación..... $A\ dR$;
y el variar R' hasta $R' + dR'$, ha aumentado U en. $A'\ dR'$;
y por variar R''..... $A''dR''$,

y así sucesivamente, la variación total de U será:

$$dU = A\,dR + A'dR' + A''dR''..... A^{(N_2-1)}dR^{(N_2-1)}$$

en que hay tantos términos como cantidades R existen en el sistema.

Ahora bien, esta es una ecuación diferencial, pues integrándola, la función

$$F\,(R, R', R''..... R^{(N_2-1)})$$

que resulte será la función que emplea Mr. Poincaré, ó que podemos suponer que emplea.

Al menos así lo entendemos.

Con lo cual dicha función F pierde su forma indefinida y toma la forma determinada, que resulte de integrar la ecuación diferencial que precede.

***

Y, sin embargo, no es tan seguro ni tan evidente todo lo que acabamos de indicar.

Ante todo conviene poner en claro, que la variación de

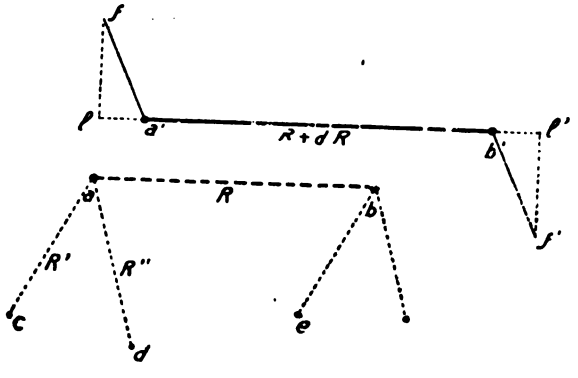


Figura 39.

cada magnitud R produce una variación en la potencial de la forma $A\,dR$ en que A sea una función de las R.

Esto podemos hacerlo comprender aplicando lo que hemos dicho ya varias veces respecto al caso en que las fuerzas no sean centrales; pero suponiendo para ello que las masas m m'..... son complejas.

Es una hipótesis *que tiende á reducir el caso de fuerzas no centrales al de fuerzas centrales, que es el de la Mecánica clásica.*

Supongamos que a, b, c, d ..... (fig. 39) son diferentes pun-

tos del sistema, los cuales determinarán las magnitudes: R, correspondiente al par de puntos $a\,b$; R', correspondiente al par $a\,c$; R'', determinada por $a\,d$, y así de los demás pares.

Admitamos una deformación infinitamente pequeña, producida por la traslación de $a\,b$ á $a'\,b'$. De modo que R se convertirá en $R + d\,R$.

Veamos cuánto varía la potencial, ó si se quiere, la función U, por esta variación $d\,R$.

Exajeremos las dimensiones de las masas m, m' colocadas en a, b, y para ello consideremos la figura 40.

El punto A ha venido á parar á A'; el punto B ha venido

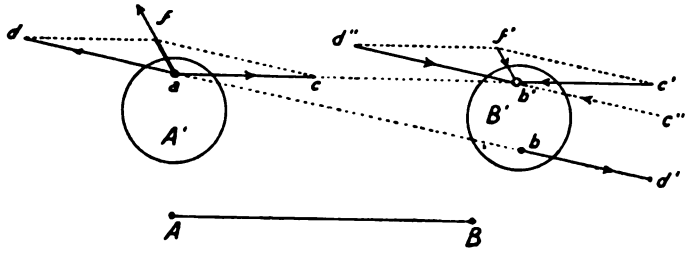


Figura 40.

á B', y esta es la posición en que exajeramos las dimensiones de ambos puntos.

Supongamos que A' contiene un elemento eléctrico a y la masa B' un elemento ponderable b' y otro elemento eléctrico b.

Entre a y b, admitiendo fuerzas centrales por ser homogéneos a, b en su constitución propia, existirá una fuerza repulsiva que se aplicará en a según $a\,d$, y en b según $b\,d'$, siendo la acción igual y contraria á la reacción

$$a\,d = b\,d'.$$

Entre a y b' existirá una atracción, porque entre las masas ponderables y la electricidad la acción es atractiva.

Esta atracción se aplicará en a según $a\,c$, y en b' según $b'\,c'$, y tendremos, como antes:

$$a\,c = b'\,c'.$$

Las dos fuerzas $a\,d$ y $a\,c$ darán una resultante $a\,f$ sobre el elemento A', que será una fuerza no central.

Por otra parte, $b'\,c'$ y $b\,d'$ no están aplicadas á un mismo punto de B'; pero podemos trasladarlas á un punto de este elemento, por ejemplo, al b', y tendremos en b' dos fuerzas, $b'\,c'$ y $b'\,d''$, que darán una resultante, $b'\,f'$, igual, en sentido contrario y paralela á $a\,f$, porque ambos paralelógramos, $a\,c\,d\,f$ y $f'\,c'\,b'\,d''$, son iguales.

Además tendremos un par, $b\,d''$, $b'\,c''$, que resulta de haber trasladado $b\,d'$ al punto b'. Despreciaremos éste en nuestro caso, porque su brazo de palanca es del orden $b\,b'$, es decir, de las dimensiones de la molécula B'.

Hemos llegado, pues, á este resultado: que en el punto a' (figura 39) actúa una fuerza f por la acción del punto b', fuerza no central, y que en el punto b' actúa una fuerza, $b'\,f'$, igual y paralela á $a'\,f$.

Claro es que en la figura 40 y en el punto A' debíamos considerar, además del elemento eléctrico a, otro elemento ponderable; pero combinando éste con los elementos b, b' obtendríamos resultados análogos á los anteriores.

Volvamos ahora á la figura 39.

Al transformarse la recta $a\,b$ en $a'\,b'$, aumentando ó disminuyendo su longitud, las fuerzas f y f', aplicadas á los puntos a', b', desarrollarán un trabajo que será precisamente la variación de la potencial del sistema cuando sólo varía R, y todas las demás distancias permanecen invariables. Precisamente el término $A\,d\,R$ que deseamos calcular.

Supondremos para simplificar, y porque esta simplificación es lícita en todos los problemas de esta clase, exceptuando situaciones especiales de los puntos en cuestión, que $a'\,b'$

es paralela á ab: podrá haber variado su longitud, pero podemos admitir que no ha variado su dirección.

Si representamos por r la longitud ab y representamos asímismo por λ y λ' los caminos que han recorrido los puntos a', b', el trabajo de la fuerza f será

$$f \cos fa'l \,.\, \lambda,$$

y el trabajo de $f' = f$

$$f' \cos f'b'l' \,.\, \lambda'.$$

Y como las f son iguales y paralelas, los ángulos $fa'l$ y $f'b'l$ también lo serán, y el trabajo total podrá representarse por

$$f \cos fa'l\,(\lambda + \lambda').$$

Pero $\lambda + \lambda'$ dándole á cada una de estas letras su signo propio, no es otra cosa que la variación de r, y resulta

$$f \cos fa'l \,.\, dr.$$

De modo que como este trabajo es el incremento que ha sufrido la potencial cuando sólo se considera la variación de la recta ab, tendremos

$$A \,.\, dR = f \cos fa' \times dr.$$

Por otra parte,

$$r = \sqrt{R},$$

y, por lo tanto,

$$dr = \frac{dR}{2\sqrt{R}},$$

luego

$$A \,.\, dR = f \,.\, \cos fa'l \times \frac{dR}{2\sqrt{R}}.$$

Observemos ahora que la fuerza f, actuando sobre a', es próximamente la misma que actuaba en a, por la sola influencia de b. Pero esta fuerza dependerá en general, no siendo las fuerzas centrales, no sólo de R, sino de todas las demás R', R''....., puesto que estas magnitudes ó sus raíces determinan las posiciones de los elementos b, b' de la figura 40, y, por lo tanto, las dimensiones de los paralelógramos cuya resultante han sido las fuerzas f, f'.

De aquí resulta que f será función de las R, ó bien

$$f = f(R, R', R''.....).$$

Más aun; no sólo la magnitud, sino la dirección, dependerá, según las figuras 39 y 40, de dichas magnitudes, es decir, que podremos escribir

$$\cos f a' l = \varphi(R, R', R''.....),$$

y por fin

$$A(R, R', R''.....)\, dR = f(R, R'.....)\, \varphi(R, R'.....) \frac{dR}{2\sqrt{R}},$$

y haciendo

$$A(R, R'.....) = f \frac{(R, R'.....)\, \varphi(R, R'.....)}{2\sqrt{R}}$$

la forma

$$A(R, R'.....)\, dR$$

para el incremento de la potencial por la variación de R queda plenamente justificada, al menos en las hipótesis que hemos establecido, que parecen naturales.

Y es más, tenemos aquí una explicación bastante satisfactoria del caso de las fuerzas no centrales, sin negar los principios de la vieja Mecánica, ni romper con las fuerzas centra-

les para el caso en que los subátomos de un elemento atómico se puedan considerar como homogéneos, ya sean elementos ponderables, ya eléctricos.

***

Esto justifica además, ó por lo menos hace comprender, por qué puede considerarse como nulo el coeficiente diferencial $\frac{dF}{dR}$ cuando $\sqrt{R}$ es superior al radio de actividad molecular, según admite Mr. Poincaré.

En efecto, si convenimos en explicar las fuerzas no centrales por las fuerzas centrales de moléculas complejas, como es una hipótesis natural, comprobada por la experiencia, que cuando la distancia r aumenta la intensidad de la fuerza disminuye, claro es que para distancias AB ó $A'B'$ superiores al radío de actividad molecular, las fuerzas atractivas ó repulsivas entre los elementos a, b, b' serán despreciables, y los lados ac, ad, $b'c'$, $b'd''$ podrá suponerse que son nulos, con lo cual podrá suponerse que son iguales á cero las fuerzas f, f, y por fin los coeficientes A, A' del trabajo elemental que hemos calculado, ó sea de la variación de potencial.

Es decir, que A, que es la derivada con relación á R de la potencial, será cantidad despreciable, según la hipótesis de Mr. Poincaré.

Consideraciones análogas podemos hacer respecto á los demás coeficientes diferenciales; pero no insistiremos por no separarnos demasiado de nuestro objeto principal, que es la exposición del método en sus líneas generales.

***

Resulta de lo dicho, que la variación de la potencial, para variaciones infinitamente pequeñas de R', R''..... puede ponerse bajo esta forma

$$dU = A'(R', R''.....)dR' + A''(R', R''.....)dR'' + ...$$
$$..... + A^{(N_2)}(R'R''.....)dR^{(N_2)}$$

La forma de esta ecuación, es la de una ecuación diferencial entre las N_2 variables R', R''....., es decir, entre todas las distancias de los puntos dos á dos; y podrá decirse que la integral de esta ecuación define la forma de la función F empleada por Mr. Poincaré, toda vez que esta ecuación es única, porque *el valor* de los coeficientes A está perfectamente definido, como antes hemos visto.

Pero esto no es tan evidente como parece, porque *no es evidente* que el segundo miembro sea una diferencial exacta de las R como si todas ellas fueran independientes.

Cierto es, que el segundo miembro expresa el incremento de la potencial, y que además, en este caso, suponemos que puede aplicarse el principio de la conservación de la energía; pero esto, que sería indiscutible, si todas las R fueran independientes, necesita estudiarse con más detenimiento cuando no lo son.

Sin contar con que aun la forma de los coeficientes A puede variar según sean las R que entren en ellos. El valor de cada coeficiente será fijo en cada caso, pero su *forma analítica,* en R, R'..... puede ser múltiple. Y la inteligencia no queda tranquila, ni llega al convencimiento lógico y absoluto, dentro de la lógica matemática, si no se demuestra directamente que la ecuación precedente cumple con las condiciones de integrabiiidad.

***

La ecuación precedente es, como antes decíamos, de las que en cálculo integral se designan con el nombre de ecua-

ciones en diferenciales totales; pero con la circunstancia de que no todas las variables R que ella contiene sean variables independientes.

Para refrescar la memoria de mis alumnos y ya que estas lecciones tienen carácter elemental, presentemos un ejemplo.

Sea la ecuación

$$dU = X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z,)dz$$

ó abreviadamente,

$$dU = Xdx + Ydy + Zdz,$$

en la que x, y, z son variables independientes.

Integrar esta ecuación es buscar una función $U(x, y, z)$ de dichas tres variables, tal que su derivada con relación á x sea X; que su derivada con relación á y sea Y, y que su derivada con relación á z sea Z: es decir, abreviadamente, y sin poner en evidencia las tres variables independientes,

$$\frac{dU}{dx} = X, \quad \frac{dU}{dy} = Y, \quad \frac{dU}{dz} = Z.$$

Pero se sabe que, en general, esto no es posible; que para que lo sea, es forzoso que se cumplan estas condiciones, á saber:

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}.$$

Pero entendiéndose que estas igualdades han de representar *identidades*, lo cual significa que la forma en x, y, z de los primeros miembros ha de ser la misma forma analítica de los segundos; porque de lo contrario tendríamos relaciones entre x, y, z y ya estas variables no serían independientes, como hemos supuesto.

Ahora bien, cuando X, Y, Z cumplen con tales condiciones la ecuación diferencial puede integrarse, y su integral tiene esta forma

$$U = \int_{x_0}^{x} X(x', y, z)\, dx' + \int_{y_0}^{y} Y(x_0, y', z)\, dy' + \\ + \int_{z_0}^{z} (Z\, x_0, y_0, z')\, dz',$$

en que x_0, y_0, z_0 son tres constantes arbitrarias, y en que las variables de la integración se representan por x', y', z'.

La demostración la encontrarán mis alumnos en cualquier tratado de cálculo integral, y nosotros nos limitaremos á una *comprobación* que en rigor equivale à una demostración *à posteriori.*

Es decir, que vamos á diferenciar U con relación á x, y encontraremos X.

Luego diferenciaremos, con relación á y, y encontraremos Y, y por último diferenciaremos, con relación á z, y encontraremos Z.

Diferenciemos por relación á x, y observando que esta variable no entra en los dos últimos términos, tendremos:

$$\frac{dU}{dx} = X(x, y, z).$$

Diferenciando, con relación á y, resulta

$$\frac{dU}{dy} = \int_{x_0}^{x} \frac{dX(x', y, z)}{dy}\, dx' + Y(x_0, y, z);$$

ó bien, puesto que

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx},$$

$$\frac{dU}{dy} = \int_{x_0}^{x} \frac{dY}{dx'}\, dx' + Y(x_0, y, z) = Y(x, y, z) - Y(x_0, y, z) + \\ + Y(x_0, y, z),$$

y por fin

$$\frac{dU}{dy} = Y(x, y, z).$$

Por último, diferenciando por relación á z,

$$\frac{dU}{dz} = \int_{x_0}^{x'} \frac{dX(x',y,z)}{dz} dx' + \int_{y_0}^{y'} \frac{dY(x_0, y', z)}{dz} dy' + Z(x_0, y_0, z);$$

y puesto que

$$\frac{dX(x', y, z)}{dz} = \frac{dZ(x', y, z)}{dx'},$$

y

$$\frac{dY(x_0, y', z)}{dz} = \frac{dZ(x_0, y', z)}{dy'}$$

tendremos

$$\frac{dU}{dz} = \int_{x_0}^{x'} \frac{dZ(x', y, z)}{dx'} dx' + \int_{y_0}^{y'} \frac{dZ(x_0, y', z)}{dy'} dy' + Z(x_0, y_0, z);$$

é integrando

$$\frac{dU}{dz} = Z(x, y, z) - Z(x_0, y, z) + Z(x_0, y, z) - Z(x_0, y_0, z) + Z(x_0, y_0, z),$$

ó bien

$$\frac{dU}{dz} - = Z(x, y, z).$$

Queda, pues, demostrado *à posteriori*, que el valor de U cumple con las tres condiciones á que debe satisfacer la ecuación diferencial, que como ejemplo hemos presentado,

Realmente, á este tipo pertenece la ecuación diferencial á que antes llegamos, á saber:

$$dU = A'(R', R''.....)\,dR' + A''(R', R''.....)\,dR'' + ... + \\ + A^{(N_2)}(R'\,R'.....)\,dR^{(N_2)};$$

pero sería preciso demostrar, para definir sin género de duda la función F, que esta ecuación es integrable, y para ello se-

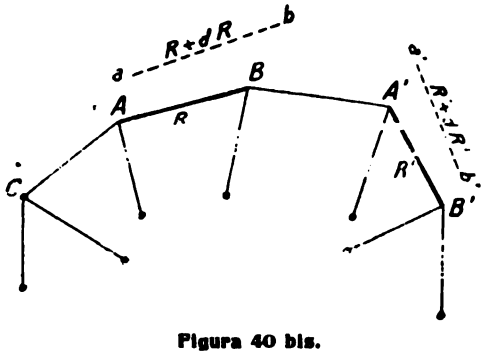


Figura 40 bis.

ría preciso hacer ver que siendo R y R' dos de cualesquiera de las variables, se verifica la relación general

$$\frac{dA}{dR'} = \frac{dA'}{dR}.$$

Que el valor de ambos miembros es el mismo, es evidente aplicando el *principio conservativo*.

En efecto, sea una figura esquemática (fig. 40 bis) AB..... $A'B'$..... compuesta de todas las magnitudes R.

Supongamos que dos solas de estas magnitudes han de variar la R y la R', de suerte que AB ha de transportarse á la posición infinitamente próxima ab y $A'B'$ á la $a'b'$.

El sistema de puntos tendrá dos posiciones que designaremos por (1) y (2).

La (1) será la $CAB\,A'B'D$.

La (2) será asímismo la $CAabB\,A'a'b'B'D$, y de cualquier modo que los puntos pasen de la primera á la segunda posición, el incremento de potencial será el mismo.

Suponemos que todas las magnitudes, menos la R y la R', siguen siendo las mismas en ambos sistemas, y que la variación de potencial sólo procede de que R se convierte en $R + dR$ y R' á su vez en $R' + dR'$.

Vamos á calcular de dos maneras este incremento, y los resultados deberán ser iguales por el principio conservativo.

Por el primer sistema, es decir, haciendo pasar primero AB á ab y luego $A'B'$ á $a'b'$, tendremos, empleando para abreviar la anotación que explicaremos en seguida,

$$\begin{vmatrix} R & R' \\ R + dR & R' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R + dR & R' \\ R + dR & R' + dR' \end{vmatrix}.$$

El primer término significa que la R se convierte en $R + dR$, permaneciendo R' la misma; es decir, que dicho término significa el aumento de potencial al pasar AB á ab.

Análogamente, el segundo término simboliza que *después de aumentar* R hasta $R + dR$, ó sea de pasar AB á ab, R' se ha convertido en $R' + dR'$, pasando $A'B'$ á $a'b$. Dicho segundo término expresa el incremento de la potencial por virtud de este segundo cambio.

Pero también podemos pasar de (1) á (2) empezando por R', y el aumento de la potencial, análogamente á lo que antes explicábamos, será:

$$\begin{vmatrix} R' & R \\ R' + dR' & R \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R' + dR' & R \\ R' + dR' & R + dR \end{vmatrix},$$

é igualando ambas expresiones, tendremos:

$$\begin{vmatrix} R & R' \\ R + dR & R' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R + dR & R' \\ R + dR & R' + dR' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} R' & R \\ R' + dR' & R \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R' + dR' & R \\ R' + dR' & R + dR \end{vmatrix},$$

ó bien

$$\begin{vmatrix} R' + dR' & R \\ R' + dR' & R + dR \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} R & R' \\ R + dR & R' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} R + dR & R' \\ R + dR & R' + dR' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} R' & R \\ R' + dR' & R \end{vmatrix}.$$

El primer miembro expresa el incremento de la potencial por la diferencia de R cuando R' tiene el valor $R' + dR'$, y el segundo término este mismo incremento cuando R' sólo tiene dicho valor R'; más claro: el primer término será:

$$A\,(\ldots\ldots R' + dR' \ldots\ldots)\,dR - A\,(\ldots\ldots R' \ldots\ldots)\,dR =$$

$$= \left[\frac{A\,(\ldots\ldots R' + dR' \ldots\ldots) - A\,(\ldots\ldots R' \ldots\ldots)}{dR'}\right] dR\,dR',$$

ó bien

$$\frac{dA}{dR'}\,dR'\,dR.$$

Del mismo modo, el segundo miembro expresará:

$$\frac{dA'}{dR}\,dR\,dR'.$$

Luego

$$\frac{dA}{dR'} = \frac{dA'}{dR}.$$

Esto es respecto al valor numérico; la forma en R ..... podrá ser distinta.

Sin embargo, si se eliminan las R que no sean variables independientes, las formas de ambos miembros serán iguales, porque entre las variables independientes no puede existir una relación que no sea una identidad, y partiendo

de estas últimas, y mediante las mismas transformaciones, vendremos á parar á identidades entre las R, sea cual fuere el número de éstas.

Mas aquí debemos suspender esta discusión, que nos llevaría muy lejos si el deseo de abreviarla no nos detuviese.

***

Supongamos para en adelante que es conocida la forma de la función F, y sigamos exponiendo el método en cuestión.

El desarrollo general de U ya lo conocemos y lo hemos expresado al principio de esta conferencia.

Llamando U_d al valor de la función U, después de la deformación, hemos obtenido el desarrollo de dicha función U_d en función de los coeficientes diferenciales de F, que suponemos conocidos, y de las cantidades ρ_1 ..... y ρ_2 ....., que se expresan, la primera en función lineal de las u, v, w; la segunda en un polinomio de segundo grado homogéneo respecto á estas cantidades; mejor dicho: la primera, en función lineal de las u, v, w, que corresponden á las dos extremidades de la recta R; la segunda, por medio de un polinomio de segundo grado de estas mismas cantidades.

Y debemos recordar que hemos llegado á esta conclusión: que si se divide el sólido elástico S (fig. 41) en elementos infinitamente pequeños, que representaremos por E, E', E'' .....; infinitamente pequeños, decimos, con relación á las dimensiones del sólido S, pero cuyas dimensiones sean muy grandes con relación al radio de actividad molecular, de modo que en un elemento cualquiera, $A\,B\,C\,D$, la zona $A\,B\,C\,D$, $a\,b\,c\,d$, sea de volumen despreciable en comparación con el volumen $A\,B\,C\,D$, zona que ya hemos definido anteriormente diciendo que su espesor es igual á la mitad del radio molecular; en esta hipótesis, repetimos, *la*

potencial del sólido S *será igual á la suma de las potenciales de cada uno de los elementos* E, E' ....., *como si estos elementos estuvieran aislados.*

De suerte que tendremos:

$$U_d = \text{potencial } S = \text{potencial } E + \text{potencial } E' + \ldots\ldots$$

ó representando dichas potenciales parciales por las mismas letras E:

$$U_d = E + E' + E'' + \ldots\ldots = \Sigma E = \int E,$$

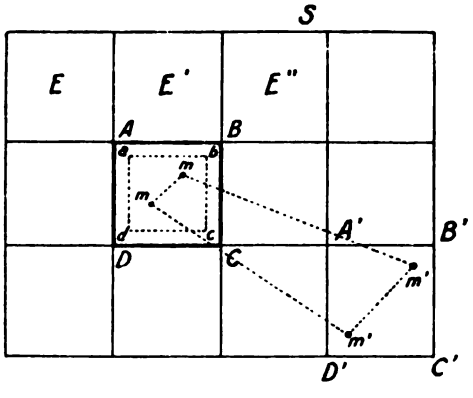


Figura 41.

porque siendo muy pequeño cada elemento, es lícito substituir, aproximadamente, la suma por la integral.

Y esto casi hubiera podido establecerse *à priori*, si se admite como hecho experimental, ó como hipótesis, que las deformaciones de una parte del sólido no influyen en otra parte lejana del mismo sólido, al menos en estos problemas de estática.

De suerte, que si en un elemento $ABCD$ dos masas m, m á las extremidades de R, cambian de posición relativa, la potencial del elemento, y por lo tanto del sólido, sufrirá

una variación, un incremento, por ejemplo, que llamaremos $d_1 U$.

Asímismo, si en otro elemento $A' B' C' D'$ las masas m', m' cambian de posición, la potencial de este elemento, y por lo tanto la del cuerpo, por este hecho aislado, habrá sufrido otra variación que llamaremos $d_2 U$.

Pues bien, si las deformaciones en ambos elementos $ABCD$, $A'B'C'D'$ se verifican á la vez, si varían las distancias mm y $m'm'$, ó sea $\sqrt{R}$ y $\sqrt{R'}$, la potencial experimentará una variación

$$d_1 U + d_2 U,$$

que será la suma ó la superposición de ambas, pero con independencia una de otra, sin que la deformación de un elemento influya en la deformación del otro.

En rigor absoluto no es así, y perdónesenos que insistamos en cosas tan elementales y que repitamos conceptos que hemos explicado hasta la saciedad.

Todo sistema tiene una potencial; si varían sus puntos interiores ó algunos de ellos, sólo por esta deformación, la potencial se altera como un resorte cuando se estira ó se encoje alguna de sus partes. Toda distancia $r = \sqrt{R}$ que aumenta ó disminuye, es como un hilo elástico, aunque de acciones no centrales, cuyas variaciones van acompañadas de variaciones en la potencial.

Si el hilo, digámoslo así, mm cambia de longitud, cambia la potencial del elemento $ABCD$.

Si el hilo $m'm'$, y seguimos con la misma imagen, se estira ó se acorta, cambia la potencial del elemento $A'B'C'D'$.

Pero no es esto solo; al variar los cuatro puntos m, m, m', m', no sólo variarán en general, mm y $m'm'$, sino también los hilos elásticos mm', mm'.

Y bien, este efecto es el que se desprecia, este es el que

se supone nulo; esto es lo que constituye la independencia de las deformaciones de dos elementos lejanos, y por eso, para obtener la variación de la potencial, nos limitamos á hacer la suma de los elementos E, E'.....

Si la potencial de un elemento cualquiera infinitamente pequeño $ABCD$, que será, por lo tanto, una potencial infinitamente pequeña á su vez, la representamos por dP, la potencial total del sólido U será la integral de estos elementos diferenciales, extendida á todo el sólido.

O bien

$$U = \int dP,$$

que podrá expresarse de este modo, poniendo en evidencia el volumen

$$U = \int \frac{dP}{d\tau} d\tau.$$

El coeficiente $\frac{dP}{d\tau}$ será la potencial por unidad de volumen para el punto que se considera, ó de otro modo, para el volumen infinitamente pequeño $ABCD$.

Hemos visto que la potencial, lo mismo para el elemento diferencial de volumen, que para el elemento que estamos considerando, se compone de dos partes:
la primera,

$$\Sigma \frac{dF}{dR} \rho_1;$$

la segunda,

$$\Sigma \frac{dF}{dR} \rho_2 + \frac{1}{2} \Sigma \frac{d'F}{dR^2} \rho_1^2 + \Sigma \frac{d'F}{dR\, dR'} \rho_1 . \rho'_1.$$

La suma de ambas partes para el elemento que consideramos es lo que hemos llamado dP; luego

$$U = \int \frac{\Sigma \frac{dF}{dR} \rho_1 + \Sigma \frac{dF}{dR} \rho_2 + \frac{1}{2} \Sigma \frac{d^2F}{dR^2} \rho_1^2 + \Sigma \frac{d^2F}{dR\,dR'} \rho_1 \rho'_1}{d\tau} d\tau,$$

ó bien

$$U = \int \frac{\Sigma \frac{dF}{dR} \rho_1}{d\tau} d\tau + \int \frac{\Sigma \frac{dF}{dR} \rho_2 + \frac{1}{2} \Sigma \frac{d^2F}{dR^2} \rho_1^2 + \Sigma \frac{d^2F}{dR\,dR'} \rho_1 \rho'_1}{d\tau} d\tau.$$

Si hacemos, para abreviar,

$$\frac{\Sigma \frac{dF}{dR} \rho_1}{d\tau} = W_1, \quad \frac{\Sigma \frac{dF}{dR} \rho_2 + \frac{1}{2} \Sigma \frac{d^2F}{dR^2} \rho_1^2 + \Sigma \frac{d^2F}{dR\,dR'} \rho_1 \rho'_1}{d\tau} = W_2,$$

tendremos

$$U = \int W_1\, d\tau + \int W_2\, d\tau.$$

W_1 será, pues, una parte de la potencial por unidad de volumen para el punto que se considera, algo así como la derivada de la potencial con relación al volumen, y W_2 será otra parte de la potencial también por unidad de volumen.

Estudiemos, como hace Mr. Poincaré, y transformemos estas dos expresiones

$$W_1\, d\tau = \Sigma \frac{Fd}{dR} \rho_1$$

$$W_2\, d\tau = \Sigma \frac{dF}{dR} \rho_2 + \frac{1}{2} \Sigma \frac{d^2F}{dR^2} \rho_1^2 + \Sigma \frac{d^2F}{dR\,dR'} \rho_1 \rho'_1.$$

Las Σ se refieren á pares de puntos colocados dentro del volumen $A\,B\,C\,D$; de modo que se comprende perfecta-

mente lo que significa cada una de las expresiones contenidas en el signo Σ, y una vez definida la función F, la interpretación de los diferentes términos no ofrece dificultad de ningún género.

Lo que no hemos de olvidar es que las R ..... de todos estos términos están todas contenidas en el elemento $d\tau$; son como las m, m de la figura 41.

1.° Empecemos por la transformación de

$$W_1 d\tau = \Sigma \frac{dF}{dR} \rho_1.$$

Hemos obtenido para valor de ρ_1

$$\rho_1 = 2(\Delta x \, \Delta u + \Delta y \, \Delta v + \Delta z \, \Delta w).$$

Pero Δu es el incremento de u cuando se pasa de un punto cuyas coordenadas son x, y, z, á otro punto cuyas coor-

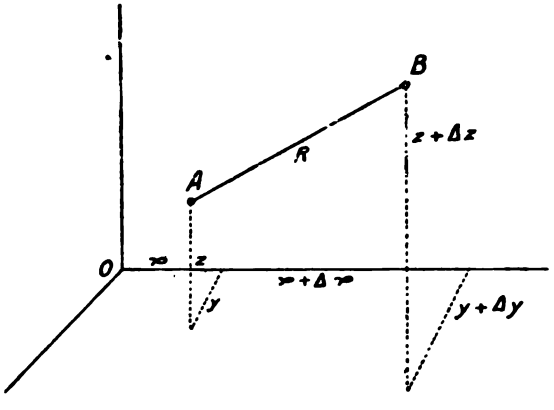


Figura 42.

denadas son $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, por ejemplo, en la recta $A\,B$ (fig. 42), que corresponde á R, cuando se pasa de A á B.

Luego siendo la u, v, w funciones que no conocemos toda-

vía, pero que podemos suponer conocidas para su expresión analítica en función de las variables x, y, z, el incremento Δu tendrá la forma

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y + \frac{du}{dz}\Delta z,$$

$$\Delta v = \frac{dv}{dx}\Delta x + \frac{dv}{dy}\Delta y + \frac{dv}{dz}\Delta z,$$

y análogamente

$$\Delta w = \frac{dw}{dx}\Delta x + \frac{dw}{dy}\Delta y + \frac{dw}{dz}\Delta z;$$

y substituyendo en ρ_1, resultará

$$\rho_1 = 2\left[\frac{du}{dx}\Delta x^2 + \frac{du}{dy}\Delta x\,\Delta y + \frac{du}{dz}\Delta x\,\Delta z\right.$$
$$+ \frac{dv}{dx}\Delta x\,\Delta y + \frac{dv}{dy}\Delta y^2 + \frac{dv}{dz}\Delta y\,\Delta z$$
$$\left.+ \frac{dw}{dx}\Delta x\,\Delta z + \frac{dw}{dy}\Delta y\,\Delta z + \frac{dw}{dz}\Delta z^2\right],$$

y ordenando

$$\rho_1 = 2\left[\frac{du}{dx}\Delta x^2 + \frac{dv}{dy}\Delta y^2 + \frac{dw}{dz}\Delta z^2\right] +$$
$$+ 2\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)\Delta x\,\Delta y + 2\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right)\Delta x\,\Delta z +$$
$$+ 2\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right)\Delta y\,\Delta z.$$

Nos encontramos en esta fórmula seis cantidades que ya habíamos encontrado al estudiar el método de Lamé, como

caracterizando la deformación en cada punto, y estas seis cantidades son precisamente

$$\frac{du}{dx},\ \frac{dv}{dy},\ \frac{dw}{dz},\ \frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy},\ \frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx},\ \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}.$$

Las representamos allí por las letras a y b de este modo

$$\frac{du}{dx}=a_1,\ \frac{dv}{dy}=a_2,\ \frac{dw}{dz}=a_3,$$

$$\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}=b_1,\ \frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}=b_2,\ \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}=b_3.$$

(Curso de 1907 á 1908, pág. 109)

Y recordemos su significación.

a_1 representaba la dilatación paralelamente al eje de las x por unidad de longitud; porque, en efecto, si los puntos extremos de una recta dx varían u y $u+du$, la recta habrá variado du y por unidad de longitud $\frac{du}{dx}$.

Del mismo modo a_2 representa la dilatación paralelamente al eje de las y, y a_3 la dilatación paralelamente al eje de las z. Cuando decimos dilatación hablamos en términos generales: puede ser dilatación ó contracción.

Análogamente explicábamos que b_1, b_2, b_3 expresaban las variaciones angulares de las tres caras de un vértice del paralelepípedo elemental, cuyas aristas fuesen dx, dy, dz.

Estas seis cantidades definen la deformación en cada punto, ó, si se quiere, de todo sólido infinitamente pequeño; expresan, pues, y determinan la deformación de este sólido elemental, pero no tienen en cuenta la rotación del mismo.

Introduciendo, pues, estas notaciones en el valor de ρ_1 tendremos:

$$\rho_1 = 2\,(a_1\Delta x^2 + a_2\Delta y^2 + a_3\Delta z^2 + \\ + b_1\Delta y\Delta z + b_2\Delta x\Delta z + b_3\Delta x\Delta y).$$

Y veamos de paso cómo nos vamos aproximando á los métodos y notaciones de Lamé.

Sustituyendo este valor de ρ_1 en el de $W_1 d\tau$ resultará

$$W_1 d\tau = 2\Sigma \frac{dF}{dR}(a_1 \Delta x^2 + a_2 \Delta y^2 + a_3 \Delta z^2 + \\ + b_1 \Delta y \Delta z + b_2 \Delta x \Delta z + b_3 \Delta x \Delta y)$$

$$= 2\Sigma \frac{dF}{dR} \Delta x^2 . a_1 + 2\Sigma \frac{dF}{dR} \Delta y^2 . a_2 + 2\Sigma \frac{dF}{dR} \Delta z^2 . a_3$$

$$+ 2\Sigma \frac{dF}{dR} \Delta y \Delta z . b_1 + 2\Sigma \frac{dF}{dR_1} \Delta x \Delta z . b_2 + 2\Sigma \frac{dF}{dR} \Delta x \Delta y . b_3.$$

Como el elemento $ABCD$ ó $d\tau$ hemos supuesto desde el principio que es muy pequeño, podemos admitir que en toda su extensión las cantidades a y b son constantes; es decir, que estos elementos de la deformación son los mismos para todos los puntos del sólido $ABCD$; en una palabra, son invariables para todos los elementos de cada Σ; luego podremos sacarlos fuera y tendremos

$$W_1 d\tau = a_1 . 2\Sigma \frac{dF}{dR} \Delta x^2 + a_2 . 2\Sigma \frac{dF}{dR} \Delta y^2 + a_3 . 2\Sigma \frac{dF}{dR} \Delta z^2$$

$$+ b_1 . 2\Sigma \frac{dF}{dR} \Delta y \Delta z + b_2 . 2\Sigma \frac{dF}{dR} \Delta x \Delta z + b_3 . 2\Sigma \frac{dF}{dR} \Delta x \Delta y.$$

Esta expresión es lineal en $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ y los coeficientes son expresiones perfectamente definidas desde el momento en que se conozca la función F, y aun en todos los casos.

No hay, por ejemplo, más que tomar cada R, la derivada de F con relación á R, y multiplicar por los cuadrados de las diferencias de las coordenadas de los extremos ó por los productos; repetir esto para todas las R, y en cada grupo

sumar los resultados dentro siempre del elemento $ABCD$ que se considere.

Claro es, que la forma será distinta, según que en F entren todas las R ó algunas ó sólo las independientes, y según se hayan despreciado términos en que $\sqrt{R}$ sea mayor que el radio de actividad molecular, lo cual sucederá aun dentro del paralelepípedo $ABCD$ que consideramos y al cual se refiere Σ, porque sus dimensiones son muy superiores á dichos radios de actividad.

Nótese ahora que estos coeficientes variarán de un sólido elemental $ABCD$ á otro; luego sea cual fuere su composición, serán funciones de x, y, z; así es, que en rigor, la parte de la potencial que estamos considerando pudiera escribirse de este modo:

$$W_1 d\tau = A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + B_1 b_1 + B_2 b_2 + B_3 b_3, \quad (1)$$

siendo la A y B

$$A = f(x, y, z)$$
$$B = f_1(x, y, z).$$

Claro es, que la forma de dichos coeficientes importa, porque sirve para demostrar ciertos resultados del método de Mr. Poincaré, á los cuales se llega por este medio.

2.° Pasemos á estudiar la segunda parte de la potencial para el elemento $ABCD$, que es la siguiente:

$$\Sigma \frac{dF}{dR} \rho_2 + \frac{1}{2} \Sigma \frac{d'F}{dR'} \rho_1^2 + \Sigma \frac{d'F}{dRdR} \rho_1 \rho_1,$$

debemos para ello transformar ante todo, los dos últimos grupos, que presentan, por decirlo de este modo, el mismo carácter: expresarse en función de a, b.

Empecemos por dichos dos términos,

$$\frac{1}{2} \Sigma \frac{d^2F}{dR^2} \rho_1^2 + \Sigma \frac{d^2F}{dRdR'} \rho_1 \rho'_1.$$

Los valores que hemos obtenido para ρ_1 son los siguientes:

$$\rho_1 = 2(a_1\Delta x^2 + a_2\Delta y^2 + a_3\Delta z^2 + b_1\Delta y\Delta z + b_2\Delta x\Delta z + b_3\Delta x\Delta y),$$

y, por lo tanto, para ρ'_1 que se refiere á R', y en que las diferencias de las coordenadas de las extremidades podemos representarlas por las anteriores acentuando x, y, z,

$$\rho'_1 = 2\,(a_1\Delta x'^2 + a_2\Delta y'^2 + a_3\Delta z'^2 + \\ + b_1\Delta y'\Delta z' + b_2\Delta x'\Delta z' + b_3\Delta x'\Delta y\,).$$

Las a y b son las mismas que en la fórmula anterior, porque los dos pares de punto correspondientes á R y R' están dentro del paralelepípedo infinitamente pequeño $ABCD$, y para todos los puntos de este paralelepípedo hemos dicho que las magnitudes que definen la deformación, á saber $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ pueden considerarse como constantes.

Sustituyendo ρ_1 y ρ'_1 en los dos términos anteriores, tendremos

$$\frac{1}{2}\Sigma\frac{d^2F}{dR^2}4(a_1\Delta x^2 + a_2\Delta y^2 + a_3\Delta z^2 + \\ + b_1\Delta y\Delta z + b_2\Delta x\Delta z + b_3\Delta x\Delta y)^2 \\ + \Sigma\frac{d^2F}{dR\,dR'}4(a_1\Delta x^2 + a_2\Delta y^2 + a_3\Delta z^2 + \\ + b_1\Delta y\Delta z + b_2\Delta x\Delta z + b_3\Delta x\Delta y) \\ (a_1\Delta x'^2 + a_2\Delta y'^2 + a_3\Delta z'^2 + b_1\Delta y'\Delta z' + b_2\Delta x'\Delta z' + b_3\Delta x\Delta z).$$

Sin necesidad de desarrollar los cálculos, se ve desde luego, que efectuando el cuadrado del polinomio lineal en a, b, el producto de los dos polinomios lineales de la última parte, y sacando en cada término que resulte fuera del signo Σ, ya

los cuadrados de las a y b, ya los productos de estas cantidades dos á dos, se llegará á un polinomio en $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ de segundo grado y homogéneo, respecto á dichas cantidades.

Los coeficientes serán Σ de los coeficientes diferenciales

$$\frac{d^2F}{dR^2} \cdots\cdots \frac{d^2F}{dRdR'} \cdots\cdots,$$

y de cuatro factores, tomados entre las cantidades,

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z \Delta x', \Delta y', \Delta z' \cdots\cdots$$

Hay que fijarse en que la Σ primera se refiere á todas las R, según lo explicado, y la segunda á todas las combinaciones dos á dos: pero en todos los términos las a y b tienen el mismo valor, porque, como acabamos de decir, se pueden considerar como constantes en todo el paralelepípedo elemental $ABCD$, que es para el que estamos efectuando estos cálculos de la potencial.

En resumen, los dos términos

$$\frac{1}{2} \Sigma \frac{d^2F}{dR^2} \rho^2_1 + \Sigma \frac{d^2F}{dRdR'} \rho_1 \rho'_1,$$

vienen expresados por un polinomio de segundo grado y homogéneo en $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, y los coeficientes serán cantidades determinadas para cada paralelepípedo; variarán; en general, de un paralelepípedo á otro; y, por lo tanto, serán funciones de las coordenadas que determinan cada uno de estos paralelepípedos. Si representamos por x, y, z las coordenadas del centro de dichos volúmenes infinitamente pequeños, los dos términos que estamos considerando tendrán esta forma:

$$\frac{1}{2}\Sigma\frac{d^2F}{dR^2}\rho_1^2+\Sigma\frac{d^2F}{dRdR'}\rho_1\rho'_1=C_1a_1^2+C_2a_2^2+$$
$$+C_3a_3^2+C_4b_1^2+C_5b_2^2+C_6b_3^2+$$
$$+D_1a_1a_2+D_2a_1a_3+D_3a_1b_1+D_4a_1b_2+D_5a_1b_3+$$
$$+D_6a_2a_3+D_7a_2b_1+D_8a_2b_2+D_9a_2b_3+D_{10}a_3b_1+$$
$$+D_{11}a_3b_2+D_{12}a_3b_3+D_{13}b_1b_2+D_{14}b_1b_3+D_{15}b_2b_3, \quad (2)$$

fórmula en que entran 21 coeficientes.

Transformemos ahora el primer término de los tres que entran en $W_2d\tau$.

Este coeficiente tiene la siguiente forma:

$$\Sigma\frac{dF}{dR}\rho_2,$$

en que la Σ se refiere como siempre al paralelepípedo $ABCD$ y comprende tantos términos como cantidades R ó sea como pares de puntos, salvo los que hayan podido despreciarse por ser las distancias $\sqrt{R}$ superiores al radio de actividad molecular.

Esta observación es general para todos los coeficientes diferenciales de F, que hemos considerado hasta aquí. Pero siempre, perdónesenos la insistencia, dentro del paralelepípedo elemental $ABCD$.

Hemos visto que toda ρ_2 se expresa de este modo:

$$\rho_2=\Delta u^2+\Delta v^2+\Delta w^2$$

y hemos hallado

$$\Delta u=\frac{du}{dx}\Delta x+\frac{du}{dy}\Delta y+\frac{du}{dz}\Delta z$$

$$\Delta v=\frac{dv}{dx}\Delta x+\frac{dv}{dy}\Delta y+\frac{dv}{dz}\Delta z$$

$$\Delta w=\frac{dw}{dx}\Delta x+\frac{dw}{dy}\Delta y+\frac{dw}{dz}\Delta z.$$

Luego no tenemos que hacer otra cosa que sustituír estos valores de $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ en el valor de ρ_2; y este valor de ρ_2 y los análogos ρ'_2, ρ''_2..... en los diferentes términos de la expresión $\Sigma \frac{dF}{dR} \rho_2$.

Haciendo estos cálculos, tendremos pues,

$$\Delta u^2 = \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \Delta y^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2 \Delta z +$$

$$+ 2 \frac{du}{dx} \frac{du}{dy} \Delta x \Delta y + 2 \frac{du}{dx} \frac{du}{dz} \Delta x \Delta z + 2 \frac{du}{dy} \frac{du}{dz} \Delta y \Delta z,$$

$$\Delta v^2 = \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 \Delta y^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 \Delta z^2 +$$

$$+ 2 \frac{dv}{dx} \frac{dv}{dy} \Delta x \Delta y + 2 \frac{dv}{dx} \frac{dv}{dz} \Delta x \Delta z + 2 \frac{dv}{dy} \frac{dv}{dz} \Delta y \Delta z,$$

$$\Delta w^2 = \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{dw}{dy}\right)^2 \Delta y^2 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 \Delta z^2 +$$

$$+ 2 \frac{dw}{dx} \frac{dw}{dy} \Delta x \Delta y + 2 \frac{dw}{dx} \frac{dw}{dz} \Delta x \Delta z + 2 \frac{dw}{dy} \frac{dw}{dz} \Delta y \Delta z.$$

O abreviadamente, y representando por Σ la suma de términos análogos, distintos unos de otros por la sustitución circular de x, y, z como hemos hecho tantas veces,

$$\Delta u^2 = \Sigma \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \Delta x^2 + 2 \Sigma \frac{du}{dx} \frac{du}{dy} \Delta x \Delta y,$$

$$\Delta v^2 = \Sigma \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \Delta x^2 + 2 \Sigma \frac{dv}{dx} \frac{dv}{dy} \Delta x \Delta y,$$

$$\Delta w^2 = \Sigma \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \Delta x^2 + 2 \Sigma \frac{dw}{dx} \frac{dw}{dy} \Delta x \Delta y.$$

Y, por fin, sustituyendo estos valores en el de ρ_2, tendremos:

$$\rho_2 = \Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2 = \left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]\Delta x^2 +$$

$$+\left[\left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dy}\right)^2\right]\Delta y^2 +$$

$$+\left[\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2\right]\Delta z^3,$$

$$+2\left(\frac{du}{dx}\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dx}\frac{dw}{dy}\right)\Delta x\,\Delta y +$$

$$+2\left(\frac{du}{dy}\frac{du}{dz} + \frac{dv}{dy}\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\frac{dw}{dz}\right)\Delta y\,\Delta z +$$

$$+2\left(\frac{du}{dz}\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\frac{dz}{dx} + \frac{dw}{dz}\frac{dw}{dz}\right)\Delta x\,\Delta z.$$

Mr. Poincaré para abreviar la escritura establece esta notación especial: á la suma de los productos de cada dos, derivadas de u, v, w con relación á dos variables s, t cualesquiera la representa por Π_{st}, es decir

$$\Pi_{st} = \frac{du}{ds}\frac{du}{dt} + \frac{dv}{ds}\frac{dv}{dt} + \frac{dw}{ds}\frac{dw}{dt},$$

y haciendo sucesivamente

$$s = x, t = x; \quad s = y, t = y; \quad s = z, t = z;$$
$$s = x, t = y; \quad s = y, t = z; \quad s = x, t = z.$$

el valor de ρ_2 tomará la forma

$$\rho_2 = \Pi_{xx}\,\Delta x^2 + \Pi_{yy}\,\Delta y^2 + \Pi_{zz}\,\Delta z^2 + 2\,\Pi_{xy}\,\Delta x\,\Delta y +$$
$$+ 2\,\Pi_{yz}\,\Delta y\,\Delta z + 2\,\Pi_{zx}\,\Delta x\,\Delta z.$$

Este valor de ρ_2 tenemos que substituirlo en el primer término de $W_2\tau$, que es $\Sigma \frac{dF}{dR} \rho_2$, y resultará:

$$\Sigma \frac{dF}{dR} [\Pi_{xx} \Delta x^2 + \Pi_{yy} \Delta y^2 + \Pi_{zz} \Delta z^2 + 2 \Pi_{xy} \Delta x \Delta y + \\ + 2 \Pi_{yz} \Delta y \Delta z + 2 \Pi_{zx} \Delta x \Delta z],$$

y separando términos y en cada uno sacando fuera del signo Σ la Π, porque esta cantidad no contiene más que las derivadas de u, v, w, y dichas cantidades hemos indicado que se consideran constantemente para cada elemento infinitamente pequeño $ABCD$, elemento al cual se refiere dicho signo Σ, tendremos

$$\Sigma \frac{dF}{dR} \rho_2 = \Pi_{xx} \Sigma \frac{dF}{dR} \Delta x^2 + \Pi_{yy} \Sigma \frac{dF}{dR} \Delta y^2 + \\ + \Pi_{zz} \Sigma \frac{dF}{dR} \Delta z^2 + 2 \Pi_{xy} \Sigma \frac{dF}{dR} \Delta x \Delta y + 2 \Pi_{yz} \Sigma \frac{dF}{dR} \Delta y \Delta z + \\ + 2 \Pi_{zx} \Sigma \frac{dF}{dR} \Delta z \Delta x,$$

será, pues, dicha parte de la potencial un polinomio lineal de las cantidades Π.

Los coeficientes, como hemos explicado antes, variarán de un paralelepípedo elemental $ABCD$ á otro cualquiera; de modo que, prescindiendo de su orden de magnitud, debemos considerarlos como funciones de x, y, z, según hemos hecho hasta aquí, y podremos escribir:

$$\Sigma \frac{dF}{dR} \rho_2 = G_1 \Pi_{xx} + G_2 \Pi_{yy} + G_3 \Pi_{zz} + 2 G_4 \Pi_{xy} + \\ + 2 G_5 \Pi_{yz} + 2 G_6 \Pi_{zx}, \qquad (3)$$

siendo, en general,

$$G = G(x, y, z).$$

***

Hemos expresado, pues, todas las partes de la potencial correspondiente al paralelepípedo infinitamente pequeño $ABCD$ en las fórmulas (1), que es un polinomio lineal en $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, y para abreviar la escritura lo expresaremos de este modo:

$$W_1\, d\tau = P_l(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3); \qquad \text{(I)}$$

(2) que es otro polinomio de segundo grado y homogéneo de las mismas cantidades; lo designaremos por la fórmula

$$\frac{1}{2}\Sigma \frac{d^2F}{dR^2}\rho_1^2 + \Sigma \frac{d^2F}{dR\,dR'}\rho_1\rho'_1 = P_c(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \quad \text{(II)}$$

y (3) que es un polinomio lineal de las II.

Lo representaremos por

$$\Sigma \frac{dF}{dR}\rho_2 = P_e(\text{II}) \qquad \text{(III)}$$

Claro es que en las notaciones anteriores P significa polinomio y los subíndices l y c significan las palabras *lineal* ó *cuadrático.*

Por lo demás, la letra II tiene la significación que antes hemos explicado, es decir, que contiene las nueve cantidades

$$\begin{array}{ccc} \frac{du}{dx}, & \frac{du}{dy}, & \frac{du}{dz}, \\ \frac{dv}{dx}, & \frac{dv}{dy}, & \frac{dv}{dz}, \\ \frac{dw}{dx}, & \frac{dw}{dy}, & \frac{dw}{dz}, \end{array}$$

que determinan la deformación en cada elemento del sólido.

Sumando las tres eypresiones (I) (II) (III) tendremos la potencial del elemento $ABCD$, á saber

$$W_1 d\tau + W_2 \tau = P_l(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) +$$
$$+ P_c(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) + P_l(\Pi_{xx}, \Pi_{yy}, \Pi_{zz}, \Pi_{xy}, \Pi_{yz}, \Pi_{xz})$$

Es que esta cantidad debe ser un infinitamente pequeño de tercer orden, porque expresa la potencial del elemento $ABCD$, cuyo volumen $d\tau$ es de tercer orden también.

Dicha diferencial $d\tau$ podemos suponer que está contenida como factor en todos los coeficientes A, B, C, D, G, siendo todos ellos, por lo demás, funciones de x, y, z.

La potencial del sólido elástico será por fin, sin poner en evidencia la diferencial de la integración

$$U = U_0 + \int [P_l(a, b) + P_c(a, b) + P_l(\Pi)].$$

Queda, pues, resuelta la primera parte del método de Mr. Poincaré, que es la determinación de la potencial de un sólido elástico, puesto que la integral anterior, á todo el sólido se refiere.

Sobre esta última expresión debemos hacer todavía algunas consideraciones en la conferencia próxima.

XLIV.—Método para determinar la dirección de los vientos superiores por las ondulaciones del borde de los astros.

POR VICENTE VENTOSA.

(Continuación.)

A primera vista pudiera tal vez calificarse de algo complicado nuestro procedimiento de cálculo; pero, bien meditado, no es así en realidad. Con el solo conocimiento del tiempo ú hora de la observación, y sin el auxilio de lecturas complementarias en los círculos graduados del instrumento, fácil es deducir, de la ascensión recta del astro observado, el ángulo horario; y de éste, combinado con la declinación, la altura, azimut y ángulo paraláctico del mismo astro: deducciones todas sencillas, que en gran manera se simplifican mediante el uso de tablas ó ábacos, previamente, y de una vez para siempre, preparados al efecto.

Al de cualquier otro instrumento preferimos para esta clase de observaciones el uso de la ecuatorial por los motivos antes apuntados; y, además, porque en la ecuatorial, los ángulos de posición de las ondulaciones aéreas varían con el tiempo mucho más lentamente que en el altazimut; porque, en consecuencia, no hace falta conocer con tanta precisión la *hora* á que las observaciones corresponden, que puede casi siempre ser la señalada por un buen reloj de bolsillo, y, en fin, porque á las observaciones hechas con la ecuatorial es fácil aplicar la corrección por movimiento propio del astro observado, cuando en circunstancias extraordinarias se crea necesario hacerla.

Esta corrección se desprende sencillísimamente de la consideración del triángulo de las velocidades, en la teoría de

los movimientos relativos, que da lugar á las dos siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} v_0^2 &= v^2 + s^2 + 2vs \operatorname{sen} \pi \ldots\ldots \\ \operatorname{sen}(\pi_0 - \pi) &= \frac{s \cos \pi}{v_0} \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \text{(D)}$$

en las cuales representan:

v_0 la velocidad angular absoluta de la ondulación;

v la velocidad relativa, directamente medida ó apreciada;

s la velocidad del astro, debida á la rotación diurna, y dependiente de su declinación;

π_0 el ángulo de posición verdadero ó absoluto de la onda aérea;

y π el ángulo de posición relativo, determinado con el micrómetro.

Como el astro recorre aproximadamente un paralelo celeste, del E. al O., el ángulo de posición de su movimiento será igual á 90°, prescindiendo, como en este caso puede, sin error de cuantía, prescindirse de la variación en declinación, y de la variación, con la de altura del astro sobre el horizonte, de la refracción astronómica.

Para mejor adaptarlas al cálculo numérico, las fórmulas precedentes pueden disponerse de este modo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{v_0}{v} &= \sqrt{1 + \left(\frac{s}{v}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{v}\right) \operatorname{sen} \pi} \ldots\ldots \\ v_0 &= \left(\frac{v_0}{v}\right) v \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pi_0 - \pi &= \left(\frac{s}{v}\right) \frac{\cos \pi}{\operatorname{sen} 1^0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \text{(E')}.$$

Fórmulas que fácilmente pueden y deben tabularse, para abreviar el trabajo diario, con los argumentos π y $\frac{s}{v}$. Este

segundo argumento se hallará sencillamente, si, como parece natural, por $\frac{1}{s}$ se toma el tiempo que tarda el diámetro aparente del Sol en pasar por el meridiano, conforme le dan las efemérides; y por $\frac{1}{v}$, en términos análogos, el que emplearía la ondulación que se estudia en recorrer el mismo diámetro, susceptible de apreciación directa.

Introduciendo, pues, la corrección por movimiento propio del astro, la expresión de γ, (C), si por brevedad se designa la diferencia $\pi_0 - \pi$ por $d\pi$, podrá escribirse como sigue:

$$\gamma = \pi + d\pi - p \ldots\ldots (C').$$

A propósito del valor de β, dado por la primera de las fórmulas (B), excusado parece advertir que no conviene deducirle de observaciones hechas hallándose el astro á que se refieren á menos de 15 á 20 grados de altura sobre el horizonte. En lugares de elevada latitud geográfica, necesario será muchas veces, sobre todo durante el invierno, sustituir la observación de la Luna á la del Sol. Las nuestras, que datan del mes de Agosto de 1889, y que, por causas ajenas á nuestra voluntad, tuvimos que suspender á mediados del año 1900, se refieren, por regla general, al Sol, como antes apuntamos, y sólo excepcionalmente á la Luna, con una diferencia: las primeras se hicieron siempre por proyección de las imágenes telescópicas en una pantalla; y las segundas, de imposible realización por este medio, por aplicación inmediata del órgano visual al ocular del anteojo. Tanto por la variabilidad de sus fases, cuanto por las asperezas de su quebrado limbo, la Luna no se presta con la misma facilidad que el Sol á la observación de las ondas aéreas.

IV

Quisiéramos ahora poner de manífiesto algunas pruebas de la confianza que merecen los valores de las altitudes de las ondas, según se deducen de nuestro método de observación, por ser éste el punto que ha dado origen á mayores controversias.

Uno de los medios más sencillos de comprobación, como ya se dijo, infiérese de la observación simultánea, con el mismo anteojo, de las nubes y de las ondulaciones, buscando luego en los resultados la correspondencia que, en cada caso, entre los movimientos de unas y otras exista. La altitud, que se supone aproximada, de un sistema de ondas, calcúlase partiendo de la fórmula (A); y como en la ecuatorial de Merz del Observatorio de Madrid, la distancia focal es $f = 4^m,87$, el numerador de dicha fórmula será igual á 23.717. Si $\varphi' - f = 2$ milímetros, resultará para la distancia de las ondas $\varphi = 11.858$ metros, y su altitud se obtendría multiplicando esta distancia por el seno de la altura angular del Sol en el instante de la observación, conforme en otro lugar indicamos. Si la extensión focal $\varphi' - f$ fuese igual á 5 milímetros, sería $\varphi = 4.743$ metros, etc. En el primer ejemplo, suponiendo la altura del Sol sobre el horizonte $h = 30°$, la altitud A' del sistema de ondas sería igual á 5.929 metros, y, en el segundo ejemplo, igual á 2.372 metros, supuesto que $A' = \varphi \operatorname{sen} h$.

En rigor, hallar la altitud del objeto observado proyectándole sobre un plano horizontal, equivale á suponer que la Tierra es plana, prescindiendo de la curvatura de su superficie. Lo exacto sería determinar aquella altitud midiéndola en la vertical de dicho objeto, que no suele coincidir ni ser paralela á la vertical del observador. Mas, si se tiene en

cuenta la pequeñez de las distancias que consideramos en nuestro caso, al compararlas con las enormes dimensiones del globo terráqueo, la diferencia entre la altitud del primer modo calculada, y la altitud medida en la vertical del objeto resultaría siempre despreciable, é inferior á los errores de mensuración que forzosamente han de cometerse.

Para evidenciarlo, consideremos el triángulo rectilíneo formado por el centro de la Tierra, supuesta esférica, el lugar del observador y el que ocupa el objeto en el espacio. Designando por R el radio de la Tierra, A la altitud exacta, A' la altitud aproximada, y h la altura angular del objeto sobre el horizonte en el instante de la observación, un cálculo sencillísimo nos dará con la precisión suficiente esta fórmula:

$$A - A' = \frac{\varphi^2 \cos^2 h}{2R} \quad \ldots\ldots \qquad \text{(F)}$$

Si suponemos que la distancía φ es una cantidad de primer orden con relación á R, se ve que el error $A - A'$ es sólo de segundo orden. Así, pues, para $R = 6.370.000$ metros, $\varphi = 11.858^m$ (como antes) y $h = 30°$, se tendría $A - A' = 8{,}3$ metros.

De más importancia para nuestro problema será la altitud del observador sobre el nivel del mar, cuyo valor habrá que agregar íntegramente al de la altitud determinada por la observación telescópica, para hacer comparables los resultados que se obtengan en diversas estaciones meteorológicas, conforme se practica con las lecturas del barómetro y otras, aplicándoles una corrección por tal concepto.

Volviendo ahora al asunto del que nos ha alejado momentáneamente la anterior digresión, hemos formado el cuadro siguiente, en el que se trata de expresar el número de coincidencias, en cada cien casos observados, entre los movimientos de las nubes y los de las ondulaciones, considerando como coincidentes dos direcciones cuando el ángulo entre

ellas comprendido no excede de $^1/_4$ del cuadrante, ó sea 22°. Para llevar con todo rigor el cálculo, deberían clasificarse las nubes según la nomenclatura de Hildebrandsson-Abercromby, con las altitudes respectivas dadas por las mensuraciones hechas en los Observatorios de Upsal, en Suecia, y de Blue Hill, en los Estados Unidos; pero, por lo pronto, tuvimos que contentarnos con distribuir las nubes y las ondulaciones sólo en tres clases, según su altitud aproximada en cada caso. He aquí el cuadro, para cuya buena inteligencia no parece necesario dar más explicaciones:

Coincidencia de las ondulaciones	cuya altitud es			Idem de dirección de la veleta.
	> 8000 m	de 3 á 4000 m	< 1000 m	
con las nubes superiores...	80 %	72 %	23 %	18 %
» » de altitud intermedia...	69	69	46	17
» » inferiores....	43	52	74	33
» la veleta (viento rastrero).....	19	23	38	100

Los números contenidos en este cuadro proceden de 584 días de observación, pertenecientes á los años 1890, 91, 92 y 93. Aunque los resultados anteriores se hayan deducido de número poco considerable de observaciones, son harto elocuentes por sí mismos para dejar subsistir la menor duda, á juicio nuestro, acerca de la altitud relativa de las corrientes aéreas que producen las diversas especies de ondulaciones, y sobre la eficacia del método propuesto para el estudio de la circulación atmosférica.

Importa asimismo notar en dicho cuadro, cuán poco concuerdan las indicaciones de la veleta sobre las corrientes rastreras ó próximas al suelo, con las direcciones de las nubes y de las ondulaciones. Precisamente á una observación de este género, hecha por casualidad, debióse la primera idea de este método. El viento inferior, que actúa sobre la veleta, casi nunca es perceptible en el anteojo, porque, por su proxi-

midad á éste, la ondulación que debe producir resulta fuera de foco; pero enfocando el ocular para objetos muy cercanos, especialmente en el *buscador*, se consigue en ciertas ocasiones ponerla de manifiesto, perdiendo entonces de vista las demás ondulaciones, procedentes de las capas atmosféricas situadas á mayor altura.

Otra comprobación de nuestro método puede hallarse determinando la dirección media del viento á diferentes altitudes. Sábese, por observaciones de los *cirri* ó nubes superiores, hechas en diversos puntos del globo, que — de acuerdo con las deducciones de la teoría — en las altas regiones de la atmósfera prevalece una corriente aérea que se dirige, en general, del O. al E., mientras que, debajo de ella, en la región inmediata inferior, ocurren diferencias de presión, ya permanentes, ya transitorias, que producen desviaciones de la circulación normal atmosférica, dando origen á la circulación local característica observada en las borrascas.

La altitud en que se verifica esta modificación ó alteración en el régimen de los vientos es de unos 3.000 metros, según los resultados obtenidos en el Observatorio de Blue Hill, y hasta Mr. Laurence Rotch afirma que, tanto en los ciclones como en los anticiclones, á la altitud aproximada de una milla (1.600 metros), ó encima del nivel de los *cumuli*, la convergencia de los vientos en un ciclón y su divergencia en un anticiclón desaparecen, predominando más arriba la dirección general del Oeste (*).

(*) Según una nota presentada á la Academia de Ciencias de París el 8 de Julio de 1907, en la que su autor, M. Teisserenc de Bort, consigna los resultados de varias interesantes observaciones hechas con globos-sondas en el Observatorio de Trappes (Francia), y comparadas con otras del mismo modo realizadas simultáneamente en Rusia hace poco tiempo, se inferiría que los torbellinos ciclónicos, y lo mismo los anticiclónicos, que van siempre acompañados de movimientos verticales, pueden á veces elevarse hasta los 8.000 á 12.000 metros, pero no pasar de esta altitud.

Ofrecía, por lo tanto, mucho interés hacer un ensayo con los datos obtenidos en el estudio de las ondulaciones, buscando el valor medio y la dirección media de la resultante de los vientos generales á diferentes altitudes.

Para efectuar esta investigación eligiéronse 154 días de observación, pertenecientes á los años 1890, 91, 92 y 93, en los cuales se comprobó, con seguridad, la presencia simultánea de dos corrientes sobrepuestas sin indicio alguno de movimiento giratorio. Con auxilio de la conocida fórmula de Lambert dedujéronse las direcciones medias, *Q*, contadas desde el Norte hacia el Este, y los valores, en cien casos observados, de las resultantes *R*, que expresan la frecuencia relativa de los vientos respectivos, y representarían su velocidad ó su fuerza, si fuera lícito suponer que en cada capa de aire esta fuerza es constante, cualquiera que sea su dirección, lo cual está lejos de suceder.

He aquí los resultados del cálculo:

Altitud de las ondulaciones.	*Q*	*R*
De 500 á 1.000 metros.....	110° = S. 70° E.	38 °/₀
» 1.000 á 2.000 »	144 = S. 36 E.	15
» 2.000 á 3.000 »	251 = S. 71 O.	32
» 3.000 á 4.000 »	246 = S. 66 O.	57
» 4.000 á 5.000 »	269 = S. 89 O.	68
» 5.000 á 8.000 »	287 = N. 77 O.	60
» 8 000 en adelante.....	274 = N. 86 O.	66

Este cuadro pone de manifiesto algunos hechos significativos:

1.° La dirección del viento, no muy desviada del E. en las capas inferiores, tiende á girar hacia el S., conforme se asciende en la atmósfera, disminuyendo al par el valor de la resultante, como si este hecho indicase el conflicto que allí debe de originar la concurrencia de vientos procedentes de distintos rumbos.

2.° A partir de 2.000^{m} de altitud, la dirección del viento

salta de improviso al OSO. donde permanece aumentando de intensidad, pero con cierta tendencia á fijarse en el O.

3.° Pasados los 5.000 metros, el viento se inclina un poco al O., conforme establecía Ferrel, é indican las observaciones de los *cirri* hechas en Blue Hill.

Los valores de la resultante *R*, que desde los 3.000 metros apenas varían, no expresan evidentemente la velocidad relativa del viento en cada caso, pues ésta, en la región de los *cirri*, es cinco ó seis veces mayor que cerca del suelo.

En general, según se ve, los resultados del método de las ondulaciones están perfectamente de acuerdo con los proporcionados por el estudio de la dirección de las nubes.

Con el fin de no prolongar demasiado esta Memoria, nos limitaremos ahora á presentar algunos ejemplos de observaciones cotidianas que ofrecen algún resultado interesante:

1) Ejemplos de corrientes constantes en toda la altura de la atmósfera.

1892, 23 de Agosto.		1892, 10 de Septiembre		1893, 28 de Febrero.	
Altitudes.	Direcciones.	Altitudes.	Direcciones.	Altitudes.	Direcciones.
∞ (*)..	232° (**)	∞	22°	∞	311°
10300m ..	233	9600m ...	24	7800m ..	307
4100....	239	3900.....	29	3100.....	309
2600....	231	2400.....	29	2000.....	307
1700....	233	1600	24	1300.....	308
1300....	235	1200.....	25	1000.....	308
900....	239	900....	28	700.....	309
		650.....	24	500.....	305
Cirri.....	236			Alto-cumuli..	304
Veleta.....	Viento OSO.	.....	Viento ENE.	... ..	Viento O. á OSO.

(*) Teóricamente tal es la distancia á que apuntaba ó estaba enfocado el anteojo.

(**) Recuérdese que, según nuestro modo de contar, á la dirección Norte corresponden *cero* grados, al Este 90°, etc.

2) Ejemplos de una desviación progresiva directa (de izquierda á derecha) con la altitud.

1892, 22 de Febrero.		1892, 9 de Noviembre.		1892, 11 de Noviembre.	
Altitudes.	Direcciones.	Altitudes.	Direcciones.	Altitudes.	Direcciones.
∞	265°	∞	88°	∞	205°
6600m ...	256	6300m . .	86	5500m ...	198
2700... .	238	2500.....	79	2200.....	187
1700.....	225	1600... .	74	1400.. ..	178
1100.....	215	1000. ...	65	900.....	149
800.....	204	800... .	55	700.....	108
600.....	207	600.. ..	44	500.....	89
440... .	190	430.....	37	360.....	85
				.. Strato-cumuli.	102
Veleta.....	Viento S.	.....	Viento ENE.	.....	Viento débil SSE.

3) Ejemplos de una desviación progresiva inversa (de derecha á izquierda) con la altitud.

1892, 23 de Abril.		1892, 17 de Agosto.		1893, 1.° de Septiembre	
Altitudes.	Direcciones.	Altitudes.	Direcciones.	Altitudes.	Direcciones.
∞	86°	∞.....	71°	∞.....	303°
10400m . .	86	9700m ...	87	6500m ...	307
4200....	90	3900.....	101	2600.....	317
2600....	94	2400.....	112	1600.. ..	342
1800 ...	98	1600.. ..	124	1100. ...	359
1300. ..	103	1200.....	133	800.....	9
950....	111	900... .	139	600.....	31
700....	120	650.....	154		
Alto-cumuli . .	97			Cirri.... ..	301
Veleta..	Viento débil SSE.	.....	Viento SSE.	.....	Viento débil NE

De algunos estudios que hemos realizado, examinando situaciones análogas á las presentadas en los anteriores ejemplos, parece deducirse que las desviaciones llamadas *directas* son, en general, más frecuentes y de mayor ampli-

tud que las desviaciones *inversas;* y, además, que las primeras obsérvanse con preferencia cuando el viento superior procede de la región occidental, mientras que las segundas ocurren indiferentemente cualquiera que sea la dirección del citado viento.

Si se examina la rapidez del giro con relación á la altitud de la capa de aire donde se verifica, adviértese que en las altas regiones atmosféricas el movimiento giratorio suele ser casi nulo, y, por el contrario, alcanza su máximo valor en las regiones intermedias, mientras que en la inferior, ó cerca del suelo, disminuye de intensidad, ó adquiere cierto carácter variable é irregular, y á veces, hasta cambia de sentido, sin duda por la influencia de las causas perturbadoras locales.

Aunque todas estas conclusiones hay que exponerlas todavía con mucha reserva, añadiremos que quizás fuera posible representar gráficamente el citado movimiento giratorio mediante un sistema de coordenadas cartesianas, tomando como abscisas, por ejemplo, las altitudes de las diversas capas atmosféricas, y como ordenadas los metros correspondientes, en cada caso, á un grado de desviación en la dirección del viento. Según un ensayo empírico que hemos hecho, prescindiendo de toda idea teórica, se obtiene así, como expresión del fenómeno que analizamos, una línea sensiblemente recta, ó, acaso, con más propiedad, un arco de forma parabólica, tanto en los giros directos como en los inversos, con caracteres casi iguales, en unos y otros, de curvatura y paralelísmo.

4) Ejemplos de un cambio de régimen ó del estado de la atmósfera.

a) *Substitución progresiva de una corriente baja por otra procedente de la región superior.*

ALTITUDES	DIRECCIONES			
1892, Agosto.	10	11	12	13
∞	329°	290°	284°	261°
9700m	328	286	284	256
3900	326	287	276	255
2400	307	293	218	246
1600	23	»	201	235
1200	23	51	174	230
900	15	51	130	247
650	24	74	107	254
Veleta	NE.	ENE.	SE.	SSE.

Situación general.—Según los datos proporcionados por las cartas meteorológicas, había:

Agosto 10.—Altas presiones en la Península Ibérica y un pequeño centro de depresión en el mar Báltico.

— 11.—Aparece una depresión al norte de Escocia y tiende á unirse con la precedente; otra se forma en el Adriático. Persisten las altas presiones en la Península.

— 12.—La baja barométrica se propaga en gran parte de Europa. Persisten las altas presiones en la Península, Francia y Alemania.

— 13.—Las bajas presiones llegan á la Península, mientras la zona de las presiones altas va disminuyendo de extensión y está á punto de desaparecer.

b) *Substitución progresiva de una corriente general por otra procedente de las altas regiones:*

ALTITUDES	DIRECCIONES				
1892, Septiembre.	9	10	11	12	13
∞	22°	22°	301°	301°	250°
9400m	19	24	306	301	255
3800	19	29	308	301	253
2300	21	29	82	128	255
1600	19	24	72	129	248
1200	16	25	70	126	255
860	19	28	67	127	241
630	22	24	73	127	237
Veleta	NE.	ENE.	E.	E.	SSE.-SSO.

Situación general.—Consultando las cartas meteorológicas se halla lo siguiente:

Septiembre 9.—Existe en el Atlántico una zona de altas presiones, y otra de presiones relativamente débiles se extiende del NO. al SE. de Europa. Entre ambas zonas está hoy situada la Península.

— 10.—En el NO. y SE. del continente continúan siendo débiles las presiones. La zona de las altas presiones ocupa ahora el Norte de España y Golfo de Vizcaya.

— 11.—Continúa siendo baja la presión en el NO. de Europa. La otra depresión retrocede hacia el E. La zona de las altas presiones extiéndese hoy por la Península, Francia y Alemania.

— 12.—Las depresiones oceánicas que se extendían por la parte septentrional de Europa propáganse por el Sur y aproxímanse al

Oeste del continente. El área anticiclónica persiste en Francia y Alemania.

Septiembre 13.—Continúa bajando el barómetro en el O. de Europa. El área de fuertes presiones persiste: ocupa ahora el centro y el S. del continente, pero se retira hacia el E.

Aparece en estos dos últimos ejemplos palpable la correlación entre los movimientos de la atmósfera observados por el método de las ondulaciones y los de propagación de las depresiones barométricas. Conviene también notar en dichos ejemplos una circunstancia interesante: que tan pronto como aparece la corriente superior, la corriente inferior comienza á girar para ponerse en paralelismo con la primera; la cual, á su vez, gira con sentido contrario, pero más lentamente, hasta que ambas se combinan para formar una sola.

(Continuará.)

XLV.—Experimentos para el estudio del rozamiento interior de los líquidos.

POR JUAN FLÓREZ POSADA.

Sabido es que cuando un líquido se mueve, el rozamiento de los filetes entre sí, y el de éstos con la superficie interior del conductor, crece con la velocidad de circulación del líquido, y siendo esta velocidad una función de la altura de carga, cuanto mayor sea ésta, mayor será el rozamiento.

Una experiencia sumamente sencilla, demuestra la certeza de lo dicho y la influencia que el rozamiento tiene en el aprovechamiento de la energía hidráulica.

Supongamos (fig. 1) un tubo cilíndrico de eje horizontal,

sometido á un movimiento de rotación alrededor de un eje vertical, y que por el interior del tubo circule agua. Si no existiera rozamiento, la trayectoria que describiría una molé-

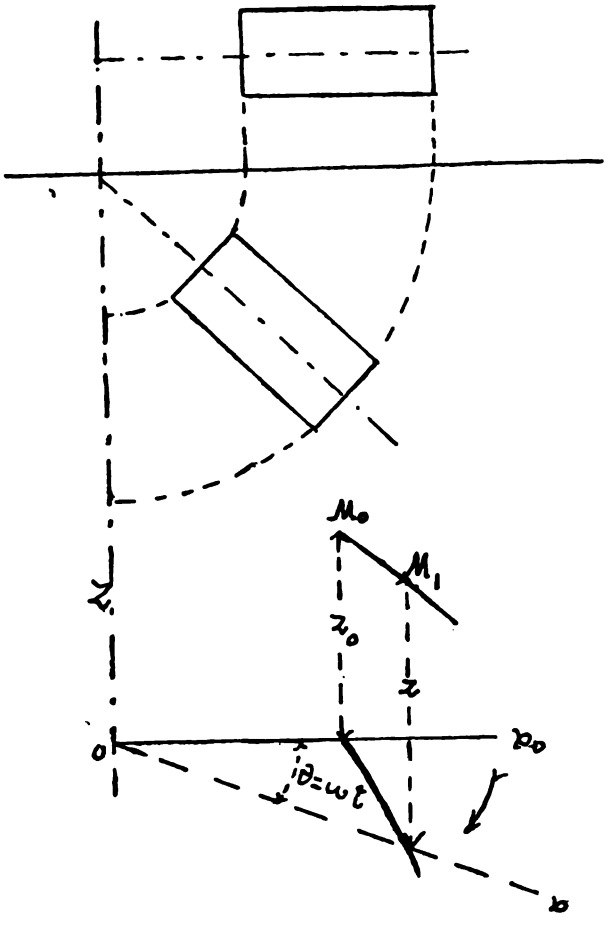


Figura 1.ª

cula líquida desde que entra en el tubo por su base interior, hasta que sale por la opuesta, se determinaría del siguiente modo.

Sean (fig. 2) oz y ox dos ejes coordenados, y suponga-

mos que coincide el primero con el de rotación y el segundo con el de simetría del tubo. Las proyecciones sobre ox y oz de las fuerzas que obran sobre un elemento líquido de masa m serán

$$X = m\,w^2\,x \quad \text{y} \quad Z = mg$$

siendo w la velocidad angular del giro.

Teniendo en cuenta que estas fuerzas son perpendicula-

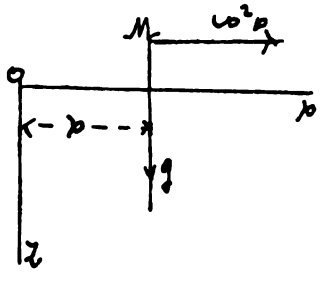


Figura 2.ª

res entre sí, las ecuaciones diferenciales del movimiento relativo del elemento considerado, en el plano xoz serán:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{X}{m} = w^2\,x \quad \text{y} \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Z}{m} = g$$

ó bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} - w^2\,x = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2z}{dt^2} = g,$$

La integración de la primera por el método de Euler, dará

$$x = C_1\,e^{wt} - C_2\,e^{-wt}$$

y de aquí

$$\frac{dx}{dt} = v = C_1\,w\,e^{wt} - C_2\,w\,e^{-wt}$$

haciendo $t = o$ tendremos $x = r$, y como $v = \sqrt{2gh}$, siendo h la altura de carga, resultará

$$C_1 + C_2 = r$$

$$C_1 - C_2 = \frac{\sqrt{2gh}}{w}$$

de cuyo sistema deducimos

$$C_1 = \frac{rw + \sqrt{2gh}}{2w} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{rw - \sqrt{2gh}}{2w}$$

cuyos valores, sustituídos en la integral, dan:

$$x = \frac{rw + \sqrt{2gh}}{2w} \times e^{wt} + \frac{rw - \sqrt{2gh}}{2w} e^{-wt} \ldots\ldots \quad (1$$

En cuanto á la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g$$

su integración da

$$Z = \frac{gt^2}{2} + C \ldots\ldots \quad (2)$$

Esta constante C se determinará para cada elemento líquido por su coordenada z al comenzar el movimiento que corresponde al tiempo $t = o$ y á la distancia $x = r$ de eje oz de giro.

Como tratamos de buscar la trayectoria de una molécula en el interior del tubo, conviene obtener de la ecuación (1) T en función de x para poder dar valores á x comprendidos en la longitud del tubo; y una vez deducidos en esta forma los valores de t, les sustituiremos en la ecuación (2) para

hallar los correspondientes de z. En la figura 1 se indica el modo de trazado de la trayectoria.

Haciendo en (1) $e^{wt} = \alpha$ tendremos una ecuación de segundo grado en α, cuyas raíces serán

$$\alpha = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - \frac{r^2 w^2 - 2gh}{w^2}}}{\frac{rw + \sqrt{2gh}}{w}},$$

y como para $t = o$ se verifica $x = r$ y $\alpha = 1$, deberá verificarse que,

$$\alpha = \frac{x + \sqrt{x^2 - \frac{r^2 w^2 - 2gh}{w^2}}}{\frac{rw + \sqrt{2gh}}{w}}, \qquad (3)$$

en la cual, haciendo $x = r$, resulta

$$\alpha = \frac{wr + \sqrt{2gh}}{wr + \sqrt{2gh}} = 1,$$

como debía de suceder.

Por lo tanto, para determinar puntos de la trayectoria, tenemos, en primer lugar, el ángulo wt que en cada instante t, forma el plano móvil zox con su posición inicial zox_0; y, además, tenemos las dos ecuaciones (2) y (3).

En la experiencia por nosotros realizada, los valores eran

$$w = \frac{2\pi n}{60} = 12{,}56 \ldots\ldots r = 0{,}^{m}73, \quad h = 1 \text{ metro} =$$

$$= \sqrt{2gh} = 4{,}^{m}43,$$

$$\alpha \text{ (diámetro del tubo)} = 0{,}^{m}115.$$

Con estos datos, resulta:

$$\frac{rw + \sqrt{2gh}}{w} = 1{,}082,$$

$$\frac{r^2 w^2 - 2gh}{w} = 0{,}4064,$$

y, por lo tanto:

$$a = e^{12{,}56 \times t} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 0{,}4064}}{1{,}082},$$

$$z = 4{,}905 \times t + C.$$

C corresponderá en cada caso al valor de z cuando la molécula entra en el tubo, y que, por ejemplo, para el punto M será:

$$C = -z_0 = -\frac{d}{2} = -0{,}0573.$$

Siguiendo este sistema está calculado el siguiente cuadro que nos da cinco puntos de la trayectoria *ideal* de un elemento líquido, y la cual está en la figura 3, indicada en sus proyecciones, con trazos contínuo grueso.

x	e^{wt}	t	z	wt	$\theta = 360wt$
$0^m,73$	1,000	0,000	— 0,0573	0,000	0°
$0^m,80$	1,185	0,135	— 0,0564	0,1695	61°
$0^m,85$	1,401	0,027	— 0,0538	0,3391	122°
$0^m,90$	1,481	0,0312	— 0,0525	0,3919	142°
$0^m,95$	1,560	0,0354	— 0,0512	0,445	160°

Pero no ocurre en la práctica lo que esta teoría nos dice. Si en la masa líquida sumergimos una esferilla, de celuloi-

de, por ejemplo, llena de agua, para conseguir aproximadamente su equilibrio indiferente, y coloreamos exteriormente esa esferilla, para que el hecho sea más visible, observaremos que el tiempo que transcurre desde que penetra en e tubo, hasta que sale de él, es bastante superior al que nos dicen los cálculos anteriores, y ese retardo aumenta á medi-

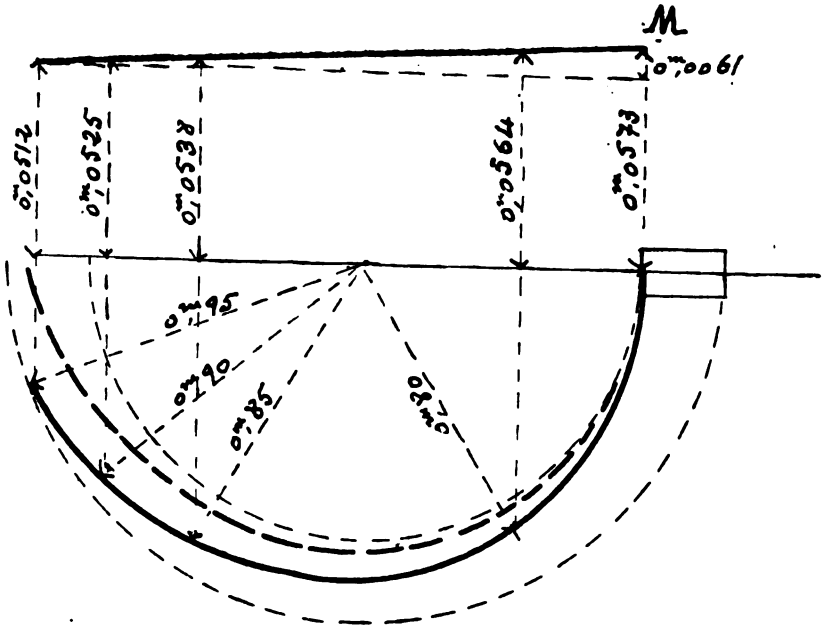


Figura 3.ª

da que aumentan la altura *h* y el diámetro *d*, para valores constantes de *r* y de *W*.

En la misma figura 3, con trazos gruesos, está indicada en proyección horizontal, la trayectoria *real* de un elemento líquido en las condiciones del problema anterior, pero siendo $h = 0^m,25$ en lugar de 1 metro. Para que las trayectorias que hemos llamado *ideal* y *real* coincidan, ó por lo menos se aproximen mucho, es necesario que tanto la velocidad

$\sqrt{2gh}$ como el diámetro d del tubo, sean muy pequeños. Así, por ejemplo, se verifica esto, cuando

para la velocidad de $v = \sqrt{gh} = 2,^{m}16$ se coloca un tubo de $d = 0,^{m}0026$
» » » » $v =$ » $= 0,^{m}216$ » » » » $d = 0,^{m}26$
» » » » $v =$ » $= 0,^{m}02$ » » » » $d = 0,^{m}26$

En el caso de nuestra experiencia, para conseguir con el tubo de $0^{m},115$ de diámetro la concordancia siquiera muy aproximada de las dos trayectorias, es necesario que la altura h de carga no exceda de $0^{m},000013$, valor inaplicable en la práctica común de aprovechamiento de energía hidráulica.

XLVI.— Pequeñas oscilaciones de sistemas no holónomos.

POR JOSÉ MARÍA PLANS.

I

Como introducción, nos vamos á permitir recordar la proposición fundamental del estudio de los pequeños movimientos de un sistema no-holónomo.

Sea un sistema no-holónomo cuya posición dependa de K parámetros, de manera que las coordenadas cartesianas de sus puntos vengan dadas por relaciones tales como

$$x = f(q_1, q_2, \ldots\ldots q_k); \quad y = \varphi(q_1, q_2, \ldots\ldots q_k);$$
$$z = \psi(q_1, q_2, \ldots\ldots q_k).$$

Siendo el sistema no-holónomo, existirán además ligaduras expresadas por p ecuaciones diferenciales no integrables entre los parámetros q_1, q_2..... q_k, que supondremos de la forma

$$\left.\begin{array}{l} A_1 dq_1 + A_2 dq_2 + \ldots\ldots + A_k dq_k = 0 \\ B_1 dq_1 + B_2 dq_2 + \ldots\ldots + B_k dq_k = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_1 dq_1 + L_2 dq_2 + \ldots\ldots + L_k dq_k = 0 \end{array}\right\} \quad [1]$$

Combinando el método que se emplea en la obtención de las ecuaciones de Lagrange con el de los multiplicadores, resultan K ecuaciones como la siguiente (Appell., t. II, párrafo 463):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} +$$
$$+ \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \ldots\ldots + \lambda_p L_\alpha \, (\alpha = 1, 2 \ldots\ldots K).$$

Ahora bien; tratándose de pequeños movimientos alrededor de una posición de equilibrio, T y U podrán ser consideradas como funciones homogéneas de segundo grado de las q' y las q respectivamente de coeficientes constantes (*); en cuyo caso $\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = 0$, y la igualdad anterior se convierte en esta:

$$[2] \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) = \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} +$$
$$+ \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \ldots\ldots + \lambda_p L_\alpha \, (\alpha = 1, 2 \ldots\ldots K).$$

De lo dicho se desprende que $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)$ es una función homogénea de primer grado de las q'' y $\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$ también homo-

(*) Se supone que $U = 0$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$..... $q_k = 0$, en la posición de equilibrio, lo cual es siempre posible lograr que se verifique.

génea y de primer grado de las q; por tanto, todos sus términos son cantidades pequeñas, y, por consiguiente, los multiplicadores λ habrán de ser también cantidades pequeñas del orden de las q. En vista de esto, considerando los coeficientes A..... L, funciones de las q, desarrollados según la fórmula de Mac-Laurín, podremos reducir los desarrollos á sus primeros términos, ó sea á los términos independientes de las q, toda vez que los productos de los restantes términos (que ya tendrán una q como factor) por las λ serán de grado superior al primero con relación á las q y, por lo tanto, despreciables.

Resulta, pues, que tratándose de pequeños movimientos alrededor de una posición de equilibrio, se pueden considerar los coeficientes A..... L como constantes; luego las ecuaciones [1] en este caso podrán ser integradas inmediatamente, dando lugar á las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 q_1 + A_2 q_2 + \ldots\ldots + A_k q_k = \text{Constante} = 0 \\ B_1 q_1 + B_2 q_2 + \ldots\ldots + B_k q_k = \text{Constante} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_1 q_1 + L_2 q_2 + \ldots\ldots + L_k q_k = \text{Constante} = 0 \end{array}\right\} [3].$$

(Correspondiendo la posición de equilibrio á los valores $q_1 = 0$, $q_2 = 0$..... $q_k = 0$, las constantes de los segundos miembros deben ser iguales á cero para que estas ecuaciones sean satisfechas para este sistema de valores.) Estas ecuaciones [3] permitirán determinar p parámetros q, verbi gracia, q_{k-p+1}, q_{k-p+2}..... q_k en función de los $K-p$ restantes q_1, q_2..... q_{k-p} resultando expresiones lineales y homogéneas de éstos; derivando, tendremos las q'_{k-p+1}, q'_{k-+2}..... q'_k en funciones lineales y homogéneas de las q'_1, p'_2..... q'_{k-p}; estas expresiones podrán ser substituídas en T y en U, que resultarán ser funciones homogéneas de

segundo grado de coeficientes constantes, la T de las $q'_1 \ldots\ldots q'_{k-p}$ y la U de las $q_1, \ldots\ldots q_{k-p}$.

Todo lo expuesto nos permite enunciar la siguiente proposición fundamental:

«Tratándose del estudio de los pequeños movimientos alrededor de una posición de equilibrio, un sistema no-holónomo puede considerarse como si fuera holónomo, con un número de coordenadas igual al de sus grados de libertad.»

Una vez sentada esta proposición, se puede aplicar á los sistemas no-holónomos todo cuanto se explica en la teoría de los pequeños movimientos de un sistema holónomo y que consideramos ocioso resumir aquí para no dar demasiada extensión á este modesto trabajo. (p. e. Appell. *Traité de Mécanique Rationnelle,* t. II, párr. 450.)

II

Propongámonos estudiar como ejemplo muy sencillo el problema siguiente:

«Dos círculos iguales, invariablemente unidos, con un

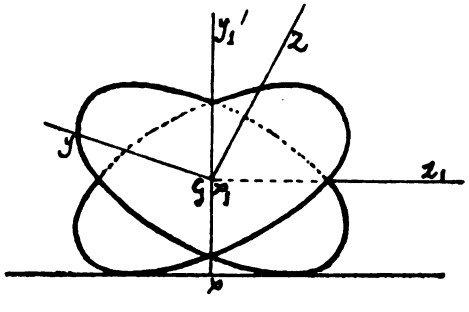


Figura 1.ª

(Proyección sobre el plano vertical $y_1 O z_1$)

diámetro común, formando sus planos un ángulo 2θ, se apoyan sobre un plano horizontal perfectamente rugoso (es decir, sobre el cual no pueden resbalar); evidentemente

están en equilibrio cuando el diámetro común es horizontal (porque entonces la vertical del centro de gravedad del sistema corta al eje de sustentación, que es el que une los puntos de contacto de los dos círculos); se trata de estudiar los pequeños movimientos alrededor de esta posición.

El plano trazado por el centro perpendicularmente al diámetro común es evidentemente plano de simetría de la figura; este plano, en la posición de equilibrio, es vertical y contiene los puntos de contacto (la figura 2.ª indica la sección producida por este plano en la posición de equilibrio); tomemos como origen de los ejes fijos el punto medio de la recta que une los puntos de contacto en esta posición; como eje fijo $O\zeta$, esta recta, tomada en uno de los dos sentidos á partir de O; como eje $O\xi$, la perpendicular á dicha recta, situada en el plano horizontal, y como eje $O\eta$, la vertical. Consideremos los tres ejes móviles Gx_1, Gy_1, Gz_1, que pasan por el centro de gravedad de direcciones fijas paralelas á las anteriores, y, finalmente, como ejes móviles invariablemente unidos al sistema, tomemos: la normal trazada por G á uno de los dos círculos como eje Gz; como eje Gx, el diámetro común, y como eje Gy, la perpendicular á este diámetro en el plano de dicho círculo.

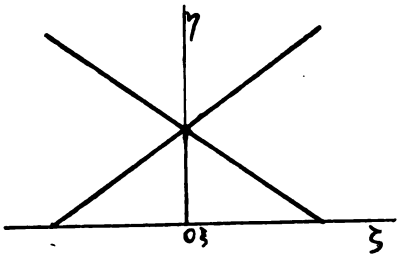


Figura 2.ª

Imaginando el plano vertical $\xi o \eta$ que contiene el diámetro común en la posición de equilibrio, se comprende que dicho diámetro (eje de las x) no saldrá de este plano durante el movimiento, y que la recta que une los puntos de contacto en cada instante (que es el eje instantáneo de rotación), se conserva siempre paralela á su dirección primitiva $O\zeta$; el citado plano vertical es constantemente bisector del diedro

formado por los planos de los dos círculos, de modo que si designamos, como siempre, por θ el ángulo ZGZ_1, el ángulo de los dos planos será 2θ (por ser doble del formado por dicho plano vertical con el plano de uno de los dos círculos, y ser éste igual á ZGZ_1, por tener sus lados respectivamente perpendiculares), de donde se deduce que θ es constante; el ángulo φ aquí es nulo, porque el eje de las x coincide con la intersección del plano Gxy con el Gx_1y_1, y por esta misma razón el ángulo $\psi = xGx_1$ (*) (nulo en la posición de equilibrio).

La coordenada ζ del centro de gravedad es nula, porque G no sale del plano $\eta o \xi$, según lo expuesto, ó sea el plano

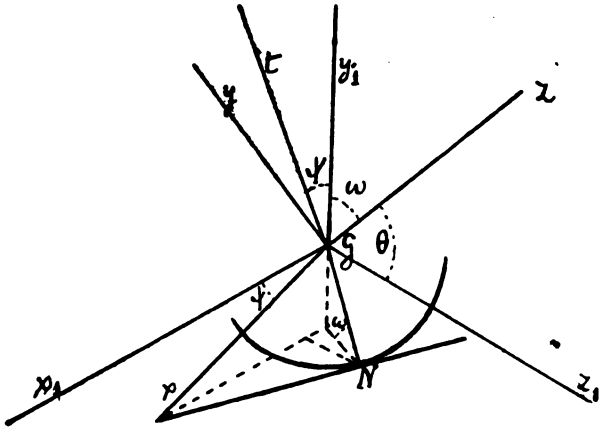


Figura 3.ª

$x_1 G y_1$ coincide con $\eta o \xi$. Para calcular η llamemos ω al ángulo que forma el radio que va al punto de contacto N de uno de los círculos (línea de máxima pendiente) con el plano horizontal, evidentemente se verifica

$$\eta = R \text{ sen } . \omega \qquad [4]$$

(*) Designamos por θ, φ, ψ los ángulos de Euler, como de costumbre.

ahora bien, la normal Gz al plano del círculo está en el plano vertical $y_1 GN$ (porque éste es normal al plano del circulo, por serlo á la tangente en N); luego el ángulo $y_1 Gz = \omega$ (por tener sus lados respectivamente perpendiculares); por tanto, si consideramos el triedro formado por las rectas Gy_1, Gz, Gz_1, una de las caras es ω, la cara $zGz_1 = \theta$, la otra cara $y_1 Gz_1$ es un ángulo recto, y el diedro opuesto á la cara ω, ó sea el ángulo formado por los planos $y_1 Gz_1$, zGz_1 es igual á ψ.

$$tGy_1 = \psi$$

por tener sus lados respectivamente perpendiculares (siendo Gt la traza del plano zGz_1 sobre el plano $x_1 Gy_1$); del triedro conocemos, pues, dos caras y el driedro comprendido, y se trata de calcular la cara opuesta; aplicando la fórmula correspondiente de Trigonometría esférica; resulta

$$\cos . \omega = \operatorname{sen} . \theta \cos . \psi \text{ (*)},$$

sustituyendo en [4]

$$\eta = R(1 - \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \psi)^{\frac{1}{2}} \qquad [5]$$

Viniendo dada la η en función del ángulo ψ por esta fórmula [5], resulta que la posición del sistema queda determinada por dos parámetros, la coordenada ξ del centro de gravedad y el ángulo ψ. Pero como que se trata de un sistema de un solo grado de libertad, toda vez que el corrimiento virtual compatible con las ligaduras es una rotación alrededor de un eje instantáneo que es la recta que une los puntos de contacto, teniendo en cuenta lo dicho en la introducción, se

(*) La fórmula general es $\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$; aquí $b = \frac{\pi}{2}$; $\cos b = 0$, $\operatorname{sen} b = 1$; $c = \theta$; $A = \psi$; $a = \omega$.

podrá calcular ξ en función de ψ, y considerar el sistema como si fuera holónomo con una sola coordenada ψ.

Observemos que la velocidad de cada uno de los puntos de contacto debe ser nula, y, por tanto, debe serlo su proyección sobre el eje $O\xi$ (ó sobre su paralela Gx_1); esta proyección es la suma algébrica de la proyección de la velocidad del centro de gravedad ξ' y la correspondiente á la rotación ψ' alrededor del eje Gz_1 que pasa por G, la cual es $-\psi'\eta$ (como puede verse con facilidad directamente ó usando las fórmulas de cinemática que dan las proyecciones de la velocidad de un punto animado de una rotación conocida); de modo que

$$\xi' - \psi'\eta = 0, \quad \text{ó sea} \quad \xi' = \psi'\eta. \qquad [6]$$

En este problema, como se ve, se da el caso más sencillo posible de que las ecuaciones [1] se reducen á esta sola [6]. Desarrollando la expresión η dada por la fórmula [5]

$$\eta = R\,[1 - \text{sen}^2 . \theta \cos^2 . \psi]^{\frac{1}{2}} = R\,(\cos^2 . \theta + \text{sen}^2 . \theta \,\text{sen}^2 . \psi)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= R\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\,\frac{\text{sen}^2 . \theta\,\text{sen}^2 . \psi}{\cos . \theta} + \ldots\ldots\right), \qquad [7]$$

y sustituyendo en [6] en vez de η sólo el término constante de su desarrollo, tendremos

$$\xi' = R \cos . \theta . \psi', \qquad [8]$$

de donde

$$\xi = R \cos . \theta . \psi. \qquad [9]$$

Disponiendo de las fórmulas [7] y [8] ya podemos pasar á calcular la función de fuerzas U y la semifuerza viva T para establecer la ecuación de Lagrange.

U viene dada por la igualdad

$$U = -2\,Mg\eta + \text{Constante}$$

(designando por M la masa de uno de los dos círculos).

Sustituyendo η por su valor [7], y despreciando en el desarrollo los términos de grado superior al segundo respecto á ψ, queda

$$U = -2MgR\left(\cos.\theta + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\theta\,\text{tg}.\theta.\psi^2\right) + \text{Constante.}$$

Dando á la constante arbitraria el valor conveniente

$$\text{Constante} = 2\,MgR\cos\theta$$

para que $U = o$, cuando $\psi = o$ (ó sea en la posición de equilibrio), resulta

$$U = -MgR\,\text{sen}\,\theta\,\text{tg}.\theta.\psi^2. \qquad [10]$$

En virtud del teorema de Kœnig, y aplicando al caso actual la fórmula que da la fuerza viva de un sólido móvil alrededor de un punto, T vendrá dada por la fórmula (*)

$$T = M(\xi'^2 + \eta'^2) + B\psi'^2\,\text{sen}^2.\theta + C\psi'^2\cos^2\theta. \qquad [11]$$

Sustituyendo los valores $B = \frac{MR^2}{4}$; $C = \frac{MR^2}{2}$; ξ' por

---

(*) Usando las notaciones empleadas en el *Tratado de Mecánica Racional* de Appell ya citado, t. II, párr. 382 y 383, teniendo en cuenta el signo de la rotación ψ', y además que $\varphi = 0$; $\theta' = 0$; resulta $p = 0$, $q = \psi'$ sen θ, $r = -\psi'\cos\theta$, valores que sustituídos en la fórmula

$$T = 2T_1 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$$

(donde T_1 representa la semifuerza viva de uno de los dos círculos), dan

$$2T_1 = M(\xi'^2 + \eta'^2) + B\psi'^2\,\text{sen}^2\theta + C\psi'^2\cos^2\theta.$$

su valor dado por [9], y despreciando η'^2 por ser de grado superior al segundo (*), queda

$$T = M\left(R^2 \cos^2\theta + \frac{R^2}{4}\operatorname{sen}^2\theta + \frac{R^2}{2}\cos^2\theta\right)\psi'^2,$$

$$T = \frac{MR^2}{4}(5\cos^2.\theta + 1)\,\psi'^2. \qquad [12]$$

Habiendo obtenido ya las expresiones de U y T dadas por [10] y [12], resulta

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = \frac{MR^2}{2}(5\cos^2.\theta + 1)\,\psi',$$

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = -\,2MgR\operatorname{sen}\theta\operatorname{tg}.\theta.\psi,$$

y, por tanto, la ecuación del movimiento

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \psi'}\right) = \frac{\partial U}{\partial \psi},$$

se transforma en la siguiente

$$\frac{MR^2}{2}(5\cos^2\theta + 1)\,\psi'' = -\,2\,MgR\operatorname{sen}\theta\operatorname{tg}.\theta.\psi,$$

$$R(5\cos^2\theta + 1)\,\psi'' = -\,4g\operatorname{sen}\theta\operatorname{tg}.\theta\psi. \qquad [13]$$

(*) Despreciando en el desarrollo [7] los términos de grado superior al 2.°

$$\eta = R\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\operatorname{tg}\theta.\psi^2\right).$$

Derivando $\eta' = R\operatorname{sen}\theta\operatorname{tg}\theta.\psi.\psi'$ que es de 2.° grado por contener el producto $\psi\psi'$, al elevar al cuadrado resulta de 4.°

Como se ve, esta ecuación es de la forma

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -K^2q \ (*),$$

integrándola resulta

$$\psi = K_1 \cos\left(\sqrt{\frac{4g \operatorname{sen}\theta \operatorname{tg}.\theta}{R(5\cos^2.\theta+1)}}\, t + K_2\right),$$

la cual interpretada nos dice que el movimiento es una oscilación, cuyo período es

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{4g \operatorname{sen}\theta \operatorname{tg}\theta}{R(5\cos^2.\theta+1)}}} = 2\pi\sqrt{\frac{R(5\cos^2.\theta+1\cos\theta}{4g \operatorname{sen}^2.\theta}} \quad [14].$$

Este resultado demuestra que la posición de equilibrio que consideramos es estable, lo cual ya podíamos prever fundándonos en el Teorema de Lejeune-Dirichlet, pues el valor de U dado por la fórmula [10] es esencialmente negativo, y, por tanto, es máximo en esta posición en que es nulo, ó también observando que se trata de un sistema pesado en una posición en que la altura η del centro de gravedad es mínima.

Discutiendo ligeramente la fórmula [14] de τ, se ve que entre los casos límites

$$\theta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tau = \infty$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tau = 0,$$

aumentando θ, τ disminuye (por disminuir cos. θ y aumen-

(*) La ecuación $\frac{d^2q}{dt^2} = -K^2q$ integrada da $q = K_1 \cos(Kt + K_2)$.

tar sen. θ); para el caso especial $\theta = \frac{\pi}{4}$ (planos de los dos círculos perpendiculares entre sí), queda

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{7R}{4g\sqrt{2}}}.$$

Si en vez de considerar dos círculos materiales, suponemos ahora dos aros reducidos á sus circunferencias, debemos reemplazar los valores anteriores de B y C por los siguientes:

$$B = \frac{MR^2}{2}, \qquad G = MR^2,$$

y verificados los cálculos se llega á la ecuación

$$MR^2 (3 \cos^2 . \theta + 1) \psi'' = - 2 MgR \operatorname{sen} \theta \operatorname{tg} . \theta . \psi,$$

$$R (3 \cos^2 \theta + 1) \psi'' = - 2g \operatorname{sen} \theta \operatorname{tg} . \theta . \psi, \qquad [15]$$

y, por tanto, el período de la oscilación en este caso es

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{R (3 \cos^2 . \theta + 1)}{2g \operatorname{sen} \theta \operatorname{tg} . \theta}}.$$

La discusión es análoga á la anterior, y para el caso especial $\theta = \frac{\pi}{4}$ queda $\tau = 2\pi \sqrt{\frac{5R}{2g\sqrt{2}}}$, valor mayor que el correspondiente de antes.

III

Vamos ahora á estudiar los pequeños movimientos de «Un hemisferio pesado apoyado sobre un plano horizontal perfectamente rugoso (es decir, sobre el cual no pueda resbalar.)»

Desde luego podríamos aplicar el procedimiento general (*); pero en este problema, como en muchos análogos, se llega más rápidamente á la solución, aplicando el teorema de los momentos de las cantidades de movimiento; precisamente lo tratamos por este motivo, como ejemplo en que esto ocurre.

Evidentemente la posición, en la que el radio eje de simetría (es decir, el normal al plano que limita al hemisferio) es vertical, es una posición de equilibrio. Se trata de estudiar los pequeños movimientos alrededor de esta posición. Tomemos como origen de los ejes fijos el punto del plano, que es punto de contacto O en la posición de equilibrio, y como ejes, la vertical que pasa por este punto, y dos rectas cualesquiera del plano trazadas por O perpendiculares entre sí. Como origen de los ejes móviles invariablemente ligados al cuerpo tomemos su centro de gravedad G, como eje de las z la perpendicular trazada por G al plano PP' que limita el hemisferio (recta que en la posición de equilibrio coincide con la vertical), y como ejes de las x y de las y dos rectas paralelas á dicho plano, perpendiculares entre sí y que en la

(*) Tomando como parámetros las coordenadas del centro de gravedad y los cosenos de los ángulos de los ejes móviles con los fijos, y teniendo en cuenta las relaciones entre éstos y las condiciones para que la velocidad del punto del hemisferio que coincide con el de contacto sea nula, aplicando la proposición fundamental, se puede considerar el sistema como si fuera holónomo con 3 coordenadas, que son tres de los cosenos citados.

posición de equilibrio se coloquen paralelamente á los ejes fijos de las x_1 y de las y_1.

Apartemos el hemisferio de su posición de equilibrio dándole un pequeño movimiento paralelamente á uno de los planos verticales que pasan por el eje Oz_1; como que por razón de simetría, el movimiento será el mismo cualquiera que sea el plano de estos que consideremos, supongamos que el movimiento se verifique paralelamente al plano $Z_1 Ox_1$.

Siendo el movimiento una serie de sucesivas rotaciones

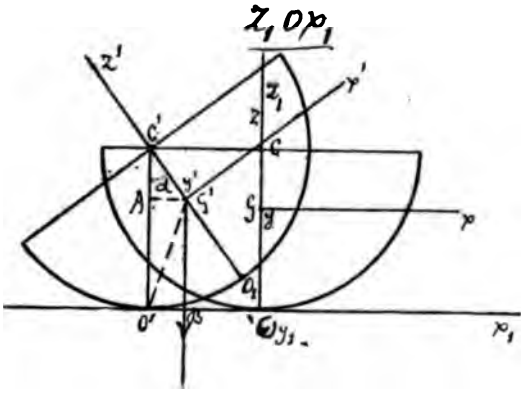


Figura 4.ª

elementales alrededor de ejes O, O'..... perpendiculares al plano $Z_1 Ox_1$, la suma de los momentos de las cantidades de movimiento en un instante cualquiera en que el eje de rotación sea O' respecto á este eje viene dada por la fórmula

$$I\frac{d\alpha}{dt},$$

donde I representa el momento de inercia del hemisferio respecto al eje O' y $\frac{d\alpha}{dt}$ es la velocidad angular siendo α el ángulo que forma la posición correspondiente $C'z'$ del eje Cz invariablemente ligado al cuerpo con el vertical fijo Oz_1.

El momento del peso Mg aplicado en G' respecto al mismo eje O' es

$$Mg \times O'B = Mg \times G'A,$$

y considerando el triángulo rectángulo $G'\,A\,C'$ y recordando que (*) $G'\,C' = \frac{3}{8} R$ resulta

$$Mg \times \frac{3}{8} R \operatorname{sen} \alpha,$$

y despreciando los términos de grado superior al primero con relación á α

$$Mg \times \frac{3}{8} R\alpha.$$

Por lo tanto, aplicando el teorema de los momentos de las cantidades de movimiento, se obtiene la ecuación

$$\frac{d}{dt}\left(I \frac{d\alpha}{dt}\right) = -Mg \times \frac{3}{8} R\alpha. \qquad [16]$$

Ahora bien; el momento de inercia I respecto al eje O' puede deducirse del momento de inercia I_1 respecto al eje O_1 por la fórmula

$$I - I_1 = M(l^2 - l_1^2) \;.....\; (O'G' = l,\;\; O_1G' = l_1),$$

y considerando el triángulo $O'\,G'\,O_1$

$$l^2 - l_1^2 = \delta^2 - 2\,l_1\delta \cos . G'\,O_1\,O' \;.....\; (\delta = O'\,O_1);$$

pero como que $\cos G'\,O_1\,O' = \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$; $\delta = 2\,R \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$

$$l^2 - l_1^2 = 4\,R^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} - 4\,l_1\,R \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2},$$

(*) Tratado de Mecánica Racional, por D. José Ruiz Castizo. Tomo primero, pág. 139.

lo cual prueba que la diferencia $l^2 - l^2$, es de segundo grado respecto á α, y, por tanto, despreciando los términos desde el segundo grado en adelante, se puede considerar

$$I = I_1 = \text{constante y } \frac{dI}{dt} = o.$$

Sustituyendo en la igualdad [16].

$$I_1 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = - Mg \times \frac{3}{8} R\alpha. \qquad [17]$$

El momento de inercia I_1 puede calcularse del siguiente modo: el momento de inercia respecto al eje C' es $\frac{2}{5} MR^2$; luego respecto al eje G'

$$\frac{2}{5} MR^2 - M\left(\frac{3}{8} R\right)^2 = \frac{83}{320} MR^2$$

de donde,

$$I_1 = \frac{83}{320} MR^2 + M\left(\frac{5}{8} R\right)^2 = \frac{13}{20} MR^2.$$

Reemplazando I_1 por su valor en [17]

$$\frac{13}{20} MR^2 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = - Mg \times \frac{3}{8} R\alpha$$

$$\frac{13}{20} R \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = - \frac{3}{8} g\alpha$$

ecuación diferencial del movimiento que integrada da

$$\alpha = \mu \cos\left(\sqrt{\frac{15}{26} \frac{g}{R}}\, t + \rho\right),$$

donde se ve que el movimiento es una oscilación alrededor de la posición de equilibrio cuyo período es

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{15}{26}\frac{g}{R}}} = 2\pi\sqrt{\frac{26R}{15g}}$$

proporcional á la raíz cuadrada del radio. El que el movimiento sea oscilatorio nos corrobora la estabilidad del equilibrio, la cual ya podía preverse toda vez que en esta posición la altura del centro de gravedad es mínima.

Si á partir de la posición de equilibrio diéramos al hemisferio un movimiento de rotación alrededor del eje vertical que pasa por G, el momento del peso es nulo y tendríamos

$$\frac{d}{dt}\left(I_1 \frac{d\beta}{dt}\right) = 0; \quad \frac{d\beta}{dt} = \text{constante}$$

continuaría el movimiento con velocidad angular constante (prescindiendo de la resistencia que ofrezca el plano al movimiento de pivotar); el equilibrio con respecto al ángulo de giro actual β puede calificarse de indiferente, pues permanece el hemisferio en equilibrio cualquiera que sea la posición en que se le abandone sin velocidad inicial alrededor del eje OG.

Por este procedimiento (*), considerando que el movimiento es una serie de sucesivas rotaciones, aplicando el teorema de los momentos de la cantidades de movimiento y, considerando que el momento de inercia, por tratarse de

---

(*) Este procedimiento fué indicado por el sabio catedrático de Acústica, Óptica y Electricidad de la Universidad de Barcelona y antes de Mecánica Racional en la de Zaragoza D. Esteban Terradas en las observaciones que se dignó hacer al modesto trabajo que presenté á las oposiciones á esta última cátedra.

pequeños movimientos, puede considerarse como constante, puede resolverse también el problema anterior de los dos círculos y más abreviadamente que por el procedimiento general, indicado en la introducción, muchos problemas análogos.

PUBLICACIONES RECIBIDAS

(Continuación.)

Olivier (S). — Revue générale des Sciences pures et appliquées 18 Année. Núm. 22.—30 Nov. 1907.—Paris.

Cosmos. — Revue des Sciences et de leurs applications, 56 année.— Nouvelle ser. — Números 1192, 93, 94.—30 Nov. 7, 14 Dec. 1907.— Paris.

Nature. — Núm. 1987 89.—Vol. 77. — Nov. 28. Decem. 5, 12, 1907.— London.

Accademia dei Lincei (Reale).—Atti della...—Anno CCCIV 1907.—Serie quinta.— Rendiconti Classe di scienze fisiche matematiche e naturali.— Seduta del 17 Novembre 1907. —Vol. XVI. — Fascicolo 10, 2.° send.— Roma, 1907.

Oppenheimer-Berlín (Carl).— Biochemisches Centralblatt. Band VI.—Números 21-23.—Zweites Novem. 1907.—Dezem. 1907.—Leipzig.

Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche.— Rendiconto dell'...— Serie 3.ª Vol. XII. — (Anno XLV). — Fascicolo 9.° á 12.° Settembre e Dicembre 1906.—Vol. XIII (Anno XLVI) Fascicolo 1.° 2.° Gennaio.— Febbraio 1907.—Napoli, 1906-1907.

Bibliotheque de l'Ecole des Hautes Etudes.— Bulletin des Sciences Mathématiques.—Deuxième serie.—Tome XXXI.—Octobre 1907.— París.

Societá Cattolica Italiana per gli Studi Scientifici.— Revista di Fisica, Matematica e Scienze Naturali.—Anno 8 Novembre 1907.—Núm. 95.—Pisa-Pavia.

Stazione di Entomologia Agraria (R).— «Redia»— Giornale di Entomologia.—Firenze, 1907.

Royal Society of Edinburgh.— Transactions of the... Volume XLV.— Part. II.—Volume XLV.—Part. III.—Sessions 1905-6; 1906-7.—Edinburgh, 1907.

Royal Society of Edinburgh. - Proceedings of the...—Part. I.—Vol. XXVIII. Pp. 1-64.—Edinburgh, 1908.

Martini und Chemnitz.—Systematisches Conchilien Cabinet. - Von... — 522te 523te 524te Lieferung.—Nürnberg, 1907.

Department of the Interior.— United States Geological Survey. — Charles D. Walcott, Director.—Professional Paper No. 57.—Serie B. Descriptive Geology, 113. - Serie D. Petrography and Mineralogy, 34.—Washington, 1907.

Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, Copenhague.— Mémoires de l'... 7me série, Section des Sciences, Tomo IV, núm. 3 y 4. 7me serie, Section des Lettres, tomo, I, núm. 1. - Kbenhavn, 1907.

American Academy of Arts and Sciences.—Memoirs of the...—Volume XIII.—No. V.—Cambridge, May. 1907.

Royal Society of London.—Philosophical Transactions of the...—Series A, Vol. 207, pp. 307-339 (Plate I). - Series A, Vol. 207, pp. 341-392 (Plates 2 4.—Series B. Vol. 199. Pp. 281-339 (Plate 29).—London, 1907.

University of Kemsas. - Bulletin of the... Science Bulletin. Vol. IV, Nos. 1, 2, 3, 4, 5, and 6.—March, 1907.—Lawrence, Kansas.

Zeipel (H. v.). - Recherches sur les solutions périodiques de la troisiéme sorte dans le probléme des trois corps. Par... (Présenté á la Société Royale des Sciences d'Upsala le 8 Avr. 1904).—Upsala, 1904.

Académie Impériale des Sciences. - Comptes rendus des séances de la Commisión Sismique Permanente —Tome 2, Liv. III.—St. Pétersbourg, 1907.

Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg. - Bulletin de l'...— 1907.—No. 17 y 18.—VI serie 4 y 15, Décembre...—St. Pétersbourg.

Meteorologischen Observatorium der Kaiserl. Universitat Moskau.—Beobachtungen angestellt im ... im Jahre, 1903.—Moscou, 1907.

University of California.—Publications. Botany.—Vol. 2, no. 16, pp. 319 354, Pl. 29.— December, 27, 1907.— Berkeley.— The University Press.

California Academy of Sciences.—Proceedings of the... Fourth Series.-- Vol. I, pp. 1-6.—December, 20, 1907.—San Francisco, 1907.

American Academy of Medicine.—Bulletin of the...—Vol. VIII. No. 1, 2, 3 y 6.—February.- December, 1907. Easton, P. A.

Mascart, Haller.—Annales de Chimie et de Physique. Huitiéme serie.— Tomo XIII.-Janvier, 1908.—Paris.

(Continuará).

XLVII. — Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimatercera.

SEÑORES:

Hemos obtenido la fórmula general, según Mr. Poincairé, de la potencial de un sistema de puntos, constituyendo un sólido elástico.

Esta fórmula era la siguiente:

$$U = U_0 + \int [P_l(a,b) + P_e(a,b) + P_l(\Pi)],$$

en la cual la integral se refería á toda la extensión del sólido, y en que el elemento diferencial $dx\,dy\,dz = d\tau$, es decir, el volumen de cada elemento, suponíamos que estaba comprendido como factor en el coeficiente de cada término. Claro es que si lo pusiéramos en evidencia la fórmula sería

$$U = U_0 + \int [P_l(a,b) + P_c(a,b) + P_l(\Pi)]\, d\tau,$$

y las expresiones P ya no serían las de la fórmula precedente, sino aquéllas divididas, ó, si se quiere, divididos sus coeficientes por $d\tau$.

Mas para no complicar la escritura, y porque no puede ofrecer ninguna confusión, no empleamos notaciones distintas.

Ya hemos dicho que P_l es un polinomio lineal de a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 b_3.

Que P_c es un polinomio homogéneo de segundo grado de las mismas cantidades.

Que $P_l(\Pi)$ es un polinomio lineal de las seis expresiones Π, que definíamos en la conferencia anterior, y que son polinomios de segundo grado de las derivadas u, v, w de primer orden con relación á x, y, z.

La cantidad que está bajo el signo integral es la potencial de cada elemento del sistema elástico; y en conjunto, según lo que acabamos de decir, y recordando lo que significan a, b y Π, será todo ello un polinomio de segundo grado de las nueve cantidades

$$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$$

$$\frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dv}{dz}$$

$$\frac{dw}{dx}, \frac{dw}{dy}, \frac{dw}{dz},$$

que son las que definen la deformación en cada elemento, conforme con explicábamos en el curso anterior.

Los coeficientes de los diferentes términos, en rigor, serán funciones de x, y, z, aunque están expresados, según hemos visto, por las derivadas de F con relación á R.

Aunque todo esto parece algo complicado, en el fondo es sumamente sencillo, y hasta cierto punto hubiera podido preveerse *à priori*, por las consideraciones siguientes, que son resumen de lo expuesto en la conferencia anterior.

1.° La potencial de todo el cuerpo elástico será la suma de las potenciales de sus elementos, puesto qne unos no influyen en otros.

2.° La potencial de cada elemento dependerá de lo que se haya separado cada punto de su posición de equilibrio, ó, dicho de otro modo, de la deformación de dicho elemento.

3.° La deformación de un paralelepípedo cualquiera ele-

mental hemos visto en el curso anterior, y puede demostrarse directamente, que sólo depende, suponiendo las x, y; z determinadas, puesto que á un punto determinado nos referimos, de las nueve derivadas que hemos citado siempre, á saber:

$$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$$

$$\frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dv}{dz}$$

$$\frac{dw}{dx}, \frac{dw}{dy}, \frac{dw}{dz}.$$

4.° Luego la potencial de cada elemento dependerá de las nueve derivadas anteriores para cada punto.

5.° Pero como estas derivadas son cantidades muy pequeñas, porque lo son las deformaciones comparadas con las dimensiones primitivas, podríamos desarrollar la función que representa la potencial según las potencias de las derivadas de que se trata, y podríamos despreciar desde los términos de tercer orden inclusive en adelante.

6.° De donde resulta, finalmente, que la potencial de cada elemento podrá estar expresada por un polinomio de segundo grado, según hemos visto que resulta aplicando el método de Mr. Poincaré.

Y es evidente que los coeficientes de este polinomio, en el caso más general, serán funciones de x y z.

Ahora bien: el método de Mr. Poincaré lo que nos proporciona es una forma determinada para el polinomio en cuestión.

***

Y aquí llamamos la atención de nuestros alumnos sobre una circunstancia que ya hemos indicado varias veces. A saber: que Mr. Poincaré parte, en cierto modo, del mismo

punto que Cauchy, es decir: *cálculo de la acción de unos puntos sobre otros,* y termina por asemejarse al método de Lamé.

Como éste calcula las tensiones en función de los coeficientes que definen la deformación, Mr. Poincaré acaba por expresar la potencial de todo el sólido en función de los mismos coeficientes diferenciales.

Esta semejanza, como veremos bien pronto, va acentuándose cada vez más.

Por ahora, sin lanzarnos á nuevas digresiones, continuemos la exposición del método, y para que les sea fácil á mis alumnos estudiar la obra original de Mr. Poincaré, recordemos las notaciones empleadas por dicho autor.

Hemos escrito el valor de la potencial de un sólido elástico bajo esta forma:

$$U = U_0 + \int [P_l(a, b) + P_c(a, b) + P_l(\mathrm{II})]\, d\tau.$$

Todavía podría escribirse, representando el polinomio de primer grado $P_l(a,b)$ por W_1, y el polinomio cuadrático $P_c(a,b) + P_l(\mathrm{II})$ por W_2, de este modo:

$$U = U_0 + \int (W_1 + W_2)\, d\tau = U_0 + \int W_1\, d\tau + \int W_2 d\tau,$$

que es la notación de Mr. Poincaré.

Y por fin, haciendo $W_1 + W_2 = W$, tendremos:

$$U = U_0 + \int W d\tau,$$

en que W es un polinomio de segundo grado en $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}$....., ó sea de las nueve derivadas de u, v, w con relación á x, y, z; de modo que

$$W = W\left(\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dv}{dz}, \frac{dw}{dx}, \frac{dw}{dy}, \frac{dw}{dz}\right).$$

Conociendo ya la expresión de U, pasemos á establecer definitivamente las ecuaciones de equilibrio del sólido elástico.

Podríamos seguir el método elemental, el que sigue monsieur Cauchy, es decir: expresar el equilibrio de cada uno de los puntos del sistema, puesto que para cada punto se conocerán las fuerzas exteriores, y derivando U con relación á x, y, z se conocerán las componentes de las fuerzas interiores. Por otra parte, ya conocemos la forma de U en función de los datos y de las incógnitas.

Y nótese que no decimos que se conozca U en sí, sino únicamente su *forma analítica* en función de los datos y de las verdaderas incógnitas u, v, w ó de sus derivadas; pero esto nos conduce á la solución del problema desde el momento en que enlazamos por medio de ecuaciones todas estas incógnitas.

Parece lo más sencillo escribir, como acabamos de explicar, el equilibrio para cada punto del sistema; mas eso tendría sus inconvenientes por la forma en que viene expresada U, que es la de una integral.

Decimos inconvenientes, no decimos imposibilidad: tan posible es resolver el problema de esta primera manera, como de otra que explicaremos en breve.

Además, establecer el equilibrio para cada punto del sistema es escribir un número inmenso de ecuaciones, y para reducirlas á número finito, que en suma serán tres para toda la extensión del sólido elástico y otras tres para la superficie, fuera necesario pasar de las ecuaciones en diferenciales simultáneas á las ecuaciones en diferenciales parciales, que fué lo que hicimos en cursos anteriores y lo que aún sería algo más complicado en éste.

Pues estas complicaciones, que se preveen aun sin haber intentado resolverlas, se simplifican hasta llegar á términos elementales, aplicando el método de cálculo, que emplea Mr. Poincaré en la obra que vamos, en cierto modo, comentando.

***

Digámoslo de una vez: Mr. Poincaré establece el equilibrio *aplicando el principio de las velocidades virtuales* ó de los trabajos virtuales, que da lo mismo.

Este principio, que ya lo explicamos extensamente en el primer curso de esta asignatura, y que mis oyentes ó lectores pueden consultar en cualquier tratado de Mecánica, se expresa abreviadamente de este modo.

Para que un sistema de puntos, sometidos á ciertas fuerzas y á ciertos enlaces, estén en equilibrio, es preciso, y es suficiente, que la suma de todos los trabajos elementales de las fuerzas que resultarían comunicando á dichos puntos movimientos infinitamente pequeños (sin velocidad) compatibles con las condiciones del sistema; dicha suma, repetimos, es preciso y es suficiente para el equilibrio que sea igual á cero en todas estas pequeñas deformaciones.

Apliquemos este principio á nuestro caso.

Sea a uno de los puntos del sistema;

I la fuerza interior aplicada á dicho punto;

I_x, I_y, I_z las tres componentes paralelas á los ejes coordenados de esta fuerza interior;

E la fuerza exterior que actúa sobre el punto en cuestión a;

E_x, E_y, E_z las componentes de esta última fuerza;

δs el camino arbitrario, pero compatible con las condiciones del problema que se hace recorrer al punto a que estamos considerando;

Y, por fin, δx, δy, δz las tres componentes de δs.

Lo que hemos dicho del punto a diremos de todos los demás puntos del sistema, sin excluir ninguno, ni del interior del sólido, ni de la superficie; porque, digamos de paso, que este método tiene la ventaja de que se obtienen de una vez las condiciones de equilibrio de cualquier elemento del sólido y de la superficie misma, sin necesidad de considerar el paralelepípedo elemental ni el tetraedro. Más aún: en el mismo método encontraremos la manera de calcular las tensiones interiores.

Puesto que el punto a recorre el camino δs bajo la acción de las fuerzas I, E, el trabajo elemental, que es lo que se llama en este caso momento virtual, será:

$$I\delta s \cos(\delta s, I) + E\delta s \cos(\delta s, E).$$

El primer término expresa el trabajo elemental de la fuerza interior I, y el segundo el trabajo, elemental también, para esta deformación virtual de la fuerza exterior E.

La suma de todos estos trabajos, para todos los puntos del sistema, se obtendrá sumando para todos los puntos de dicho sistema un conjunto de expresiones como la anterior, es decir, que el trabajo virtual tendrá esta forma:

$$\Sigma I\delta s \cos(\delta s, I) + \Sigma E\delta s \cos(\delta s, E).$$

Pero sabemos por Mecánica elemental, y además lo hemos demostrado muchas veces en estas conferencias, que el trabajo de una resultante es igual á la suma de los trabajos de las componentes en ejes trirrectangulares; así, tendremos:

$$I\delta s \cos(\delta s, I) = I_x\delta x + I_y\delta y + I_z\delta z,$$

y

$$E\delta s \cos(\delta s, E) = E_x\delta x + E_y\delta y + E_z\delta z;$$

luego la expresión anterior de la suma de trabajos elementales ó momentos virtuales para todo el sistema elástico, será, sustituyendo las expresiones precedentes,

$$\Sigma(I_x\delta x + I_y\delta y + I_z\delta z) + \Sigma(E_x\delta x + E_y\delta y + E_z\delta z).$$

Y esta expresión es la que debe ser igual á cero para todas las deformaciones, ó, de otro modo, para todas las δs compatibles con las condiciones y enlaces del sistema.

Porque este método es un método general de la física matemática, y tiene la ventaja de que se aplica aun para los

casos en que haya enlaces en el sistema, como demuestra Mr. Poincaré en su obra, aunque nosotros no insistiremos sobre este punto. En rigor, el problema no presenta dificultad de ningún género.

En suma, la condición de equilibrio del sistema elástico estará expresada por la ecuación:

$$\Sigma(I_x\delta x + I_y\delta y + I_z\delta z) + \Sigma(E_x\delta x + E_y\delta y + E_z\delta z) = 0;$$

y es preciso que esta ecuación se verifique, dado que no existan enlaces, para todos los valores de δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$,..... relativos á todos los puntos.

Se ve, desde luego, que el principio de las velocidades virtuales se reduce en este caso á las ecuaciones ordinarias del equilibrio; porque, en efecto, la ecuación anterior puede escribirse de este modo

$$\Sigma[(I_x + E_x)\delta x + (I_y + E_y)\delta y + (I_z + E_z)\delta z] = 0,$$

en que la Σ comprende tantos grupos de tres términos, como puntos hay en el sistema. Mas como los puntos son libres, es decir, como entre ellos no existe ningún enlace, todas las variaciones de las coordenadas, ó sean, δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$,..... son independientes; luego para que la ecuación quede satisfecha, es preciso, según se sabe por álgebra elemental, que todos los coeficientes sean nulos, de modo que tendremos

$$\begin{array}{lll} I_x + E_x = 0, & I_y + E_y = 0, & I_z + E_z = 0 \\ I'_{x'} + E'_{x'} = 0, & I'_{y'} + E'_{y'} = 0, & I'_{z'} + E'_{z'} = 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

que son precisamente las ecuaciones de equilibrio ordinarias, las que expresan que las componentes de todas las fuerzas, tanto interiores como exteriores, para cada punto, dan resultados iguales á cero.

Pero nosotros continuaremos empleando la ecuación que resulta de aplicar el principio de las velocidades virtuales.

***

Dicha ecuación hemos visto que es ésta

$$\Sigma(I_x\delta x + I_y\delta y + I_z\delta z) + \Sigma(E_x\delta x + E_y\delta y + E_z\delta z) = 0.$$

El primer término expresa la suma de los trabajos de todas las fuerzas interiores, si á los diferentes puntos del sistema se les obliga á recorrer caminos arbitrarios infinitamente pequeños δs..... de componentes δx, δy, δz.....; pero esta sería precisamente la variación de la potencial, según hemos explicado en otras conferencias, ó si se quiere, la variación de la energía.

De suerte que el primer término puede escribirse abreviadamente de este modo: δU.

Además, hemos explicado que la potencial del sistema es la suma de las potenciales de cada elemento $d\tau = dx\,dy\,dz$ del sólido elástico; luego la variación de potencial de este sólido será la suma de las variaciones de potenciales de sus diferentes elementos, cantidad que hemos escrito con estas tres notaciones equivalentes unas á otras:

$$W\delta\tau, \quad (W_1 + W_2)\delta\tau, \quad P_l(a, b) + P_c(a, b) + P_l(\Pi).$$

Por lo tanto, el primer término de la ecuación del equilibrio podrá escribirse en esta forma:

$$\int \delta W d\tau \qquad (1)$$

ó como la escribe Mr. Poincaré

$$\int \delta(W_1 + W_2)\, d\tau = \int \delta(W_1 + W_2) dx\, dy\, dz.$$

La ecuación de equilibrio se convertirá, pues, en la siguiente:

$$\int \delta W . d\tau + \Sigma(E_x \delta x + E_y \delta y + E_z \delta z) = 0.$$

Para el primer término, en rigor, hemos sustituído á los puntos aislados elementos infinitamente pequeños del sólido iguales á $dx\,dy\,dz = d\tau$; una transformación análoga vamos á hacer con el segundo término.

Las fuerzas exteriores son de dos clases: *Primera*, las que actúan en toda la masa del sólido; *segunda*, las que actúan sobre la superficie.

Y cada una de estas dos clases todavía comprende dos clases de fuerzas: las del *estado inicial* y las que producen la deformación elástica, que estamos considerando.

Unas y otras, lo mismo las del sólido que las de la superficie, acompañan á los puntos en sus variaciones virtuales y producen trabajos elementales.

Todas ellas están comprendidas en la notación general E, es decir, fuerzas exteriores, pero refiriéndose á cada punto.

Pues ahora vamos á agruparlas para cada paralelepípedo elemental $d\tau$.

Consideremos, por ejemplo, las fuerzas del estado inicial para un paralelepípedo del interior del sólido.

Como el paralelepípedo es infinitamente pequeño, podemos suponer que para todos los puntos que contiene, las fuerzas son iguales y paralelas; y transportándolas al centro y refiriéndolas á la unidad de volumen, como se hace siempre, las tres componentes podremos expresarlas por

$$X_1\, d\tau, \qquad Y_1\, d\tau, \qquad Z_1\, d\tau;$$

y claro es que prescindimos, por ser infinitamente pequeños de orden superior, de los pares de fuerzas que resultan de trasladar todas ellas al centro del paralelepípedo.

Repitiendo esto mismo para las fuerzas que se aplican al sólido elástico, en el problema que se plantea, podremos representarlas por las tres componentes:

$$X_2\, d\tau, \quad Y_2\, d\tau, \quad Z_2\, d\tau,$$

y las fuerzas totales para cualquier elemento del interior del sólido, tanto las iniciales ó del estado natural, como las posteriores, tendrán por componentes

$$(X_1 + X_2)\, d\tau, \quad (Y_1 + Y_2)\, d\tau, \quad (Z_1 + Z_2)\, d\tau,$$

ó haciendo según la notación de Mr. Poincaré

$$X_1 + X_2 = X, \quad Y_1 + Y_2 = Y, \quad Z_1 + Z_2 = Z,$$

las siguientes

$$X\, d\tau, \quad Y\, d\tau, \quad Z\, d\tau.$$

Así, la parte del segundo término de la ecuación de equilibrio, ó sea $\Sigma\,(E_x\, \delta x + E_y\, \delta y + E_z\, \delta z)$, se podrá escribir de este modo, refiriéndonos, no ya á los puntos, sino á los paralelepípedos elementales, ó sea agrupando los términos de cada paralelepípedo, que es como substituir la suma relativa á los puntos por una integral relativa á los paralelepípedos en que los puntos se han agrupado; á saber:

$$\int (X\, \delta x + Y\, \delta y + Z\, \delta z)\, d\tau.$$

Pero aún vamos á introducir una pequeña modificación.

Cada punto tenía primitivamente por coordenadas, x, y, z; cuando se deformó el sólido y llegó al estado de equilibrio, bajo la acción de todas las fuerzas, estas coordenadas se convirtieron en

$$x + u, \quad y + v, \quad z + w,$$

y á partir de estas coordenadas se introdujeron las velocidades ó variaciones virtuales que representa la letra δ. De suerte que en la ecuación anterior no debemos escribir

$$\delta x, \quad \delta y, \quad \delta z.....$$

sino

$$\delta(x+u), \quad \delta(y+v), \quad \delta(z+w).....$$

porque estas son las variaciones á partir del supuesto estado de equilibrio que queremos comprobar.

Mas las verdaderas variables *para cada elemento del sólido* no son x, y, z, porque éstas determinan puntos fijos de referencia, definen el centro de cada paralelepípedo en el estado inicial, y sólo son variables para la integración, es decir, para obtener la variación total de la potencial.

Siendo, pues, constantes para las variaciones virtuales, tendremos

$$\int [X\delta(x+u) + Y\delta(y+v) + Z\delta(z+w)]\, d\tau =$$

$$= \int [X\delta u + Y\delta v + Z\delta w]\, d\tau. \qquad (2)$$

Esta será la parte del segundo término de la ecuación de equilibrio por lo que se refiere á las fuerzas exteriores, tanto á las iniciales como á las que posteriormente actuaron.

Estudiemos ahora el conjunto de términos de

$$\Sigma(E_x \delta x + E_y \delta y + E_z \delta z),$$

que se refieren á la superficie del sólido elástico.

Para estos términos hemos de repetir algo de lo dicho, con una ligera modificación.

Como para el interior del cuerpo trasladábamos todas las fuerzas que actuaban en los diferentes puntos del paralelepípedo elemental á su centro, dividiendo ahora la superficie

del sólido en elementos infinitamente pequeños de superficie $d\omega$, trasladaremos todas las fuerzas al centro ó á un punto interior de esta superficie elemental, despreciando, por la misma razón que antes, los pares que resulten.

De suerte que, así como antes representábamos por X, Y, Z las componentes de la fuerza total por unidad de volumen para el paralelepípedo, ahora representaremos por P_x, P_y, P_z las componentes, por unidad de superficie, de la fuertal total que actúa sobre el elemento $d\omega$, y el grupo que queremos calcular tendrá esta forma:

$$\int (P_x \delta x + P_y \delta y + P_z \delta z)\, d\omega; \qquad (3)$$

observando que esta integral sólo se extenderá á la superficie, al paso que la anterior se extendía al volumen.

Claro es que repitiendo lo que antes expusimos, en vez de δx, δy, δz, debemos escribir $\delta(x+u)$, $\delta(y+v)$, $\delta(z+w)$; y como las x, y, z son constantes, la expresión anterior se reduce á

$$\int (P_x \delta u + P_y \delta v + P_z \delta w)\, d\omega. \qquad (3)$$

Ya podemos reunir todos los términos que constituyen la ecuación de equilibrio, según el principio de las velocidades virtuales, que son las (1), (2), (3), y tendremos para condición de equilibrio del sólido elástico la ecuación,

$$\int \delta W \,.\, d\tau + \int (X \delta u + Y \delta x + Z \delta w)\, d\tau +$$
$$+ \int (P_x \delta u + P_y \delta v + P_z \delta w)\, d\omega = 0.$$

Esta ecuación ha de verificarse, para que se realice el equilibrio, sean cuales fueren las deformaciones virtuales

que se supongan en el sistema. De suerte que dicha ecuación comprende muchas ecuaciones de condición.

En las dos últimas integrales están representadas dichas variaciones virtuales por δu, δv, δw para todos los puntos del interior y de la superficie del sólido elástico.

Fijémonos ahora en la primera integral $\int \delta W \delta \tau$, la cual, recordando que W es un polinomio de segundo grado de las nueve derivadas, que caracterizan la deformación elástica, puede escribirse en forma más explícita de este modo:

$$\int \delta W \left(\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dv}{dz}, \frac{dw}{dx}, \frac{dw}{dy}, \frac{dw}{dz} \right) d\tau.$$

La variación de W se obtendrá, según se sabe, por el cálculo de variaciones, aplicando el método de la diferenciación, considerando como variables sujetas á la variación de que se trata las nueve derivadas en cuestión; porque, en efecto, estas son las magnitudes que varían porque contienen las u, v, w.

Las x, y, z que entran en W son constantes para cada elemento de la integral, es decir, son constantes para la *variación* que hemos de aplicar á cada paralelepípedo elemental.

De aquí resulta que la integral precedente podrá ponerse bajo esta forma:

$$\int \left(\frac{d\,W}{d\,\frac{du}{dx}} \delta \frac{du}{dx} + \frac{d\,W}{d\,\frac{du}{dy}} \delta \frac{du}{dy} + \frac{d\,W}{d\,\frac{du}{dz}} \delta \frac{du}{dz} + \right.$$

$$+ \frac{d\,W}{d\,\frac{dv}{dx}} \delta \frac{dv}{dx} + \frac{d\,W}{d\,\frac{dv}{dy}} \delta \frac{dv}{dy} + \frac{d\,W}{d\,\frac{dv}{dz}} \delta \frac{dv}{dz} +$$

$$\left. + \frac{d\,W}{d\,\frac{dw}{dx}} \delta \frac{dw}{dx} + \frac{d\,W}{d\,\frac{dw}{dy}} \delta \frac{dw}{dy} + \frac{d\,W}{d\,\frac{dw}{dz}} \delta \frac{dw}{dz} \right) d\tau.$$

Para abreviar, representando por una letra, según la notación de Mr. Poincaré, cada uno de los coeficientes, es decir,

$$\frac{dW}{d\frac{du}{dx}} = A; \quad \frac{dW}{d\frac{du}{dy}} = B; \quad \frac{dW}{d\frac{du}{dz}} = C;$$

$$\frac{dW}{d\frac{dv}{dx}} = A' \ldots\ldots; \quad \frac{dW}{d\frac{dw}{dz}} = C''.$$

La anterior expresión podrá escribirse de este modo:

$$\int \Big(A\delta\frac{du}{dx} + B\delta\frac{du}{dy} + C\delta\frac{du}{dz} + \\ + A'\delta\frac{dv}{dx} + B'\delta\frac{dv}{dy} + C'\delta\frac{dv}{dz} + \\ + A''\delta\frac{dw}{dx} + B''\delta\frac{dw}{dy} + C''\delta\frac{dw}{dz}\Big) d\tau,$$

y la ecuación de equilibrio se desarrollará así:

$$\int \Big(A\delta\frac{du}{dx} + \ldots\ldots + C''\delta\frac{dw}{dz}\Big) dx\,dy\,dz + \\ + \int (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\, d\tau + \\ + \int (P_x\delta u + P_y\delta v + P_z\delta w)\, d\omega = 0,$$

Evidentemente, en la primera integral las cantidades que representan la *variación*, son las nueve derivadas características, que son, como antes decíamos, las únicas que contienen u, v, w.

Como se sabe por cálculo de variaciones, que los signos δ y d pueden invertirse, porque representan, en rigor, dife-

renciaciones hechas por diversos conceptos, la última ecuación también podrá ponerse bajo esta forma, sustituyendo á $\delta \frac{du}{dx}$ esta otra expresión $\frac{d.\delta u}{dx}$; á $\delta \frac{du}{dy}$ la $\frac{d.\delta u}{dy}$ y así sucesivamente.

La ecuación que expresa el equilibrio será pues

$$(d) \int \left(A \frac{d.\delta u}{dx} + B \frac{d.\delta u}{dy} + C \frac{d.\delta u}{dz} + \right.$$
$$\left. + A' \frac{d.\delta v}{dx} + \ldots\ldots + C'' \frac{d.\delta w}{dz} \right) dx\, dy\, dz +$$
$$+ \int (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) d\tau +$$
$$+ \int (P_x \delta u + P_y \delta v + P_z \delta w) d\omega = 0.$$

Y repetimos ahora lo que al principio dijimos: esta ecuación ha de quedar satisfecha para todos los valores arbitrarios de δu, δv, δw.

Podemos, pues, suponer para todos los puntos del sólido y de su superficie $\delta v = o$ y $\delta w = o$; es decir, no admitir más que deformaciones paralelas al eje de las x. Y entonces la ecuación anterior se reducirá á la siguiente, que será *condición necesaria:*

$$\int \left(A \frac{d.\delta u}{dx} + B \frac{d.\delta u}{dx} + C \frac{d.\delta u}{dz} \right) dx\, dy\, dz +$$
$$+ \int X \delta u . d\tau + \int P_x du . \delta \omega = 0, \qquad (e)$$

y ésta debe quedar satisfecha para todos los valores de δu, que serán distintos de unos puntos á otros, y que variarán también arbitrariamente para cada punto.

Pero δu si entra en forma lineal y explícita en las dos úl-

timas integrales, entra bajo forma de una derivada en la primera integral, lo cual nos impone una transformación de que ya se hace uso en el cálculo de variaciones, que en rigor no es más que una integración por partes, y que hoy constituye en cierto modo un teorema de análisis, teorema ya explicado en cursos anteriores, pero que repetiremos una vez más.

Descompongamos la primera integral en otras tres

$$\int_{(3)} A \frac{d\delta u}{dx} dx dy dz; \int_{(3)} B \frac{d\delta u}{dy} dx dy dz; \int_{(3)} C \frac{d\delta u}{dz} dx dy dz;$$

en que $\int_{(3)}$ significa abreviadamente la integral triple $\int\int\int$.

Del mismo modo representaremos por $\int_{(2)}$ la integral doble $\int\int$, y transformémoslas todas ellas empezando por

$$\int_{(3)} A \frac{d\delta u}{dx} dx dy dz = \int dz \int dy \int A \frac{d\delta u}{dx} dx.$$

Apliquemos el principio de la integración por partes respecto á x, y tomemos por parte integrable $\frac{d\delta u}{dx} dx$, y por parte no integrable $A dy dz$; resultará

$$\int_{(3)} A \frac{d\delta u}{dx} dx.dy dz = \int_{(2)} \left(A dy dz.\delta u\right)_1^2 -$$

$$- \int_{(3)} \frac{dA}{dx} dx dy dz.\delta u.$$

El primer paréntesis indica que hay que aplicar á la expresión en él contenida los dos límites de la integración respecto á x, es decir, los dos valores extremos de x; y advertimos que al diferenciar la parte no integrable $A dy dz$, hemos con-

siderado á dy, dz como constantes, como siempre se consideran los incrementos de las variables independientes.

Fijémonos ahora en la parte comprendida en el paréntesis.

Sea S (fig. 43) el sólido elástico de que se trata, y supongamos que en la primera integral, que es una integral doble relativa á y, z, la integración efectuada sobre x se refiere al filete $a_1\ a_2$ paralelo al eje de las x, cuya sección recta pro-

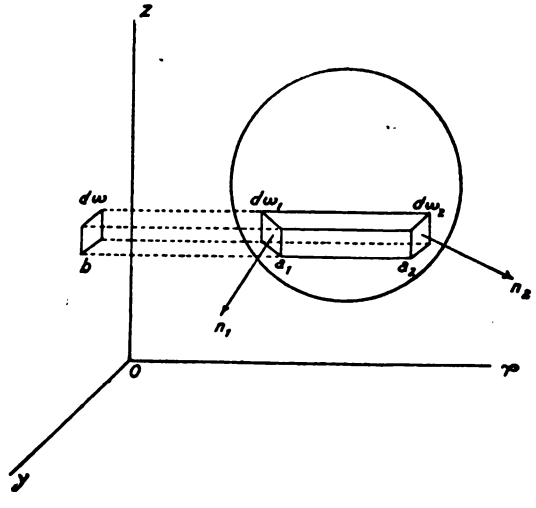


Figura 43.

yectada en b tiene evidentemente por valor $dydz$, y en que los límites con relación á x son ba_1 y ba_2.

Claro es que al integrar no hemos hecho otra cosa que sumar los elementos de la integral, para todos los paralelepípedos infinitamente pequeños, comprendidos en el filete $a_1\ a_2$, desde el área $d\omega_1$ á $d\omega_2$ que son las de entrada y salida del filete en el sólido elástico.

Y ahora podremos comprender el sentido del paréntesis de la primera integral.

Para cada elemento de la integral doble, que se referirá á un filete especial, deberemos poner las magnitudes que se

refieren al punto a_2, después las que se refieren al punto a_1, y restar un resultado de otro.

Expresaremos precisamente esto con los subíndices (1) y (2), y la última ecuación se convertirá en la siguiente

$$\int_{(3)} A \frac{d\delta u}{dx} dx.dydz = \int_{(2)} [(A\,dy\,dz.\delta u)_2 - (A\,dy\,dz.\delta u)_1] -$$

$$- \int_{(3)} \frac{dA}{dx} dxdydz.\delta u = \int_{(2)} [A_2 dydz\delta u_2 - A_1 dydz\delta u_1] -$$

$$- \int_{(3)} \frac{dA}{dx} d\tau.\delta u.$$

El rectángulo b es la proyección sobre el plano de las yz de los dos cuadriláteros $d\omega_1$ y $d\omega_2$. Si por los puntos a_1 y a_2 trazamos las normales á la superficie cerrada, que limita el sólido S hacia el exterior de dicho sólido, es evidente que tendremos

$$dy\,dz = - d\omega_1 \cos(n_1, x); \quad dy\,dz = d\omega_2 \cos(n_2, x)$$

Hemos puesto el signo menos en la primera ecuación, porque el primer miembro de la misma $dydz$ es cantidad esencialmente positiva, y como $\cos(n_1, x)$ es negativo en la figura, hay que poner el signo negativo para la igualdad de signos en ambos miembros.

Si hacemos

$$l_1 = \cos(n_1, x), \qquad l_2 = \cos(n_2, x),$$

ambas ecuaciones se convertirán en

$$dy\,dz = - d\omega_1 l_1, \qquad dy\,dz = d\omega_2 l_2;$$

y substituyendo en el valor de $\int_{(3)} A \frac{d\delta u}{dx} dx\,dy\,dz$, tendremos

$$\int_{(3)} A \frac{d\delta u}{dx}\, dx\, dy\, dz = \int_{(2)} [A_2 l_2 d\omega_2 \delta u_2 + A_1 l_1 d\omega_1 \delta u_1] \cdot$$

$$- \int_{(3)} \frac{dA}{dx}\, d\tau\, \delta u.$$

Respecto á la primera integral doble, vemos que para obtenerla no hay más que sumar para todos los elementos de superficie del cuerpo la expresión $A\, l d\omega\, \delta u$, porque lo que hemos dicho para el filete $a_1\, a_2$, pudiéramos repetir para todos los demás filetes paralelos al eje de las x.

Transformando del mismo modo las otras dos integrales tendríamos

$$\int_{(3)} A \frac{d\delta u}{dx}\, dx\, dy\, dz = \int_{(2)} A l\, d\omega\, \delta u - \int_{(3)} \frac{dA}{dx}\, d\tau\, \delta u,$$

$$\int_{(3)} B \frac{d\delta u}{dy}\, dx\, dy\, dz = \int_{(2)} B m\, d\omega\, \delta u - \int_{(3)} \frac{dB}{dy}\, d\tau\, \delta u,$$

$$\int_{(3)} C \frac{d\delta u}{dz}\, dx\, dy\, dz = \int_{(2)} C n\, d\omega\, \delta u - \int_{(3)} \frac{dC}{dz}\, d\tau\, \delta u,$$

representando por m el coseno del ángulo que forma con el eje de las y la normal exterior á la superficie del cuerpo en el elemento $d\omega$; y del mismo modo por n el que forma dicha normal con el eje de las z. Se entiende que estos cosenos llevan el signo que les corresponde.

Sustituyendo estas tres cantidades en la ecuación (e) resultará

$$\int_{(2)} [A l + B m + C u]\, d\omega\, \delta u - \int_{(3)} \left(\frac{aA}{dx} + \frac{dB}{dx} + \frac{dC}{dz} \right) d\tau \delta u +$$

$$+ \int_{(3)} X d\tau \delta u + \int_{(2)} P_x \delta u\, d\omega = 0,$$

y agrupando las integrales dobles y las integrales triples

$$\int_{(2)} [Al + Bm + Cu + P_x]\, d\omega\, du -$$
$$- \int_{(3)} \left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} - X \right) d\tau\, \delta u = 0.$$

Esta ecuación debe quedar satisfecha para valores arbitrarios de δu; advirtiendo que en el primer término δu se refiere á todos los puntos de la superficie del sólido, puesto que la integral es doble, y sólo á la superficie se refiere; al paso que las δu del segundo término se refieren á todos los puntos del interior del volumen. Expresan, pues, variaciones distintas de u, y los coeficientes deben ser iguales á cero separadamente.

Es decir, que deberemos tener para todos los puntos de la superficie

$$Al + Bm + Cn + P_x = 0.$$

y para todos los puntos del interior del volumen

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} - X = 0.$$

***

Lo que hemos hecho en la ecuación general suponiendo que son nulas todas las variaciones virtuales paralelas á los ejes de las y, z, es decir, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, podemos hacer ahora suponiendo que sólo existen variaciones paralelas al eje de las y, y que son nulas las paralelas al eje de las x y de las z; y de este modo en la ecuación (d) sólo quedarán términos con v, y tendremos

$$\int_{(3)} \left(A' \frac{d\delta v}{dx} + B' \frac{d\delta v}{dy} + C' \frac{d\delta v}{dz} \right) dx\, dy\, dz +$$
$$+ \int_{(3)} Y \delta v \,.\, d\tau + \int_{(2)} P_y\, \delta v\, d\omega = 0.$$

Transformando, lo mismo que hemos hecho antes, es decir, por integración por partes, la primera integral triple, llegaremos evidentemente á estas dos ecuaciones:

$$A'l + B'm + C'n + P_y = 0,$$
$$\frac{dA'}{dx} + \frac{dB'}{dy} + \frac{dC'}{dz} - Y = 0.$$

La primera ha de quedar satisfecha para todos los puntos de la superficie del sólido elástico.

La segunda para todos los puntos del volumen.

Por último; si suponemos que sólo se someten los puntos del sistema á variaciones virtuales paralelas al eje de las z, y que son por lo tanto nulas todas las δx, δy, lo cual puede hacerse como en los casos anteriores, porque suponemos que entre los puntos del sistema no existe enlace de ninguna clase, la ecuación (d) quedará reducida á

$$\int_{(3)} \left(A'' \frac{d\delta w}{dx} + B'' \frac{d\delta w}{dy} + C'' \frac{d\delta w}{dz} \right) dx\, dy\, dz +$$
$$+ \int_{(3)} Z d\tau\, \delta w + \int_{(2)} P_z dw\, \delta\omega = 0;$$

y transformándola como en los casos anteriores, obtendremos estas dos ecuaciones:

$$A''l + B''m + C''n + P_z = 0,$$
$$\frac{dA''}{dx} + \frac{dB''}{dy} + \frac{dC''}{dz} - Z = 0.$$

La primera debe quedar satisfecha como antes para todos los puntos de la superficie del cuerpo.

La última, para todos los puntos del volumen del mismo.

***

En resumen, aplicando el principio de las velocidades virtuales, hemos obtenido que, para que el sólido deformado llegue al equilibrio, deben verificarse estas seis ecuaciones de condición:

$$\left.\begin{aligned} Al + Bm + Cn + P_x &= 0, \\ A'l + B'm + C'n + P_y &= 0, \\ A''l + B''m + C''n + P_z &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (l)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} - X &= 0, \\ \frac{dA'}{dx} + \frac{dB'}{dy} + \frac{dC'}{dZ} - Y &= 0, \\ \frac{dA''}{dx} + \frac{dB''}{dy} + \frac{dC''}{dz} - Z &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (f)$$

Las tres primeras se refieren á la superficie del sólido elástico, y las tres últimas al volumen. Es decir, que aquéllas deben quedar satisfechas para todos los puntos de dicha superficie, y sólo contendrán funciones de dos variables independientes, si se trata del equilibrio, y además del tiempo t, si se trata del movimiento elástico.

Las tres últimas deben quedar satisfechas para todos los puntos del cuerpo y se referirán á funciones de tres variables independientes x, y, z, en el caso del equilibrio, y de éstas y del tiempo t en el caso del movimiento.

Estas seis ecuaciones son *necesarias* porque la ecuación del princicipio de las velocidades virtuales, debe quedar satisfecha para todas las hipótesis que se hagan respecto á δu, δv, δw, y por lo tanto para las hipótesis que hemos hecho.

Pero además son condiciones *suficientes*, toda vez que para cualquier combinación de valores de δu, δv, δw, los grupos aislados que corresponden á cada una de estas variaciones serán iguales á cero.

En suma; las seis ecuaciones obtenidas resuelven el pro-

blema del equilibrio: expresan las condiciones á que deben satisfacer u, v, w, para que la deformación del equilibrio sea la que corresponda á todas las fuerzas interiores y exteriores que actúan sobre el sistema.

Y el problema del movimiento está comprendido, como se sabe, en el del equilibrio, si entre las fuerzas exteriores se comprenden las fuerzas de inercia.

Pero si las seis ecuaciones dichas expresan las condiciones en general necesarias y suficientes, del equilibro, estas ecuaciones resuelven el problema de la Elasticidad, porque no habrá más que deducir de ellas los valores de u, v, w, en función de x, y, z, para el equilibrio, y en función de estas tres variables y del tiempo t para el movimiento.

Veamos ahora cuál es la naturaleza de las seis ecuaciones que hemos obtenido.

Y empecemos para ello por las tres últimas:

$$\begin{aligned} &\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}-X=0,\\ &\frac{dA'}{dx}+\frac{dB'}{dy}+\frac{dC'}{dz}-Y=0,\\ &\frac{dA''}{dx}+\frac{dB''}{dy}+\frac{dC''}{dz}-Z=0. \end{aligned} \qquad (f)$$

Dichas ecuaciones, vamos á ver inmediatamente, que son ecuaciones en diferenciales parciales de segundo orden, en que las funciones son u, v y w, y las variables independientes x, y, z.

Esto resulta evidente con sólo recordar la significación de las A, B, C.....

Tomemos una de dichas letras, la A, por ejemplo: lo que de ella digamos, podríamos repetir para todas las demás.

A, recordemos que procede de W.

Como W es un polinomio de segundo grado de las nueve

derivadas características $\frac{du}{dx}$ ..... y las cantidades A, B..... eran las derivadas de dicha función W, por relación á las expresadas derivadas características, teníamos,

$$A = \frac{dW}{d\frac{du}{dx}} \text{.....}$$

Ahora bien, por ser W, como acabamos de indicar, un polinomio de segundo grado respecto á las expresadas derivadas, $\frac{du}{dx}$ entraría, en general, en términos de esta forma:

$$M\frac{du}{dx},\ N_1\left(\frac{du}{dx}\right)^2,\ N_2\frac{du}{dx}\frac{du}{dy},\ N_3\frac{du}{dx}\frac{du}{dz},\ N_4\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} \text{.....}$$

y no decimos si W contendría todos éstos; nos importa poco para el caso.

Lo único que tenemos que observar es que en A aparecerían, cuando más, estos términos:

$$M_1,\ 2N_1\frac{du}{dx},\quad N_2\frac{du}{dy},\quad N_3\frac{du}{dz},\quad N_4\frac{dv}{dx} \text{.....}$$

en que las M y las N serán, en general, funciones de x, y, z.

Luego en la primera de las tres ecuaciones fundamentales, en la cual entra como sumando $\frac{dA}{dx}$, aparecerían las derivadas con relación á x de los términos anteriores

$$2N_1\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{dN_1}{dx}\frac{du}{dx},\quad N_2\frac{d^2u}{dx\,dy} + \frac{du}{dy}\frac{dN_2}{dx},$$

$$N_3\frac{d^2u}{dx\,dz} + \frac{du}{dz}\frac{dN_3}{dx},\quad N_4\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx}\frac{dN_4}{dx}, \text{.....}$$

es decir, á lo más, derivadas de segundo orden de u, v, w, puesto que las M, N y sus derivadas serán funciones conocidas de x, y, z.

Y como lo que hemos dicho de A puede repetirse de B, C....., resulta comprobado lo que antes indicábamos, á saber: que las tres ecuaciones fundamentales (f) no son más que ecuaciones en diferenciales parciales de segundo orden de u, v, w respecto á las variables independientes x, y, z.

Claro es que, si el problema es de movimiento elástico en las X, Y, Z de las ecuaciones (f), entrarán las fuerzas de inercia, y, por lo tanto, $\frac{d^2 u}{d t^2}$, $\frac{d^2 v}{d t^2}$, $\frac{d^2 w}{d t^2}$.

Y nótese aquí un paralelismo entre la forma de las ecuaciones, según el método de Lamé, y la forma de las ecuaciones (f).

Allí teníamos tres ecuaciones análogas á las (f), en que entraban las componentes de las tensiones N y T. Aquí tenemos las tres ecuaciones (f) que contienen las A, B, C....., que en la conferencia próxima demostraremos, que representan las tensiones en el caso general.

En el método de Lamé teníamos que expresar las tensiones en función de los coeficientes característicos de las deformaciones.

Aquí tenemos que expresar también A, B, C..... en función de dichos coeficientes, y lo conseguimos fácilmente con sólo derivar W, ó sea la potencial, por unidad de volumen para cada elemento.

Allí, ó si se quiere, en el curso anterior, eliminando de las tres ecuaciones fundamentales las N y T en función de los coeficientes de las deformaciones, obteníamos las ecuaciones diferenciales del problema.

En el método de Poincaré, eliminando A, B, C..... de las ecuaciones (f), obtenemos también ecuaciones diferenciales de segundo orden de las funciones incógnitas u, v, w.

El paralelismo es completo, siquiera las notaciones del método de Poincairé sean más generales que las del método de Lamé.

***

Pasemos á las tres primeras ecuaciones (l) que antes obtuvimos y que se refieren á la superficie límite del cuerpo elástico.

Poco tenemos que agregar á lo dicho.

También son ecuaciones diferenciales; pero como los puntos á que dichas tres ecuaciones han de satisfacer están sobre una superficie, serán ecuaciones de dos variables independientes, por ejemplo, la x y la y.

Serán ecuaciones diferenciales, porque las variables u, v, w entran por sus derivadas primeras, como hemos visto, analizando los términos que contiene A.

Y el problema, como ya en otras ocasiones hemos observado, en cuanto á problema de física matemática aquí termina, ó, por lo menos, se suspende hasta que llega el período de la comprobación, ó de la interpretación de los resultados, ó de la determinación de las constantes que contengan los valores finales de u, v, w.

El problema, al llegar á este punto, es un problema de análisis, es decir, de integración.

Se trata de integrar las tres ecuaciones (f), obteniendo los valores de u, v, w en función de las variables independientes x, y, z, y en todo caso del tiempo t, si no se trata sólo de un problema de equilibrio.

Pero es preciso que estas integrales de u, v, w tengan bastante generalidad para satisfacer á las tres ecuaciones (l) relativas á la superficie límite del cuerpo.

Esto quiere decir, que dichas integrales han de contener funciones arbitrarias, que puedan determinarse de modo que satisfagan á las tres ecuaciones (l).

Ya lo hemos explicado minuciosamente en otros cursos.

Claro es que este problema de análisis es inmensamente difícil, y no ha sido resuelto todavía, no ya para las ecuaciones (f) (l), sino aun cuando se simplifiquen por hipótesis particulares, por ejemplo, para los sólidos homogéneos y aun para los sólidos isótropos.

Pero, en rigor, la responsablidad, si la palabra vale, no es de la física matemática, sino del cálculo integral.

Realmente, con lo dicho queda terminada la exposición del método de Mr. Poincaré en su forma más general; sin embargo, en las conferencias que nos restan de este curso todavía trataremos algunos puntos importantes, por ejemplo:

1.° El cálculo de las tensiones.

2.° El caso de los cuerpos isótropos.

XLVIII.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimacuarta.

SEÑORES:

A decir verdad, hemos terminado en la conferencia precedente la exposición del método de Mr. Poincaré, para resolver el problema de la elasticidad, siempre en los límites elementales propios de estas lecciones, cuyo único objeto es facilitar á los alumnos el estudio de las obras originales de los grandes maestros de la ciencia.

Obtuvimos las seis ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} &Al + Bm + Cn + P_x = 0, \\ &A'l + B'm + C'n + P_y = 0, \\ &A''l + B''m + C''n + P_z = 0, \end{aligned} \qquad (l)$$

$$\begin{aligned} &\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} - X = 0, \\ &\frac{dA'}{dx} + \frac{dB'}{dy} + \frac{dC'}{dz} - Y = 0, \\ &\frac{dA''}{dx} + \frac{dB''}{dy} + \frac{dC''}{dz} - Z = 0, \end{aligned} \qquad (f)$$

que con las explicaciones que dimos en dicha conferencia quedaban perfectamente definidas.

Las tres primeras decíamos se refieren á la superficie del sólido elástico, y deben quedar satisfechas para todos los puntos de la superficie del mismo.

Las tres últimas se aplican á todos los puntos del interior de dicho sólido, y para todos ellos deben quedar satisfechas también. Unas y otras, cuando se sustituyen por A, B, C....., sus valores se convierten en ecuaciones en diferenciales parciales de u, v, w.

Las *(f)* son de segundo orden, es decir, contienen x, y, z como variables independientes; u, v, w como funciones de las mismas, y además, los coeficientes diferenciales hasta el segundo orden.

Además, si se trata de un problema de dinámica, contendrán como cuarta variable independiente el tiempo t, y en X, Y, Z las fuerzas de inercia.

Las *(l)* se referirán á dos variables independientes, que serán dos de las x, y, z, puesto que los puntos están sobre una superficie; y el problema queda reducido á integrar el sistema (f) con bastante generalidad para que los valores que obtengamos de u, v, w satisfagan al sistema (l).

Todo esto ya lo dijimos en la última conferencia; lo repe-

timos para refrescar, por decirlo así, las ideas y para enlazar en cierto modo esta conferencia con aquélla.

También llamamos la atención de nuestros alumnos sobre la semejanza, que más tarde se convertirá en identidad, entre las ecuaciones que hemos obtenido y las que obtuvimos en el curso anterior al explicar el método de Lamé.

Eran estas últimas las siguientes (curso de 1907 á 1908, página 223.)

$$\begin{aligned} Pl &= N_1 \alpha + T_3 \beta + T_2 \gamma, \\ Pm &= T_3 \alpha + N_2 \beta + T_1 \gamma, \\ Pn &= T_2 \alpha + T_1 \beta + N_3 \gamma, \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} + \rho X &= 0, \\ \frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} + \rho Y &= 0, \\ \frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} + \rho Z &= 0, \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

La semejanza de estructura entre el sistema de las seis ecuaciones (l) (f) de Mr. Poincaré y el de las seis ecuaciones últimas (I) (II) salta á la vista.

Además, las tres primeras (l) se refieren, como las otras, (I) á la superficie del sólido elástico.

Las tres últimas (f), como las (II), se refieren á toda la extensión del sólido.

Las N y T de Lamé están sustituídas por las A, B, C de Poincaré.

Los tres últimos términos del primer grupo de dicho autor, son P_x, P_y, P_z, que representan las componentes de las fuerzas exteriores aplicadas sobre la superficie; en rigor son cantidades idénticas á las Pl, Pm, Pn que son también las componentes de la fuerza P; sin más diferencia, entre unas y otras, que la notación, ó sea haber puesto en evidencia en

las últimas los cosenos de los ángulos que dichas fuerzas forman con los tres ejes.

En cuanto á la diferencia de signo, sólo con cambiar los de las A, B, C....., desaparece dicha diferencia, así en los primeros como en los segundos grupos.

En estos últimos también aparecen al final de los primeros miembros las componentes de las fuerzas exteriores sobre cada punto, con esta sola diferencia: que en las ecuaciones de Lamé las componentes X, Y, Z se refieren á la unidad de masa del punto sobre el cual actúan, y en las de Poincaré dichas componentes están tomadas, por decirlo así, en globo.

Hasta aquí la concordancia entre las soluciones de ambos métodos es completa.

Pero queda una diferencia, y es que el cuadro de las N, T en las fórmulas de Lamé es simétrico respecto á una de las diagonales, porque, en efecto, es el siguiente:

$$\begin{vmatrix} N_1 & T_3 & T_2 \\ T_3 & N_2 & T_1 \\ T_2 & T_1 & N_3 \end{vmatrix},$$

al paso que no es simétrico el cuadro de las A, B, C..... en las fórmulas de Poincaré, que es éste:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}.$$

Anticipemos la idea de que esta diferencia depende de que el método de Mr. Poincaré es más general, como hemos dicho varias veces, que el método de Lamé, el cual constituye, en cierto modo, un caso particular de aquel método.

Cuando vayamos particularizando el de Mr. Poincaré llegaremos, por último, á una identidad absoluta en las fórmu-

las, y otro tanto podemos decir con relación al método de Cauchy.

Pero aún pondremos más en evidencia la semejanza de uno y otro método interpretando, como vamos á hacer en seguida, la significación de las cantidades A, B, C..... en las últimas fórmulas que hemos obtenido.

Mas antes de empezar dicho estudio, recordemos lo que ya expusimos en la última conferencia, que es una última y fundamental semejanza entre ambos métodos.

La semejanza aparece una vez establecidas las seis ecuaciones (l) (f) del método de Mr. Poincaré y las seis ecuaciones (I) (II) del método de Lamé.

En efecto, obtenidas estas seis últimas ecuaciones, no hay más que eliminar las N y T en función de las derivadas de u, v, w que caracterizan la deformación de cada elemento.

Pues en el método de Mr. Poincaré se repite esto mismo: se eliminan las A, B, C..... en función de las nueve derivadas que caracterizan dicha deformación. Sólo que en este último caso, las A, B, C se obtienen directamente derivando U, como ya explicábamos en la conferencia precedente. Cada cantidad A, B, C..... es la derivada de la función de fuerzas U, ó, si se quiere, de la potencial, con relación á

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{du}{dz} \ldots\ldots$$

Y ahora pasemos á interpretar la significación de dichos coeficientes A, B, C.....

***

Decíamos en la última conferencia: el método de Mr. Poincaré queda ya explicado en sus líneas generales; y como no

tenemos tiempo para más desarrollos ó aplicaciones á casos particulares, ni lo permite el carácter de estas conferencias, daremos por terminadas las del presente curso con sólo tratar dos cuestiones, que son complementarias de la materia que venimos exponiendo.

Es la *primera* la determinación de las presiones en el interior del sólido elástico.

Es la *segunda* la simplificación de las fórmulas hasta llegar á las correspondientes á los cuerpos isótropos.

Cálculo de las presiones.—Las fórmulas (*l*) (*f*) se aplican á cualquier cuerpo elástico *ABCD* (fig. 44).

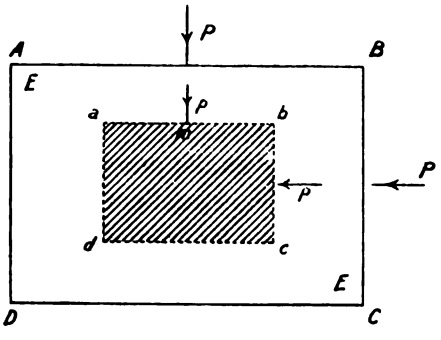


Figura 44.

Las tres primeras, como tenemos dicho, al equilibrio de la superficie; las tres últimas al equilibrio de todos los puntos del interior del sólido. Pues ocurre, que si consideramos en dicho sólido cualquier porción *abcd* de su masa, á esta porción que consideramos podrán aplicarse, mediante una hipótesis natural, dichas seis fórmulas generales.

En efecto, toda la parte comprendida entre *ABCD* y *abcd* podrá suprimirse con el pensamiento, si á la superficie *abcd* le aplicamos fuerzas *p* convenientemente determinadas.

Estas fuerzas no serán otras, que las acciones que sobre la superficie *abcd* ejercía toda la parte externa *EE* del sólido que consideramos.

Y habremos venido á parar á este problema: determinar el equilibrio del sólido *abcd* aislado en el espacio y sobre cuya superficie actúan ciertas fuerzas *p*, que todavía no co-

nocemos, pero que nos proponemos determinar: precisamente estas son las *presiones interiores.*

Porque nótese que la forma *abcd*, que para fijar las ideas es la de un paralelepípedo, en rigor puede ser arbitraria; y cualquiera de las caras *ab* puede pasar por cualquier punto *m*.

De suerte, que si quisiéramos determinar la presión en un punto *m* del sólido, bastaría que hiciéramos lo siguiente: imaginar una porción cualquiera *abcd* en lo interior de *ABCD*; hacer que la superficie *ab* pasase por *m*; determinar el equilibrio del sólido *abcd*, como si estuviese aislado y sujeto á fuerzas exteriores *p*; y deducir, como luego veremos, cuál deba ser la fuerza *p* para que esta porción esté en equilibrio.

Tenemos, pues, un problema idéntico al problema general: sólo que en vez del cuerpo *ABCD*, tenemos el cuerpo *abcd*; en vez de las fuerzas conocidas *P*, las fuerzas desconocidas *p*, y por de contado el nuevo cuerpo *abcd* estará sometido en todos sus puntos á las mismas fuerzas que antes, cuando formaba parte del sólido dado *ABCD*.

En suma, al cuerpo *abcd* se le pueden aplicar las seis ecuaciones fundamentales: las tres primeras deberán verificarse para la superficie *abcd*, y las tres últimas para la porción comprendida en el interior de esta superficie.

Pero con esta diferencia, en que deben fijarse mis alumnos: que en las seis ecuaciones fundamentales las *P* eran cantidades conocidas, eran datos del problema, y en cambio las incógnitas eran *u*, *v*, *w*; al paso que ahora, si el problema general ha sido resuelto, ó suponemos que ha sido resuelto, conoceremos *u*, *v*, *w* en fundición de *x*, *y*, *z* para todo el sólido, y por lo tanto, para una de sus partes *abcd*; pero en cambio *no conocemos las* p.

Comprendido esto, la determinación de las presiones en cualquier punto del sólido es un problema bien sencillo.

Supongamos que la porción que hemos separado del só-

lido elástico es el paralelepípedo elemental O (fig. 45) y que la cara $abcd$ pasa por el punto o, para el cual queremos determinar las tensiones. Empleamos la palabra tensión como término genérico; será presión, tracción ó fuerza tangencial.

El punto o de la figura 45 es como el punto m de la figura 44.

Apliquemos á este paralelepípedo, como si fuera un cuerpo aislado, las seis ecuaciones fundamentales, de las cuales sólo nos hacen falta las tres primeras, porque son las que contienen las fuerzas exteriores cuyas componentes hemos designado por P_x P_y P_z.

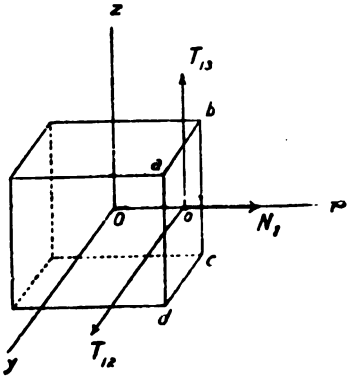


Figura 45.

Estas son precisamente las incógnitas para el punto o de la figura 45.

Estas son, repetimos, las incógnitas, y en cambio son cantidades conocidas todas las demás que entran en el grupo (l), que para mayor claridad reproducimos á continuación

$$
\begin{aligned}
Al + Bm + Cn + P_x &= 0,\\
A'l + B'm + C'n + P_y &= 0,\\
A''l + B''m + C''n + P_z &= 0.
\end{aligned}
$$

Decimos que las A, B, C..... y las l, m, n son cantidades conocidas, pues en efecto, las A, B, C..... son funciones de forma conocida, porque son derivadas de W, y contienen x, y, z, que son las coordenadas del centro O del paralelepípedo, ó si se quiere del punto o.

Además contienen las derivadas de u, v, w, con relación á x, y, z; pero como suponemos que el problema de la Elasti-

cidad está ya resuelto, u, v, w serán funciones conocidas y no habrá más que sustituir en ellas las coordenadas del punto o.

Podemos, pues, determinar en dichas ecuaciones las componentes de la presión ó tensión en o, que son P_x, P_y, P_z.

El problema de determinar las tensiones interiores cuando el problema general está resuelto, queda resuelto también.

De no ser así, no hallaríamos desde luego las presiones interiores, pero determinaríamos, como vamos á ver, su forma analítica en función de las u, v, w.

***

Vamos á cambiar de notaciones para buscar la coincidencia con las fórmulas de Lamé.

En vez de P_x, que es la componente de la tensión en el punto o, paralela al eje de las x, vamos á emplear la letra N_1.

En vez de P_y, que es la componente paralela al eje de las y, emplearemos la notación T_{12}. El primer subíndice indica que se trata de tensiones sobre un área infinitamente pequeña $a\,b\,c\,d$ perpendicular al eje de las x, que siempre se hace corresponder al subíndice 1. El segundo subíndice 2 indica que se trata de la componente paralela al eje de las y.

Por último, en vez de P_z escribiremos T_{13}, en que el subíndice 1 supone, como antes, que se trata de tensiones sobre un pequeño plano perpendicular al eje de las x, y el subíndice 3 expresa la componente paralela al eje de las z.

Tenemos, pues, la siguiente correspondencia:

$$P_x \,.....\, N_1,$$
$$P_y \,.....\, T_{12},$$
$$P_z \,.....\, T_{13},$$

En cuanto á l, m, n, que son los cosenos directores de la normal al plano $a\,b\,c\,d$, son cantidades evidentemente conocidas.

Determinemos ahora P_x, que como coincide con el eje de las x, corresponderá á

$$l = 1, \quad m = 0, \quad n = 0;$$

y sustituyendo en la primera ecuación del grupo (l), es decir, en

$$A\,l + Bm + Cn + P_x = 0$$

estos valores, y en vez de P_x la notación N_1, tendremos

$$A + N_1 = 0,$$

ó bien

$$N_1 = -A.$$

Hemos determinado, pues, N_1, si el problema de la Elasticidad está resuelto, y si no su forma analítica, puesto que A es $\dfrac{dW}{d\dfrac{du}{dx}}$.

En suma

$$N_1 = -\frac{dV}{d\dfrac{du}{dx}}.$$

Del mismo modo para determinar P_y, ó sea T_{12}, tendremos que sustituir, como antes, puesto que el plano $a\,b\,c\,d$ es el mismo,

$$l = 1, \quad m = 0, \quad n = 0,$$

en la segunda ecuación del grupo (l), es decir, en

$$A'l + B'm + C'n + P_y = 0,$$

poniendo además T_{12} en vez de P_y; y resultará

$$A' + T_{12} = 0,$$

ó sea

$$T_{12} = -A'.$$

Por último, si en la tercera ecuación del primer grupo

$$A''l + B''m + C''n + P_z = 0,$$

hacemos como siempre, puesto que se trata de la misma cara del paralelepípedo;

$$l = 1, \quad m = 0, \quad n = 0,$$

tendremos

$$A'' + P_z = 0;$$

y representando P_z por T_{13}

$$A'' + T_{13} = 0,$$

de donde

$$T_{13} = -A''.$$

Repitiendo consideraciones análogas para las caras $dx \,.\, dz$ y $dx \,.\, dy$, obtendremos las componentes de las tensiones sobre dichas caras en función de las A, B, C..... que son derivadas conocidas de W. De esta manera obtendremos también la significación de dichos coeficientes A, B, C..... que entran en las seis fórmulas fundamentales, las cuales de este modo adquieren aun mayor semejanza con las fórmulas de Lamé, salvo la diferencia que antes indicamos respecto á la no simetría del cuadro

$$\begin{matrix} A & B & C, \\ A' & B' & C', \\ A'' & B'' & C''. \end{matrix}$$

Mr. Poincaré demuestra que, en general, no se verifican las igualdades

$$A' = B, \quad A'' = C, \quad B'' = C'.$$

A este propósito dice textualmente:

«Resultado bastante inverosímil, porque estas igualdades se verifican en el equilíbrio natural, que nosotros hemos escogido arbitrariamente, y que en nada se distingue del estado de equilibrio que llamamos equilibrio forzado».

Además, decimos nosotros, en el curso anterior dimos una demostración elemental, que es clásica y que se aplica á todos los casos.

Y continúa diciendo el ilustre autor:

«Por lo demás, es fácil de explicar la aparente paradoja. No es cierto que $-A\,d\omega$, $-A'd\omega$, $-A''d\omega$, sean las proyecciones sobre los ejes de la presión sobre un elemento de área $d\omega$, perpendicular á ox; son las componentes de la presión que se ejerce sobre un elemento *que antes de la deformación* tenía por área $d\omega$ y era perpendicular á ox.

La deformación cambia el área y su dirección».

Mr. Poincaré desarrolla este cálculo, que es sumamente sencillo, que mis alumnos pueden ver en la obra á que nos referimos y que la falta de tiempo nos impide desarrollar.

Pasemos á la simplificación de la fórmula, que era el segundo de los puntos que antes indicábamos.

***

Simplificaciones.—En dos simplificaciones vamos á ocuparnos tan sólo.

La primera se refiere al estado inicial del sistema; la segunda al caso de los cuerpos isótropos.

1.° Supongamos, que en el estado inicial no existen fuerzas exteriores.

Vimos en la conferencia décima que si representábamos por

$$P_i,\ Q_i,\ R_i,$$

las componentes de las fuerzas exteriores en el estado inicial, y si suponíamos

$$U = U_0 + U_1 + U_2,$$

en que U_0 representa una constante, U_1 una función lineal en u, v, w, y U_2 un polinomio homogéneo de segundo grado de dichas cantidades, las ecuaciones generales de equilibrio eran estas:

$$\frac{dU_1}{du_i} + \frac{dU_2}{du_i} + P_i + X_i = 0,$$

$$\frac{dU_1}{dv_i} + \frac{dU_2}{dv_i} + Q_i + Y_i = 0,$$

$$\frac{dU_1}{dw_i} + \frac{dU_2}{dw_i} + R_i + Z_i = 0.$$

Como son generales para todas las deformaciones posibles, claro es que comprenden el estado inicial ó estado natural.

Para aplicarlas á dicho estado basta suponer nulas las fuerzas exteriores X_i, Y_i, Z_i, asi como las variaciones u_i, v_i, w_i que producen en las coordenadas del sistema.

Pero como $\frac{dU_2}{du_i}$, $\frac{dU_2}{dv_i}$, $\frac{dU_2}{dw_i}$ son funciones lineales homogéneas en u_i, v_i, w_i, haciendo estas cantidades iguales á cero, se anularán estos tres coeficientes diferenciales.

Con lo cual las tres ecuaciones precedentes, aplicadas al estado natural, se reducirán á estas tres

$$\frac{dU_1}{du_l} + P_l = 0,$$
$$\frac{dU_1}{dv_l} + Q_l = 0,$$
$$\frac{dU_1}{dw_l} + R_l = 0.$$

Ahora bien, si la simplificación, que vamos á hacer, consiste en admitir que en el estado natural no existen fuerzas exteriores, deberemos en las ecuaciones precedentes anular P_l, Q_l, R_l.

Y tendremos

$$\frac{dU_1}{du_l} = 0, \quad \frac{dU_1}{dv_l} = 0, \quad \frac{dU_1}{dw_l} = 0.$$

Tales son las condiciones necesarias y suficientes para que en el estado natural no existan fuerzas exteriores.

Ahora bien, U_1 es una función lineal homogénea, y se sabe por el teorema de estas funciones que

$$\frac{dU_1}{du} u + \frac{dU_1}{dv} v + \frac{dU_1}{dw} w = U_1,$$

y como los tres coeficientes del primer miembro son cero, tendremos también

$$U_1 = o.$$

Por otra parte, al introducir las coordenadas R en combinación con las x, y, z, dijimos que $\Sigma \frac{dF}{dR} \rho_1$, por ser una función lineal en u, v, w, y representar el único grupo de esta clase en el desarrollo de U, debía ser igual á U_1, de modo que tendremos

$$U_1 = \Sigma \frac{dF}{dR} \rho_1,$$

y, por lo tanto,

$$\Sigma \frac{dF}{dR} \rho_1 = 0 \qquad (a)$$

para todo el cuerpo elástico. Aplicando el principio de radio de actividad molecular, vimos también, que $U_1 = \int W_1 d\tau$ siendo

$$W_1 d\tau = \Sigma \frac{dF}{dR} \rho_1 \qquad (b)$$

Las dos formas (a) y (b) son al parecer iguales, pero tienen distinta significación, mejor dicho, distinta extensión.

La primera (a) se extiende, como hemos dicho, á todo el cuerpo; las R, y, por lo tanto, las ρ, se refieren á todos los pares de moléculas, á las próximas, como á las lejanas. Fué la fórmula general, antes de introducir la simplificación, que se refiere al radio de actividad molecular.

Después dijimos que la potencial del cuerpo era la suma de las potenciales de cada uno de los elementos. Y así, la fórmula (b) sólo se aplica á cada paralelepípedo elemental; de modo que en esta fórmula (b) sólo entran las R y ρ comprendidas en dicho elemento. Y calculada $\Sigma \frac{dF}{dR} \rho_1$ para cada uno de estos elementos, hay que integrar todos estos valores. Por dicha razón, para obtener la parte de la integral á que nos referimos, que es la parte lineal en u, v, w..... hemos escrito

$$U_1 = \int \Sigma \frac{dF}{dR} \rho_1 = \int W_1 d\tau,$$

introduciendo W_1 referida á la unidad de volumen.

Pero hemos visto, que cuando en el estado natural las fuerzas son nulas, U_1 debe ser igual á cero, luego tendremos

$$\int \Sigma \frac{dF}{dR} \rho_1 = 0, \quad \text{ó bien} \quad \int W_1 d\tau = 0.$$

Y como esta integral es una suma de cantidades positivas, todas ellas deberán ser iguales á cero también; por lo tanto,

$$W_1\, d\tau = \Sigma \frac{dF}{dR} \rho_1 = 0.$$

Recordarán mis alumnos, que expresando ρ_1 en función de as cantidades a_1, a_2, a_3 b_1, b_2, b_3 obtuvimos la siguiente fórmula

$$W_1\, d\tau = 2\Big[a_1 \Sigma \frac{dF}{dR} \Delta x^2 + a_2 \Sigma \frac{dF}{dR} \Delta y^2 + \\ + a_3 \Sigma \frac{dF}{dR} \Delta z^2 + \\ + b_1 \Sigma \frac{dF}{dR} \Delta y \Delta z + b_2 \Sigma \frac{dF}{dR} \Delta x \Delta z + b^3 \Sigma \frac{dF}{dR} \Delta x \Delta y\Big];$$

l uego en el caso que estamos considerando el segundo miembro debe ser igual á cero independientemente de a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3; es decir, para todos los puntos del sólido. Idénticamente nulas, dice Mr. Poincaré; por lo tanto, tendremos que igualar los coeficientes á cero, con lo cual obtendremos estas seis condiciones

$$\Sigma \frac{dF}{dR} \Delta x^2 = 0,\ \Sigma \frac{dF}{dR} \Delta y^2 = 0,\ \Sigma \frac{dF}{dR} \Delta z^2 = 0, \\ \Sigma \frac{dF}{dR} \Delta y \Delta z = 0,\ \Sigma \frac{dF}{dR} \Delta z \Delta x = 0,\ \Sigma \frac{dF}{dR} \Delta x \Delta y = 0. \qquad (c)$$

Tales serán las condiciones necesarias y suficientes, que establece Mr. Poincaré, para que las fuerzas exteriores sean nulas en el caso de equilibrio natural.

Esto, lo que significa en el fondo, es que cuando el cuerpo se abandona á sí mismo, y busca, por decirlo de este modo,

su equilibrio propio, tienen que llegar las moléculas sin velocidad á posiciones tales, que su potencial sea nula para todas sus partes. Y se comprende que, en efecto, si no fuera así, esta potencial tendería á ejercitarse, si la palabra vale, á desarrollar el trabajo de que es susceptible el sistema, los puntos se pondrían en movimiento y el equilibrio sería imposible.

***

Y antes de continuar debemos salir al encuentro de una duda que acaso se les presente á mis alumnos; duda que no es natural en quien ya esté familiarizado con esta clase de cuestiones, pero la experiencia me demuestra que sí lo es en los principiantes.

En la expresión

$$(e)\quad a_1 \Sigma \frac{dF}{dR} \Delta x^2 + a_2 \Sigma \frac{dF}{dR} \Delta y^2 + a_3 \Sigma \frac{dF}{dR} \Delta z^2 +$$
$$+ b_1 \Sigma \frac{dF}{dR} \Delta y \Delta z + b_2 \Sigma \frac{dF}{dR} \Delta x \Delta z + b_3 \Sigma \frac{dF}{dR} \Delta x \, \Delta y,$$

hemos igualado los coeficientes á cero, porque hemos dicho que la expresión debe ser nula para todos los valores de $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, y esto no es tan evidente como á primera vista pudiera parecer.

Si se trata del estado natural, la expresión (e) y las ecuaciones que la preceden carecen en absoluto de sentido, porque se aplican á una deformación superpuesta en cierto modo á la del estado inicial; y si no existen nuevas fuerzas X, Y, Z ni nueva deformación, no existirán u, v, w, las cuales se cuentan á partir del estado natural.

Ni existirán tampoco las a, b, que son las derivadas de u, v, w, con relación á x, y, z.

Todo el artificio analítico cae por su base, y parece á pri-

mera vista que la expresión precedente es nula, no porque los coeficientes lo sean, sino porque las a, b lo son sin necesidad de suponer que dichos coeficientes se anulen.

En una palabra: aplicamos fórmulas de la deformación forzada al estado natural en que la deformación elástica no existe.

Y no se diga que el estado natural supone ya deformaciones elásticas, porque en nuestro caso no existen fuerzas exteriores para el estado inicial, y éste es un estado de equilibrio que no parte de ningún otro *más natural,* si la palabra vale.

A esta duda que asalta puede contestarse de este modo:

Partamos del estado inicial sin fuerzas exteriores.

Apliquemos fuerzas cualesquiera X, Y, Z...., con lo cual obtendremos cierta deformación; y todas las ecuaciones que hemos obtenido, y la última expresión también tendrán ya un sentido riguroso.

Ahora bien: si las fuerzas X, Y, Z..... tienden hacia cero, el sistema elástico tenderá al estado natural; U_1 tenderá hacia cero, y tenderá hacia cero la expresión anterior.

Lo cual no quiere decir que $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ tiendan hacia cero; en general tenderán hacia cantidades finitas, porque expresan derivadas ó suma de derivadas; por ejemplo, $a_1 = \frac{du}{dx}$, $b_1 = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$, y aunque u, v, w tiendan hacia cero, no ha de suponerse, *mientras no se demuestre,* que dichas derivadas tiendan hacia cero con n, v, w.

Pero, en este caso, dichas derivadas dependerán de la ley según la cual las fuerzas exteriores X, Y, Z..... tiendan á anularse, y como estas fuerzas son arbitrarias, según sea la ley de su variación serán distintos los valores $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$.

De suerte que respecto á la expresión que vamos estudiando pueden racionalmente afirmarse dos cosas.

1.ª Que la expresión total tiende hacia cero porque en el

estado natural dicha expresión, que es el valor de $\int W_1 d\tau$, es nula.

2.ª Que las cantidades $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ no tienden hacia cero, sino hacia *valores arbitrarios*, según sean las leyes de variación de las fuerzas X, Y, Z; es decir, según sean las deformaciones que en cierto modo hemos escogido como variables para venir al estado natural.

Ahora bien, si la expresión de que se trata (e) ha de ser nula, y las cantidades $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, no lo son, pero son arbitrarias, entonces sí, deben ser nulos los coeficientes.

Un punto queda por dilucidar, sobre el que haremos algunas ligeras observaciones.

A saber: que siendo completamente arbitraria la ley de decrecimiento de las fuerzas X, Y, Z....., las cantidades a, b tengan realmente por límite cantidades finitas.

Fijemos las ideas.

En uno cualquiera de estos estados elásticos del sistema, correspondientes á un estado natural determinado, y á un sistema determinado también de fuerzas X, Y, Z, las variaciones u, v, w....., si el problema se resolviese, serían evidentemente funciones de las x, y, z y de las X, Y, Z, de suerte que resuelto el problema tendríamos

$$u = f_1 (x, y, z, X, Y, Z),$$
$$v = f_2 (x, y, z, X, Y, Z),$$
$$w = f_3 (x, y, z, X, Y, Z).$$

Pero ocurre esta nueva duda: ¿no podría suceder, que sea cual fuere la ley de decrecimiento de X, Y, Z, siempre por la naturaleza especial de las funciones f los coeficientes diferenciales a, b, es decir

$$\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dw}{dz}, \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}, \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}, \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$$

tendiesen hacia cero, en cuyo caso volvía á presentarse la misma dificultad que al principio?

Porque entiéndase bien, las funciones f no son arbitrarias; corresponden á un fenómeno físico perfectamente determinado.

A esta duda puede oponerse la siguiente observación.

Supongamos, para no complicar el problema, un ejemplo particular: que no exista más que una variable x y una sola componente de las fuerzas exteriores X. En vez de las tres ecuaciones precedentes tendremos una sola

$$u = f(x, X).$$

Pues supongamos que X es de la forma

$$X = \alpha \varphi (x, \alpha),$$

en que φ es una función indeterminada por el pronto, lo cual es legítimo, porque la ley de variación de X es arbitraria, α un parámetro que cuando tiende hacia cero anulará X, y que, por lo tanto, hará que tienda el sistema al estado natural. Además en el límite, es decir, cuando α es cero, u será cero también.

Veamos cuál es el coeficiente diferencial $\frac{du}{dx}$.

Su valor será

$$\frac{du}{dx} = \frac{df(x, \alpha\varphi(x,\alpha))}{dx},$$

y diferenciando

$$\frac{du}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{d(\alpha\varphi(x,\alpha))} \frac{d.\alpha\varphi(x,\alpha)}{dx}$$

ó bien

$$\frac{du}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{d(\alpha\varphi(x,\alpha))} . \alpha . \frac{d\varphi(x,\alpha)}{dx}.$$

En general será

$$\frac{df}{dx} = f_1(x, \alpha\varphi(x, \alpha))$$

y

$$\frac{df}{d(\alpha\varphi(x, \alpha))} = \frac{df}{\alpha d(\varphi(x, \alpha))} = \frac{1}{\alpha} f_2(x, \alpha\varphi(x, \alpha)),$$

luego

$$\frac{du}{dx} = f_1(x, \alpha\varphi(x, \alpha)) + f_2(x, \alpha\varphi(x, \alpha)) \frac{d\varphi(x, \alpha)}{dx}.$$

Pero podemos igualar el segundo miembro á una función completamente arbitraria, gozando sólo de esta propiedad, que cuando α tienda hacia cero, tienda hacia una cantidad finita escogida arbitrariamente y en este caso $\frac{du}{dx}$ en el límite será también arbitraria y finita.

Pero si $F(x, \alpha)$ es la función arbitraria á que nos referimos, la condición

$$f_1(x, \alpha\varphi(x, \alpha)) + f_2(x, \alpha\varphi(x, \alpha)) \frac{d\varphi(x, \alpha)}{dx} = F(x, \alpha)$$

quedará satisfecha tomando para $\varphi(x, \alpha)$ la expresión que resulte de integrarla.

Indicamos esta idea, sin discutirla, y sin generalizarla, y sólo á fin de aclarar los conceptos anteriores.

***

Las ecuaciones (c) van á procurarnos otra simplificación en la fórmula general de la potencial, que como recordarán mis alumnos se componía, prescindiendo de la constante, de dos partes:

$$W_1 + W_2;$$

ó si se quiere, según otra notación,

$$P_l(a, b) + P_c(a, b) + P_l(\Pi$$

siendo

$$P_l(a, b) = W_1 \quad \text{y} \quad P_c(a, b) + P_l(\Pi) = W_2.$$

Por el pronto, la primera parte W_1 hemos visto que es igual á cero porque son nulos todos los coeficientes del polinomio lineal en a, b.

Pero vamos á ver que la última parte también es nula, es decir, el polinomio $P_l(\Pi)$.

Porque, en efecto, recordemos que este polinomio se obtiene sustituyendo,

$$\rho_2 = \Pi_{xx}\,\Delta x^2 + \Pi_{yy}\,\Delta y^2 + \Pi_{zz}\,\Delta z^2 + \\ + 2\Pi_{yz}\,\Delta y \Delta z + 2\Pi_{zx}\,\Delta z \Delta x + 2\,\Pi_{xy}\,\Delta x \Delta y$$

en el término $\Sigma \dfrac{dF}{dR}\rho_2$.

Con lo cual tendremos

$$P_l(\Pi) = \Pi_{xx}\Sigma\frac{dF}{dR}\Delta x^2 + \Pi_{yy}\Sigma\frac{dF}{dR}\Delta y^2 + \\ + \Pi_{zz}\Sigma\frac{dF}{dR}\Delta z^2 + \\ + 2\Pi_{yz}\Sigma\frac{dF}{dR}\Delta y\Delta z + 2\Pi_{zx}\Sigma\frac{dF}{dR}\Delta z\Delta x + 2\Pi_{xy}\Sigma\frac{dF}{dR}\Delta x\Delta y.$$

Pero en todos los coeficientes entran precisamente las cantidades del grupo (c) que son iguales á cero; luego todo el polinomio $P_l(\Pi)$ será nulo.

Resulta, pues, esta simplificación notable: cuando en el estado natural del cuerpo elástico no existen fuerzas exte-

riores, de los tres términos que constituyen la potencial, desaparecen al mismo tiempo el primero $P_l(a, b) = W_1$ y, el último $P_l(\Pi)$; es decir, la expresión lineal en a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 y el polinomio lineal que contiene las expresiones Π.

Sólo queda el segundo término $P_c(a, b)$, es decir, un polinomio homogéneo de segundo grado en a, b.

De modo que cuando el estado natural sea el que hemos indicado, puede escribirse salvo el signo:

$$\text{potencial} = \int P_c(a, b),$$

ó poniendo en evidencia el elemento diferencial y sin variar la notación para evitar complicaciones

$$U = \int P_c(a, b)\, d\tau.$$

***

En este caso es fácil demostrar que las fórmulas de Poincaré coinciden exactamente con las de Lamé, es decir, que el cuadro

$$\begin{matrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{matrix}$$

es simétrico; de modo que

$$A' = B, \quad A'' = C, \quad B'' = C'$$

Demostremos la primera de estas igualdades y es claro que las otras dos se demostrarían de la misma manera.

Para ello recordemos lo que significan A' y B.

Hemos dicho en esta misma conferencia, que

$$A' = \frac{dW}{d\frac{dv}{dx}} \quad \text{y} \quad B = \frac{dW}{d\frac{du}{dy}}.$$

Veamos ahora en la hipótesis del estado natural sin fuerzas exteriores, á lo que se reducen los segundos miembros de las dos ecuaciones precedentes.

W hemos visto que es un polimonio de segundo orden de los coeficientes característicos de la deformación, que se expresa de este modo

$$P_l(a, b) + P_c(a, b) + P_l(\Pi);$$

y acabamos de demostrar, que en la hipótesis de que se trata, queda reducido al segundo término; de modo que

$$W = P_c(a, b)$$

y por consiguiente

$$A' = \frac{dP_c(a, b)}{d\frac{dv}{dx}}, \quad B = \frac{dP_c(a, b)}{d\frac{du}{dy}}.$$

Pero no olvidemos la significación de a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3.

Sabemos que

$$a_1 = \frac{du}{dx}, \quad a_2 = \frac{dv}{dy}, \quad a_3 = \frac{dw}{dz},$$

$$b_1 = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \; b_2 = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}, \; b_3 = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}.$$

Luego las dos cantidades $\frac{dv}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ con relación á las cuales hay que derivar el polimonio $P_c(a, b)$ para obtener

A' y B, sólo entran, y entran las dos al mismo tiempo, en $b_3 = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$.

En rigor, $P(a, b)$ puede escribirse así: $P_c(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$; pero como la derivación sólo afecta á b_3, podemos prescindir de los demás coeficientes diferenciales y escribir $P_c(b_3)$, con lo cual tendremos estas tres ecuaciones:

$$A' = \frac{dP_c(b_3)}{d\frac{dv}{dx}}, \quad B = \frac{dP_c(b_3)}{d\frac{du}{dy}}.$$

$$b_3 = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx},$$

y tendremos

$$A' = \frac{dP_c(b_3)}{d\frac{dv}{dx}} = \frac{dP_c(b_3)}{db_3}\,\frac{db_3}{d\frac{dv}{dx}} \quad \text{y como} \quad \frac{db_3}{d\frac{dv}{dx}} = 1,$$

según la última ecuación, resulta

$$A' = \frac{dP_c(b_3)}{db_3}.$$

Del mismo modo

$$B = \frac{dP_c(b_3)}{d\frac{du}{dy}} = \frac{dP_c(b_3)}{db_3}\,\frac{db_3}{d\frac{du}{dy}} \quad \text{y como} \quad \frac{db_3}{d\frac{du}{dy}} = 1,$$

$$B = \frac{dP_c(b_3)}{db_3}.$$

Por lo tanto, $A' = B$, como pretendíamos demostrar.

Del mismo modo demostraríamos las otras dos relaciones $A'' = C$, $B'' = C'$, con lo cual el cuadro de las A, B, C.....

sería un cuadro simétrico respecto á la diagonal $A\ C''$ y coincidirían las fórmulas de Lamé con las fórmulas dc Poincaré.

***

Si en el estado natural del cuerpo elástico existiesen fuerzas exteriores, no podríamos efectuar las simplicaciones que preceden. La U_1 no sería cero; no lo sería, por consiguiente, la W_1, ni sus coeficientes tampoco; luego no se anularía el tercer término de la potencial $P_l(\Pi)$ porque no serían nulos sus coeficientes. Y al obtener las cantidades A, B, C..... el cuadro de dichas cantidades no sería simétríco.

Pero sobre este punto nada podemos agregar á lo dicho y debemos atenernos á lo expuesto hasta aquí.

El que desee profundizar más la cuestión, puede estudiarla en la obra citada de Mr. Poincaré.

En la conferencia próxima, que será probablemente la última de este curso, estudiaremos la segunda simplificación antes indicada, á saber: el caso en que el cuerpo sea isótropo.

XLIX.—Método para determinar la dirección de los vientos superiores por las ondulaciones del borde de los astros.

POR VICENTE VENTOSA.

(Continuación.)

c) *Paso de una ligera depresión cerca del lugar donde se observa.*

ALTITUDES	DIRECCIONES			DIFERENCIAS	
1892, Junio.	7	8	9	8 – 7	9 – 8
∞	225°	334°	330°	+ 109°	— 4°
11100m	218	333	334	+ 115	+ 1
4500	226	338	318	+ 112	— 20
2800	245	341	315	+ 96	— 26
1900	268	331	307	+ 63	— 24
1400	287	335	299	+ 48	— 36
1000	286	321	281	+ 35	— 40
Alto-strati	258		296 fracto-cumuli.		
Veleta	NE	E	NE.-ONO.		

En este caso, la rotación del viento ha presentado singular contraste entre las regiones altas y bajas de la atmósfera, según se advierte en las columnas de diferencias del cuadro precedente. Arriba, dicha rotación fué considerable del 7 al 8 de Junio y casi nula del 8 al 9. Mientras, abajo hubo dos movimientos en sentido contrario uno de otro y de menor amplitud.

Situación general. Las cartas del tiempo nada dicen que pueda ilustrarnos acerca de los movimientos observados, porque señalan una situación estable en Europa durante estos tres días, constituída por altas presiones que ocupan las

Islas Británicas, y una área lejana de presiones bajas en la parte oriental del continente.

Pero las cartas meteorológicas no suelen contener otras curvas isobáricas que las que se diferencian en cinco milímetros de presión; por manera que ciertos movimientos del aire muy circunscritos y de poca intensidad pueden pasar inadvertidos. Eso es lo que en este caso acontece, porque habiendo consultado el *Boletim Meteorológico do Observatorio do Infante D. Luiz,* cuyas isobaras van de milímetro en milímetro, hallamos lo siguiente:

Junio 7.—Ligero centro de depresión al O. de Madrid en el Atlántico.

Idem 8.—Este centro de depresión se halla ahora al N. de Madrid, en el golfo de Vizcaya.

Idem 9.—El mismo centro se ha transportado al ENE., no lejos de la isla de Córcega.

Con razón insiste el sabio meteorologista M. Durand-Greville en la conveniencia de que el trazado de las isobaras en las cartas meteorológicas se haga con más escrupulosidad que hasta aquí y para menores diferencias de presión. Pero esto sólo podrá conseguirse cuando dichas cartas no se construyan, como ahora, inmediatamente y sin aguardar á que los datos que proporciona la observación estén bien comprobados y exentos de errores.

Abundan tanto los ejemplos, análogos á los que hemos entresacado de los cuadernos de nuestras observaciones, que podrían citarse otros muchos igualmente instructivos; pero nos hemos limitado á los pocos que preceden, con el único fin de poner de manifiesto el alcance del método de las ondulaciones. Quien desee más pormenores puede consultar la Memoria que fué presentada en el Congreso de la Atmósfera, reunido en Amberes en 1894, y publicada en sus Actas (*).

(*) *La direction des vents supérieurs déterminée par les ondulations du bord des astres.* Anvers, 1895.

V

Antes de dar por terminada esta Memoria, conviene hacerse cargo de algunas objeciones importantes hechas al método de las ondulaciones, y de la contestación que recibieron. La necesidad de refutar esas objeciones nos obligó á emprender nuevos estudios y experiencias, que, á juicio nuestro, sirvieron para poner en claro la naturaleza y estructura de las ondas aéreas, el modo de producirse y propagarse, y de qué manera intervienen en la transmisión de los rayos luminosos que las atraviesan.

Con el título *Windrichtung und Scintillation*, el Dr. K. Exner, insigne Profesor de la Universidad de Innsbruck, publicó en la revista *Meteorologische Zeitschrift* (Band XIII, 1896, Heft 10, Octubre) un artículo, en el que manifiesta tener dudas acerca de la eficacia de nuestro método, cuando por su medio se trata de conocer la altitud de las corrientes atmosféricas. Este artículo fué seguido de una discusión, que luego analizaremos, entre M. Exner y el Dr. Travert, astrónomo del Observatorio Imperial de Viena, la cual salió á luz en los números de Diciembre 1896 y Enero 1897 de la mencionada revista.

El Dr. Exner resume en su citado artículo sus propios ensayos y estudios en esta materia, del mismo modo que se hallan expuestos en su importante Memoria sobre el *centelleo* de los astros *(Ueber die Scintillation)* (*), como si tratase de plantear una cuestión de prioridad.

A esto repusimos que, cuando comenzamos nuestras observaciones de los vientos superiores, ignorábamos completamente las que el Sr. Exner había realizado, y que tampoco, á la sazón, conocían muchos astrónomos y meteorologis-

---

(*) *Repertorium der Physik*, 1887.

tas. Dado el progreso extraordinario de las ciencias en nuestra época, ese paralelismo de las ideas nuevas, á la vez é independientemente concebidas por varias personas, no es, sin embargo, un hecho aislado, sino muy frecuente, como la historia de las investigaciones científicas demuestra todos los días. Por otra parte, el Dr. Exner, que no parece haya continuado las suyas durante mucho tiempo, confiesa que las conclusiones á que primeramente había llegado eran inexactas, como tenía que suceder, por haber utilizado en sus observaciones un anteojo demasiado pequeño para poder analizar las ondas aéreas producidas en las elevadas regiones de la atmósfera, según luego veremos.

Partiendo de su teoría sobre el centelleo de los astros, parécele irrealizable la aplicación de la propiedad de los focos conjugados, tal como antes se explicó, para determinar la distancia de cada sistema de ondas aéreas al observador. Textualmente dice que «las ondas ciertamente nacen ó se producen á través de lugares determinados de la atmósfera, pero no se encuentran en ningún lugar de la atmósfera» (*); frase un tanto ambigua ú obscura, que, si no nos equivocamos, parece indicar que los rayos luminosos emanados de un astro, al atravesar nuestra atmósfera, experimentan, antes de llegar al ojo del observador, refracciones múltiples é irregulares por efecto de las diferencias de densidad de las diversas capas del aire, el cual rara vez se encuentra en estado de calma y homogeneidad, sino al contrario, sometido generalmente á condensaciones y enrarecimientos de origen muy complejo. El observador, según esto, sólo percibe las direcciones finales de dichos rayos, ora convergentes, ora divergentes, produciendo de esta suerte alternativas de luz y obscuridad continuamente variables.

(*) «Da aber die Wellen zwar durch bestimmte Stellen der Atmosphäre entstehen, sich selbst aber an keiner Stelle der Atmosphäre befinden», etc.

Con arreglo á estas ideas, el Sr. Exner da de los fenómenos observados en el Sol una explicación diferente de la nuestra, y que puede resumirse en estos términos. Cuando el ocular de un anteojo está ajustado en el foco principal, los rayos luminosos que emanan de un punto del limbo solar, después de atravesar el objetivo, convergen en otro punto, que es la imagen del primero, y que, como simple punto, será percibido por el observador. Pero si se saca el ocular aumentando la distancia focal, el *único efecto*, á pesar de la presencia de la atmósfera, es, según el Profesor Exner, que dicha imagen, antes sin dimensiones sensibles, se transforme ahora en un *círculo de difusión (Zerstreuungskreis)*. Consecuencia natural de lo dicho debe ser que las ondas cortas desaparezcan entonces. Eso se ve fácilmente dibujando en una hoja de papel una serie de ondas que correspondan á la superposición de dos ondulaciones diferentes: una compuesta de ondas cortas, y otra de ondas largas. Haciendo luego centro en todos los puntos de estas líneas onduladas, trácense círculos de gran diámetro y *todos iguales*, y se verá que las curvas envolventes de estos círculos permiten ver todavía con gran claridad las ondas largas, mientras las ondas cortas se desvanecen.

Pero si el razonamiento de M. Exner fuera cierto; si los círculos de difusión, en una posición dada del ocular, tuvieran el mismo radio para las ondas de cualquier especie, tendrían también el mismo brillo intrínseco, y, en consecuencia, se debería ver mejor, hasta en el foco principal, las ondas largas que las ondas cortas, por efecto de la mayor dimensión de las primeras; resultado que está en contradicción con lo que la observación casi siempre enseña.

Aseguró, además, el sabio Profesor que, si en vez de alejar el ocular del objetivo, se le acercase, pasado el foco, de la misma longitud, medida en el tubo que sostiene á la primera lente citada, se observarían idénticos fenómenos, y propuso el experimento á los astrónomos que poseyeran ins-

trumentos adecuados para ello. Así lo efectuó el Dr. Travert, utilizando un anteojo de 12 pulgadas de abertura, perteneciente al Observatorio Imperial de Viena. Sacando fuera de foco el ocular de este instrumento, vió claramente en el limbo del Sol una serie de ondas que iban de O. á E., paralelamente á la dirección de los *cirri*. Pero cuando, después de haber ajustado de nuevo el ocular en el foco principal, le introdujo más, acercándole al objetivo, vió, con gran sorpresa suya, que la agitación que antes tenía el borde del astro había cambiado de carácter, y que ese borde era ahora de color azulado. Veíase todavía una especie de vibración (Flimmern); pero las ondas, que durante la primera parte del experimento corrían en dirección bien determinada, habían desaparecido completamente. A resultado tan imprevisto, y que parecía contradecir el aserto del Dr. Exner, este señor objetó que, por haber sido efectuada con toda la abertura del objetivo la observación de M. Travert, el mal éxito del experimento dependía de *diversas causas*, que se eliminarían reduciendo dicha abertura. En consecuencia, M. Travert repitió la prueba colocando en el objetivo un diafragma provisto en su centro de un reducido agujero circular de *tres centímetros* de diámetro, y entonces, efectivamente, la predicción de M. Exner se realizó, pues el movimiento ondulatorio progresivo era visible con la misma claridad, cualquiera que fuese la posición del ocular, tanto dentro como fuera del foco principal.

Del resultado final de estos y otros análogos experimentos, dedújose desde luego que nuestras conclusiones eran erróneas, por lo menos en cuanto á la posibilidad de medir la distancia de las corrientes atmosféricas. Pero lo cierto es que, á pesar de dichos experimentos, no llegó á ponerse en claro la causa de las diferencias encontradas, según se observase con toda la abertura del objetivo ó reduciéndola mucho por la interposición de un diafragma. Verdad es que el profesor Exner invoca en apoyo de su tésis la opinión de

Newton acerca del efecto perjudicial de la gran amplitud de los objetivos para la observación de los fenómenos del centelleo; no obstante, creemos que este principio no tiene aplicación en este caso, ni podría explicar las diferencias de aspecto advertidas á los dos lados del foco principal cuando la superficie del objetivo utilizada llega á tener cierta magnitud.

Por otra parte, no parece justo ó puesto en razón el refutar un procedimiento, basado en hechos ciertos é incontrovertibles, apoyándose en experimentos realizados de muy diferente manera; por lo menos mientras los fenómenos observados no sean sometidos á un minucioso examen de todas las circunstancias que les acompañaban en cada caso. El mismo M. Exner se muestra algo indeciso al formular sus dudas, y M. Travert, al final de la discusión suscitada con tal motivo entre estos dos sabios, atribuye nuestro error «á »una *complicación de relaciones* (sic) cuando no se reduce ó »achica la abertura del objetivo, y entonces, de hecho, cuan»do se mete el ocular, el movimiento ondulatorio se desva»nece, probablemente, por efecto de las *diferentes magnitu»des* de los círculos de difusión». (Vermuthlich wegen der verschiedenen Grösse der Zerstreuungskreise). Esta última conjetura del Dr. Travert, que contradice plenamente la teoría del Prof. Exner, la cual, según se ha visto, exige que en una posición determinada del ocular los radios de *todos* los círculos de difusión sean iguales, revela la verdadera causa, como se demostrará luego, de los fenómenos observados.

VI

Como elemento importante para esclarecer la cuestión que nos ocupa, conviene que hablemos ahora de un método, semejante al nuestro, ideado con posterioridad en América por M. Douglass, astrónomo á la sazón del Observatorio Lowell (Flagstaff, Arizona), y cuya descripción fué primeramente

dada á conocer en *The American Meteorological Journal* (vol. XI, núm. 11, Marzo de 1895) (*).

Las observaciones de este autor fueron al principio hechas en la estación Harvard de Arequipa, en el Perú, durante el verano de 1892; pero la única serie que de ellas se haya publicado y que interesa particularmente á los meteorologistas, corresponde á los días que median entre el 28 de Septiembre y el 31 de Diciembre de 1894. Posteriormente, Mr. Douglass dió á luz en la revista *Popular Astronomy* (Junio de 1897), otra Memoria sobre el mismo asunto, pero donde se ve que el fin principal de las investigaciones de este astrónomo, fué investigar el efecto de las perturbaciones atmosféricas en la visibilidad de los astros observados con auxilio de un anteojo.

Este interesante problema ha sido objeto de multitud de trabajos, que no es posible desmenuzar aquí, por parte de muchos astrónomos, entre ellos el Dr. See, que publicó importantes artículos en las *Astronomische Nachrichten* (números 3.438, 3.449 y 3.455), y, en estos últimos tiempos, los Sres. Riccó, Mascari y Cavasino, del Observatorio de Catania, que hicieron lo propio en las *Memorie della Societá degli Spettroscopisti Italiani* (vol. 34, 1905). Del conjunto de tantos trabajos, realizados por personas eminentes, es justo reconocer que se ha llegado á obtener resultados de entidad suma para las observaciones astronómicas.

Mr. Douglass no observa, como nosotros, el borde de los astros, sino que, quitando de antemano el ocular, coloca directamente el órgano visual en el foco del objetivo del anteojo y examina el disco ficticio que resulta en estas condiciones de la concentración por el objetivo de todos los rayos

---

(*) En el último número (Abril de 1896) de esta REVISTA, que sensiblemente ha dejado de publicarse, al hablar de nuestro método de observación, dice que es «a method used by Mr. A. E. Douglass in this country.» Debemos rectificar aquí este error, porque, como se verá en el texto, entre ambos métodos hay diferencias esenciales.

luminosos procedentes de un punto muy lejano, tal como una estrella ó un planeta de pequeño diámetro aparente. De esta suerte vió pasar las corrientes aéreas en forma de líneas ó filamentos más ó menos finos, que se movían longitudinalmente, presentando diversos aspectos, según las circunstancias de su aparición, lo que condujo á Mr. Douglass á clasificarlos en cierto número limitado de grupos característicos. Mr. See dió de ellos *(Astr. Nachr.,* núm. 3.455) una representación gráfica muy instructiva, así como del efecto que producían, en cada caso, en la definición de las imágenes de las estrellas.

Es menester buscar la causa de tales fenómenos en refracciones irregulares de la luz, debidas á variaciones en la densidad del aire, originadas, en primer término, por irregularidades de la temperatura de las diversas capas atmosféricas, no siendo tan sensible el efecto de las variaciones de la presión; esto es, por lo menos, lo que parece resultar de algunos experimentos efectuados por Mr. Douglass. Este señor compara el movimiento longitudinal de las líneas observadas, al efecto engendrado por una superficie áspera y escabrosa que pasara rápidamente á través de un campo visual muy limitado; como, por ejemplo, el aspecto que ofrecería el suelo, entre los rieles de un ferrocarril, á un observador situado en un tren caminando con mucha velocidad, y que mirase el terreno á través del espacio que separa dos vagones consecutivos.

Según el mismo autor, el examen de la atmósfera, con auxilio de una lente, es casi la misma operación que se emplea para asegurarse de la perfección de figura de un objetivo. Dirigido éste, con tal fin, á una estrella, se observan las irregularidades que presenta la iluminación de la superficie de la lente referida, las cuales, si permanecen inmóviles, acusan los defectos de la misma. Pero si esas irregularidades varían de posición á cada momento, no es posible dudar de que deben su origen á las corrientes que de ordinario surcan

la atmósfera. Las diferencias de iluminación mencionadas no son, en realidad, sombras, sino, antes bien, condensaciones ó rarefacciones de la luz producidas por el poder refringente variable del aire. Por consiguiente, cuando el objetivo concentra toda la luz en un foco, los rayos luminosos procedentes de ciertas partes de las ondas aéreas concurren en un punto situado al interior de este foco, mientras que los emanados de otras partes se reunen en otro punto situado al exterior del mismo. Se ve, pues—agrega Mr. Douglass,—la posibilidad de colocar el ocular detrás de estos puntos, á convenientes distancias, para observar las ondas con el mismo ocular en la imagen amplificada del astro.

Esta es la teoría que ha conducido á dicho señor para llegar á la medida de la altitud de las corrientes atmosféricas. Según lo que acabamos de decir, las distancias que es preciso determinar son las de los puntos de convergencia de la luz, tanto debajo como encima de la superficie donde se producen las ondas, lo que puede en cada caso realizarse haciendo deslizar el tubo porta-ocular hasta que se vea claramente una de las aglomeraciones de los mencionados puntos. Basta entonces leer en una escala fijada en el tubo la extensión focal que resulte para aplicar después á ésta el principio de los focos conjugados.

Dice el autor que probablemente una sola aglomeración de puntos encima y otra debajo de la superficie de las ondas presentará suficiente definición para producir focos observables. Si así fuera y de este modo se pudiese obtener la altitud de cada aglomeración, la altitud del sistema de ondas sería igual al promedio de las dos altitudes. Esto es lo que Mr. Douglass trató de comprobar; pero los resultados obtenidos por él son pocos en número y no siempre suficientemente acordes. El mismo reconoce que su procedimiento ofrece en la práctica serias dificultades, especialmente porque el foco que se busca queda de ordinario muy mal definido.

En general, el examen del método que sucintamente analizamos, induce á creer que éste no es susceptible de gran precisión, al menos para el estudio de la dirección y altitud de las corrientes atmosféricas. Por el contrario, ha demostrado ya su incontestable utilidad en la investigación de la estructura íntima de las ondas aéreas y de la influencia de los diversos estados de la atmósfera en la calidad de las imágenes de los astros, así como acerca de los medios de mejorar las condiciones de visibilidad de los mismos en los telescopios de gran potencia. La repetición de algunos experimentos de Mr. Douglass nos condujo también á las mismas conclusiones.

En este método no es indiferente la magnitud del diámetro aparente del objeto que se observa para el análisis de las corrientes atmosféricas. El objeto ideal sería una estrella brillante, como Sirio, en la cual el contraste de las ondas es el mayor posible. Los planetas cuyo diámetro aparente no llega á 30″, pueden todavía dejar ver las ondas de manera conveniente para su observación (Mr. Douglass casi siempre utilizó el planeta Marte); pero cualquier otro planeta, como Júpiter, cuyo diámetro excede de aquella magnitud, es impotente para mostrarlas con la claridad necesaria.

La abertura del objetivo ejerce también una influencia considerable en la visibilidad de las corrientes. Podemos decir, resumiendo, que cuanto más pequeña es la abertura del mismo, tanto mayor es la agitación de las imágenes de los astros, pero menor la confusión de los detalles de su superficie; y, viceversa, á mayor abertura corresponde menor agitación ó más tranquilidad de las primeras, y al revés, mayor confusión de los últimos. Estas conclusiones son de importancia suma desde el punto de vista astronómico y un guía seguro para el uso de los instrumentos, según el género de trabajo á que se les destine.

La producción de los fenómenos que acabamos de bosquejar depende de la relación de magnitud que haya entre la

amplitud real de las ondas, por una parte, y de la abertura libre ó utilizable del objetivo y el diámetro aparente del objeto observado, por otra. La luz que una estrella nos envía llega al objetivo de un anteojo en forma de cilindro, cuya base es la abertura libre del objetivo. El ojo de un observador, colocado *directamente* en el foco, percibe, sin cambiar de posición, todas las irregularidades de iluminación que unas tras otras se suceden continuamente á lo largo de este cilindro hasta los límites exteriores de la atmósfera. Las corrientes aéreas son exactamente las mismas, en el mismo instante y en el mismo lugar, cualquiera que sea la abertura del telescopio; pero las condiciones de su visibilidad varían con las diferentes aberturas, como es lógico que ocurra.

Suponiendo — dice Mr. Douglass — que las ondas del aire, como las del agua, están compuestas de elevaciones y depresiones, la refracción se verificará en los taludes ó declives intermedios, y en direcciones opuestas en dos taludes adyacentes. Si la abertura del telescopio fuera precisamente igual á la distancia que separa dos *elevaciones consecutivas*, esto es, á la longitud de onda (*), y si todas las ondas tuvieran forma perfecta, realmente geométrica, veríase en primer lugar una difusión (*haziness*) del astro; luego, una desviación de su luz en cierta dirección; después, nueva difusión seguida de otra desviación en sentido contrario, y así sucesivamente. Conforme aumenta la abertura del telescopio, las apariencias continúan siendo las mismas, pero cada vez menos distintas, por la combinación de los efectos de las ondas que pasan á un tiempo por delante del objetivo, hasta que,

(*) Mr. Douglass determina esta longitud dividiendo el diámetro del objetivo por el número de líneas móviles paralelas visibles à la vez. De esta manera halla que dicha longitud varía entre $^1/_2$ y 15 centímetros, según la naturaleza de las corrientes. M. Exner y Lord Rayleigh llegaron, separadamente, por otros medios á valores comparables á los sobredichos.

finalmente, el astro se presenta á la vista tranquilo, pero como confuso ó borroso (*blurred*), y mal definido.

Cuando el astro observado tiene diámetro apreciable, cada punto del disco luminoso envía al objetivo su sistema particular de ondas, y sucede en este caso que la superposición de los efectos simultáneos de estas ondas da por resultado una superficie uniformemente iluminada, que contribuye así á hacer menos visible la agitación de la atmósfera, y tanto menos, cuanto más considerables son las dimensiones aparentes del astro.

Tal es, substancialmente, la explicación de los fenómenos descritos, dada por Mr. Douglass. Si bien se considera, en su argumento principal, ó en lo concerniente á la influencia que en ellos ejerce la abertura del objetivo, no es otra, aunque más precisa en los pormenores, que la formulada por Newton en su *Optica*. Vamos á permitirnos traducir aquí por entero el párrafo que se refiere á esta cuestión (*). Dice así:

«Pero, si es verdad que todo lo que podemos proponer-
»nos ó desear en teoría, el arte es capaz de realizarlo en la
»práctica, hay, sin embargo, ciertos límites, más allá de los
»cuales los telescopios no son ya susceptibles de perfección.
»Porque el aire, á través del cual vemos los astros, está
»continuamente agitado, lo que se advierte en el movimien-
»to como de trepidación de las sombras proyectadas por las
»torres altas y en el centelleo de las estrellas fijas. Vistas
»con anteojos de grande abertura, estas estrellas no cente-
»llean, porque sus rayos luminosos, que pasan por diferentes
»partes de la abertura, oscilando cada uno aisladamente,
»siempre de diversa y á veces opuesta manera, caen al
»mismo tiempo en diferentes puntos del fondo del ojo, don-
»de sus oscilaciones son demasiado vivas y confusas para
»ser vistas separadamente. Ahora bien, todos estos puntos,

(*) *Optices*, Lib. I, Pars I, Propositio VIII, Problema II.

»confundidos y mezclados unos con otros por oscilaciones »muy breves y rápidas, producen un punto luminoso dila»tado, y hacen que la estrella parezca más grande de lo que »debería ser, pero desprovista de centelleo. Los telescopios »grandes podrán, pues, servir para ver los objetos más bri»llantes y amplificados, pero de ningún modo estar dispues»tos para que sean capaces de remediar esa confusión que »procede de la agitación del aire. El único remedio es un »aire muy tranquilo, como acaso se halle en la cumbre de »las montañas muy altas, por encima de las nubes más «gruesas.» (Este desideratum de Newton es hoy un hecho realizado).

Hemos creído conveniente extendernos en el análisis y discusión de estos fenómenos porque, como antes vimos, quiso M. Exner apoyar en el llamado principio de Newton algunas de sus objeciones á nuestro método, cuyo fundamento puede así apreciarse mejor. Dicho principio es realmente importante en procedimientos análogos al de Mr. Douglass; pero la experiencia enseña siempre que la observación telescópica de las corrientes atmosféricas por las ondulaciones del borde de los astros es, al contrario, cada vez más fácil y exacta conforme aumentan las dimensiones de las imágenes y la abertura del objetivo.

Tampoco estaba muy seguro Mr. Douglass sobre la manera de aplicar el principio de los focos conjugados á la medición de altitudes de dichas corrientes, porque en su Memoria se lee: «Es evidente que cuanto mayores sean la *distancia focal* y la abertura ó diametro del objetivo, tanto más exactamente se obtendrán estas distancias»; pero poco después añade: «lo mejor será que la abertura del objetivo sea la mayor posible, evidentemente porque la abertura constituye la base lineal. *¡La distancia focal probablemente origina diferencias de escasa importancia»!*

Mr. Douglass no cita en su trabajo á Newton; pero lo que es realmente extraño que ni él, ni ningún otro de los colabo-

radores en este género de investigaciones, citen el nombre del Profesor Exner, cuyos trabajos, que abarcan la mayor parte de los problemas que tienen relación con el centelleo, aunque no siempre están exentos de error, reúnen, sin embargo, todos los caracteres de la obra de un verdadero sabio. Unicamente en el libro *The System of the Stars* de Miss A. M. Clerke (1890) logramos encontrar la merecida mención que deseábamos.

L.—Análisis de nitros refinados, pólvoras y explosivos cloratados.

POR JUAN FAGES VIRGILI.

La solución clorhídrica de clorhidrato de anilina (*), cuyo empleo general para la investigacion y determinación colo-

(*) El reactivo puede prepararse de cualquiera de estas maneras:

A.	Clorhidrato de anilina puro	50 gr.
	Ácido clorhídrico, 1,12	1000 c. c.

A	Anilina pura	36 gr.
	Ácido clorhídrico 1,19	656 c. c.
	Agua	344 c. c.

La segunda fórmula es mejor para la colorimetría, por ser generalmente más incolora la solución resultante.

En algunos casos, conviene un reactivo más concentrado en ácido clorhídrico, que puede prepararse de cualquiera de estas maneras:

B.	Clorhidrato de anilina puro	50 gr.
	Ácido clorhídrico, 1,145 (754 c. c. de ácido clorhídrico de 1,19 y 246 c. c. de agua)	1000 c. c.

B	Anilina pura	36 gr.
	Ácido clorhídrico de 1,19	800 c. c.
	Agua	200 c. c.

4 volúmenes del reactivo B adicionados de un volumen de agua, equivalen, próximamente, al reactivo A.

rimétrica de los cloratos he expuesto en una Nota anterior (*), tiene cómoda y exacta aplicación al caso de nitros refinados y explosivos cloratados.

Nitros refinados.—Los nitros refinados no suelen contener clorato ó sólo algunas diez milésimas ó menos. Para la fabricación de pólvora varias naciones exigen que el nitrato potásico tenga menos de $^1/_{10000}$ de clorato. Otras naciones no tienen especial legislación sobre este asunto.

La investigación y determinación de proporciones tan pequeñas de clorato exige operar con cantidades relativamente grandes de nitro.

Examen cualitativo.—Se ponen en un tubo 2 gramos del nitro *finamente* pulverizado (**), se añaden 3 c. c. próximamente del reactivo A (ó de una mezcla previamente hecha de 2 vol. de B y 0,5 á 1 vol. de agua), se agita y se deja el tubo delante de un fondo blanco. Aparece coloración azul, ó morada-azul que pasa á azul, y al fin verde, más ó menos intensa y duradera, según la abundancia de clorato.

Un nitro que tenga 0,001 de clorato, da color casi en el acto y muy intenso; si tiene 0,0001, antes de cinco minutos; si tiene de 0,00009 á 0,00005, antes de diez minutos; y no tarda más de veinte minutos si sólo tiene 0,00002 de clorato. Si no aparece ninguna coloración antes de media hora, no tiene clorato el nitro, ó menos de 0,00001. Una coloración que no aparece sino al cabo de una hora próximamente, *no supone* la existencia de cloratos, pues es debida á una lenta acción del ácido clorhídrico sobre el ácido nítrico del nitrato, especialmente si éste es el sódico, ó si se empleó el reactivo *B* sin previa dilución.

Empleando para esta investigación la misma anilina en so-

(*) *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.* Madrid, 1908, Septiembre, tomo VII, pág. 100.

Anales de la Sociedad Española de Física y Química. 1908, Noviembre, tomo VI, pág. 459.

(**) La sensibilidad de la reacción se duplica, proximamente, pulverizando muy finamente el nitro.

lución sulfúrica, se corre el gran riesgo de encontrar cloratos, al parecer abundantes, en todos los nitros. Es cierto, sin embargo, que los nitros *puros* con la solución sulfúrica de anilina no dan ninguna coloración, al pronto al menos (pasado algún tiempo, todos dan intensa coloración); pero si el nitro tiene cloruros, aunque sólo sea en la proporción que muchos nitros refinados los contienen, aparecerá una coloración idéntica á la que daría si tuviera cloratos en bastante proporción; y si tiene nitritos aparecerá también una coloración que, lo mismo que la dependiente de la presencia simultánea de cloruros y nitratos, es más intensa y perturba más la investigación de los cloratos si la anilina contiene toluidina. Aun el nitro absolutamente puro dará intensa y pronta coloración, de matiz variable, con la solución sulfúrica de anilina, si no se evita cuidadosamente la elevación de temperatura al practicar la reacción. En consecuencia, es mala, en el caso actual, la investigación de cloratos, adicionando una gota de anilina, 1 c. c. de agua y uno ó dos de ácido sulfúrico concentrado, aconsejado por algunos; y aun es expuesto á error adicionar solución al 5 por 100 de anilina en ácido sulfúrico diluído y luego añadir ácido sulfúrico concentrado. Con ambas formas de operar se eleva bastante la temperatura para que aparezcan coloraciones, tal vez muy intensas, con nitros purísimos. Todas estas dudas y errores, dependientes de la presencia de cloruros, de nitritos y de la elevación de temperatura, desaparecen empleando la solución clorhídrica de anilina, como propongo, en lugar de la sulfúrica.

Se puede también reconocer si un nitro tiene cloratos, de este modo: se ponen en un tubo 2 gr del nitro *finamente* pulverizado, 1 c. c. de orina y 4 ó 5 c. c. de ácido clorhídrico de 1,12 (*); aparecerá más ó menos pronto una coloración

(*) «Aplicación de la orina á la investigación de oxidantes», J. Fages, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, Madrid, 1908, Octubre, tomo VII, pág. 209.

rojo purpúrea si hay cloratos. Es conveniente comparar con otro tubo en el que se pone solamente orina y ácido clorhídrico, pues con el tiempo esta mezcla adquiere alguna coloración parecida á la que dan los cloratos, pero mucho menos intensa y más tardía. Esta reacción es algo más sensible para los cloratos que la de la solución de anilina, pero menos segura en el caso actual, porque también la dan los nitritos.

Algunos químicos han encontrado cloratos en casi todos los nitros refinados que han ensayado, y aun en los nitratos potásico y sódico *purísimos* de las fábricas más acreditadas. Yo no he tenido este resultado en mis ensayos, pues no he encontrado clorato en los nitratos vendidos como purísimos; muy pocas veces en los nitratos potásicos refinados; más frecuentemente en los nitratos sódicos refinados, y casi siempre en los no purificados (nitros de Chile). Adicionando á nitratos con la marca de purísimos 0,00003 de clorato potásico, he reconocido claramente esta sal con la solución clorhídrica de anilina ó con la orina, y menos fácilmente, pero sin vacilaciones, adicionando sólo 0,00002; entendiendo que esta adición se ha hecho disolviendo el nitro en agua, adicionando el clorato á la disolución, evaporando á sequedad ésta y pulverizando finamente el residuo, pues adicionando al nitro sólido el clorato sólido ó en disolución y luego el reactivo, se reconocen menos de 0,00001 de clorato. Creo, pues, positivamente que los nitros en que no he reconocido cloratos, no los tienen, ó en proporción completamente despreciable, aun empleándolos para la determinación del cloro en substancias orgánicas.

Determinación de clorato en el nitrato potásico refinado.— La colorimetría, basada en el empleo del reactivo A ó B, se aplica á este caso del modo siguiente:

Se disuelven 20 gramos de nitro en agua y se diluye la solucción hasta 100 c. c. justos. La poca solubilidad relativa del nitrato potásico no permite preparar soluciones más concentradas. Se filtra, si es menester, por filtro seco y se opera

la colorimetría con 10 c. c. (2 gramos) del filtrado, que se ponen en un tubo graduado; en otro tubo igual se ponen 2 c. c. de solución de clorato de potasio al 0,1 por 1.000, y solución saturada en frío de nitrato potásico puro (sin clorato, ni nitrito; un poco de cloruros y sulfatos no estorba) hasta completar 10 c. c. justos. Se añaden rápidamente á cada tubo 15 c. c., exactamente medidos, del reactivo B, se mezcla y deja veinticinco ó treinta minutos. La coloración que entonces tiene la solución tipo es muy pálida; si la solución del nitro ensayado es igualmente pálida, ó todavía más, tal vez incolora, dicho nitro tiene 0,0001 ó menos de clorato, y es aceptable para las pólvoras de guerra.

Si se quiere precisar la proporción de clorato, se opera de modo diferente, según supere ó no ésta á 0,0001.

PRIMER CASO. *El nitro tiene más de 0,0001 de clorato.* — Se diluye su solución (en el mismo tubo en que está con el reactivo) con una mezcla de 15 vol. del reactivo B, y 10 vol. de solución saturada en frío de nitro puro, agitando después de cada dilución en la forma usual de las colorimetrías y hasta conseguir igual intensidad de color en los dos tubos. Sólo queda hacer los cálculos. El resultado es únicamente aproximado por la excesiva palidez del líquido tipo, sobre todo si ha habido necesidad de diluir mucho; ejemplos:

Proporción de clorato existente.	Proporción de clorato encontrada.
0,00015	0,00014
0,00015	0,00015
0,00015	0,00013
0,00015	0,000145
0,00020	0,000208
0,00020	0,000219

Si el examen cualitativo ha indicado como probable que el nitro tiene 0,0002 ó más de clorato, es preferible preparar el tubo tipo con 4 c. c. ó más de solución al 0,1 por 1.000

de clorato, ó con 2 c.c. ó más de otra solución al 0,2 por 1.000, pues así las coloraciones son más intensas, se comparan mejor y con menos dilución se llega á igualarlas.

En todo caso, importa mucho, al agitar, después de cada dilución, no introducir ningún colorante en el líquido; por ejemplo, si el dedo no está muy limpio y con él se tapa el tubo para agitar, fácilmente cede á una solución tan fuertemente clorhídrica, coloraciones amarillentas que cambian el matiz de la que se compara y dificultan conocer la identidad de color de los dos líquidos.

Si se quiere confirmar el resultado obtenido, se practica otra colorimetría preparando dos tubos tipos que contengan: el uno poco más clorato, y el otro poco menos que el encontrado en el nitro por el ensayo anterior, y se comparan, con un tercer tubo, con la solución del nitro, veinticinco ó treinta minutos después de adicionar el reactivo á los tres tubos, según la colorimetría de escala.

SEGUNDO CASO. *El nitro tiene menos de 0,0001 de clorato.* — Para esta pobreza de clorato es necesario operar con mayor cantidad de nitro, y como su solubilidad á la temperatura ordinaria no lo consiente, hay que conformarse con una disolución parcial. La mejor forma para esto es la siguiente:

En matraz aforado de 100 c. c. se ponen 40 gramos del nitro y agua casi hasta la marca; se calienta hasta total disolución; se completa, *sin enfriar*, con agua caliente hasta 100 c. c., y se mezcla. Se toma en seguida de la disolución, y rápidamente, lo que quepa en una pipeta de 10 c. c. y se tira; se repite lo mismo otra vez, y calentada así la pipeta, se toman definitivamente con ella 10 c. c. justos de la disolución, que se vierten en el tubo colorimétrico. Practicando rápidamente estas manipulaciones, se puede admitir, con despreciable error, que se han puesto en el tubo 4 gramos justos del nitro. Se enfría rápidamente el tubo, agitando sin

cesar para que el nitrato cristalice finamente; se le añade, ya frío, el agua necesaria para completar 10 c. c.; se preparan los tubos tipos de análoga manera al caso anterior, y se adicionan los 15 c. c. de reactivo, siguiendo en lo restante igual.

Los resultados no pueden ser muy rigurosos, pero son muy aceptables atendiendo á la tan escasa proporción de clorato y á que no se necesita mayor precisión. Ejemplo: un nitro con 0,00006 de clorato ha resultado tener, según esta forma de colorimetría, 0,000052 de dicho clorato. Cualquiera otro procedimiento daría números más inexactos.

Determinación cuantitativa del clorato en el nitrato sódico refinado.—Se practica de idéntica manera que en el nitrato potásico, si la proporción de clorato es igual ó superior á 0,0001, pero sustituyendo en el tubo tipo la solución de nitrato potásico saturada en frío, por una solución de nitrato sódico de 25 á 30 gr. por 100 c. c.

Si la proporción de clorato es inferior á 0,0001, y aun siendo algo mayor, permite la mayor solubilidad del nitrato sódico disolver *en frío* 40 gr. para 100 c. c. de disolución y operar con 10 c. c. que contendrán, por lo tanto, 4 gramos de nitro. En este caso la solución de nitrato sódico purísimo para diluir los tipos, será saturada en frío.

No conviene generalizar á los nitros algo ricos en clorato el operar con 4 gramos, porque esta abundancia de nitrato ocasiona al añadir el reactivo un gran precipitado de cloruro sódico que dificulta algo la comparación de los colores. En los casos de muy poco clorato, este inconveniente es compensado con ventaja por la mayor coloración que se obtiene operando con 4 gr. y no con 2 gr. del nitro.

En todo caso, al calcular, debe convertirse en clorato sódico el número experimental que se refiere á clorato potásico.

Ejemplo: 0,000135 de clorato sódico, en lugar de 0,00014.

De cinco nitratos sódicos refinados han resultado tres

exentos de clorato. Los otros dos, con las siguientes proporciones correspondientes á otros tantos ensayos.

	Colorimetría por dilución.	Colorimetría por escala.
a.....	0,00040	0,00036
».....	0,00035	0,00036
».....	0,00033	0,00035
».....	»	0,00038
b.....	0,000075	0,0000837
».....	»	0,0000850

Explosivos cloratados.—Aunque las pólvoras cloratadas se usan cada vez menos para las armas de fuego, sobre todo de guerra, todavía es necesario analizar, en algunos casos, pólvoras y otros explosivos cloratados, y más excepcionalmente, pólvoras ordinarias no cloratadas intencionadamente, pero que contienen clorato como impureza del nitrato empleado en su fabricación.

Examen cualitativo. — Las pólvoras y demás explosivos expresamente cloratados, contienen bastante clorato para que baste muy poca materia, 0,01 gr. todo lo más, para el ensayo. Puesta esta porción en un tubo, se añaden 8 ó 10 gotas de agua y 2 c. c. de la solución B: la coloración azul que aparezca revela el clorato.

Si es una pólvora ordinaria que contiene clorato sólo como impureza, hay que digerir 4 ó 5 gramos en agua, filtrar, evaporar á sequedad el filtrado, pulverizar *finamente* el residuo y buscar en él el clorato, como en los nitros refinados.

Las materias insolubles que tal vez contengan los explosivos cloratados, no suelen impedir la percepción del color azul. En caso de duda, se digiere un gramo en 8 ó 10 c. c. de agua, se filtra y adicionan á 1 c. c. del filtrado 3 ó 4 c. c. del reactivo B.

Aunque el reactivo da también color azul con otros oxidantes, no suelen encontrarse éstos en los exploxivos. Los nitratos, nitritos y compuestos orgánicos nitrados, no dan

coloración ni impiden la aparición de la originada por los cloratos. Tampoco estorban el carbón, azufre, serrín, féculas, azúcar, ferrocianuro, ácido picrico y picratos; ni ofrece peligro alguno este reactivo con tales mezclas, como le hay usando los reactivos sulfúricos.

El sulfuro de antimonio, el fósforo rojo y aun el blanco, usados en mezclas especiales, y sobre todo en pastas fosfóricas, tampoco estorban; pero sí los peróxidos de plomo y de manganeso, eliminables por filtración de la solución acuosa, y los cromatos, separables de ésta por precipitación con nitrato de plomo en *débil* exceso y filtración. Tampoco se presentan estos casos en explosivos propiamente dichos.

Determinación cuantitativa del clorato potásico en explosivos.—La proporción de clorato en los explosivos que lo contienen es casi siempre bastante grande para hacer dudar de la conveniencia de determinarla colorimétricamente. Sin embargo, la sencillez, la rapidez y sobre todo la comodidad de aplicarse la colorimetría de los cloratos en presencia de cuerpos que deben eliminarse para aplicar otros procedimientos, me ha hecho estudiar su aplicación á los explosivos, y creo que la forma que propongo, cuidadosamente practicada, permite obtener números tan exactos como con los procedimientos usuales, casi siempre mucho más complejos.

Preparación de la disolución.—Se disuelve un gramo del explosivo en el agua necesaria para que la concentración en clorato de la disolución resultante, sea próximamente de 0,5 gramos por 1.000 c. c. Se filtra, si es necesario, por filtro seco y usando vasijas secas.

Determinación aproximada.—En un tubo graduado de 50 c. c. se ponen 5 c. c. de la solución del explosivo; en otro tubo igual, 5 c. c. de una solución rigurosamente preparada de 0,5 gramos de clorato potásico por 1.000 c. c.; se añaden á uno y otro tubo rápidamente, y con el menor intervalo de tiempo del uno al otro, 20 c. c. de la solución B; se mezcla el contenido de cada tubo y se deja diez ó quince minutos.

Se diluye entonces la solución más coloreada, en la forma usual, con una mezcla previamente hecha de 4 vol. de B y 1 vol. de agua, hasta igualar las dos coloraciones, y se calcula en la forma ordinaria el clorato del explosivo. Si la igualación de las dos coloraciones exige duplicar, por lo menos, el volumen de la más intensa, es preferible repetir el ensayo tomando de la solución más concentrada un volumen menor, y completarlo con agua hasta 5 c. c.

Determinación definitiva.—Se opera con un colorímetro de escala, cuyos tubos tengan marcada la capacidad de 100 c. c. En uno de ellos se ponen 5 c. c. de la solución del explosivo, y en otros, los c. c. necesarios de solución valorada de clorato potásico que convenga á cada caso particular, deducidos de la determinación aproximada, y completando siempre el volumen de 5 c. c. por adición de agua.

Ejemplo: 5 4,6 4,3 4,0 3,8 c. c,

de la solución al 0,5 por 1.000 de clorato potásico, que equivalen á 0,0025 0,0023 0,00215 0,0020 0,0019 gramos de clorato potásico. Bien practicada la determinación aproximada se pueden casi siempre reducir á 2 ó 3 los tubos tipos. Rápimente, y sin interrupción, se añade á todos los tubos 20 c. c. del reactivo A (el reactivo B daría soluciones finales demasiado pálidas al diluir), de modo que recojan todas las gotitas de solución acuosa de las paredes y que se mezclen homogéneamente y pronto, el reactivo y las soluciones respectivas. Se deja todo veinticinco ó treinta minutos, sin preocuparse de algunos copos que tal vez aparezcan, y entonces se adiciona agua á todos los tubos, también rápidamente, hasta la marca de 100 c. c., se mezcla bien el contenido de cada tubo y se comparan las coloraciones, en la forma usual, que resultan de intensidades, con aquella escala, muy cómodas de observar.

Analizada una pólvora parda cloratada por este procedi-

miento, ha dado en diferentes ensayos los siguientes números, que son suficientemente concordantes:

Clorato potásico en 100 de pólvora.

Colorimetría por diluciones sucesivas.	Colorimetría por escala de tipos.
9,16	9,05
8,92	9,08
9,06	9,20
	9,08

Para confirmar el procedimiento, añadí á un peso conocido la pólvora (0,68775 gr.) clorato potásico, también medido (0,02 gr.) Así resulta una pólvora con 11,65 de clorato por 100, si es cierto que la primitiva tiene 9,1 por 100 (media de los cuatro ensayos hechos con escala de tipos). Practicada la colorimetría, dió: por diluciones sucesivas 12,15 por 100, y con escala 11,65 — 11,76 — 11,54 — 11;82 por 100, que son valores suficientemente exactos.

Determinado el clorato de la misma pólvora, por reducción con polvo de cinc y determinación del cloroión resultante, he obtenido: 11,53 — 11,65 — 11,29 — 11,16 por 100, números que no son más concordantes que los obtenidos colorimétricamente.

Los componentes de un explosivo, insolubles en el agua, claro está que no estorban la colorimetría del clorato, pues se separan por filtración. He demostrado experimentalmente que el azúcar tampoco estorba. También, prácticamente, he visto que el ferrocianuro potásico, en proporción igual á la de clorato, tampoco estorba: en doble proporción que la de éste, modifica un poco el matiz de la coloración, pero todavía se puede comparar, con despreciable error: mayor proporción perjudica seguramente, pero no se presenta este caso en la práctica. El ácido picrico, se decolora por la misma

acidez intensa del reactivo, pero reaparece, coloreando el líquido, al diluir con agua hasta 100 c. c.: en consecuencia, modifica el matiz y tiende á originar números algo cortos para el clorato. Así, una mezcla de clorato con igual peso de ácido picrico ha dado para aquél 0,00185 gr. en lugar de 0,00200 gr. Se evita el error diluyuendo, en este caso particular, con una mezcla previa de 4 vol. de ácido clorhídrico de 1, 12 y un vol. de agua, en lugar de agua pura que he propuesto para el caso general.

LI. — Vatímetros integradores.

POR JOSÉ RUIZ-CASTIZO.

I. — Principios fundamentales.

Consideremos una bobina cilíndrica B de arrollamiento uniforme, teóricamente indefinida, recorrida por una corriente eléctrica; sabemos que en su interior se produce un campo magnético uniforme paralelo al eje de la bobina. Imaginemos que en este campo se sitúa otra bobina b giratoria alrededor de un eje perpendicular al suyo polar y á la dirección de dicho campo, por la cual circule otra corriente; sabemos también que la acción del campo sobre este sistema móvil equivale á un par, que tiende á situar el eje polar de b en la dirección del campo, y que es proporcional á ii' sen α, donde i é i' son las intensidades de las corrientes y α el ángulo formado por ambas direcciones.

Pues bien: si una de estas corrientes es la principal, cuyo trabajo queremos medir, de intensidad I, y la otra es una derivada que salva el circuito de trabajo, como la intensidad

de esta última es proporcional al potencial E con que entra la misma I, llamando Π un par resistente y γ una constante dependiente de los elementos de las bobinas, se tiene,

$$\Pi = \gamma E I \operatorname{sen} \alpha \qquad (1)$$

para ecuación de equilibrio del sistema móvil, en la cual es bien sabido que se fundan varios tipos de vatímetros electrodinamómetros.

Integración A.—Sobre un plano apoya una ruedecilla cilíndrica de pestaña redondeada, cuyo eje de rotación es paralelo al plano, montada sobre una armadura giratoria alrededor de un eje perpendicular al plano; si al punto del plano en que se verifica el contacto se le da una velocidad constante, v, paralela al plano, el movimiento relativo de la rueda será una rodadura y un deslizamiento simultáneos, determinándose así una rotación de la rueda alrededor de su eje, expresada por la ecuación

$$r d\omega = v \operatorname{sen} \beta \, dt, \qquad (2)$$

donde r es el radio, β el ángulo que el eje forma con v, y $d\omega$ el ángulo elemental que ha descrito en su giro. Esta propiedad se utiliza, como es sabido, en varios integradores, entre otros, en el de Amsler.

Para aplicarla á nuestro objeto, supongamos que el par antagonista Π tiene, por la disposición dada al vatímetro, el valor

$$\Pi = P \operatorname{sen} 2\alpha = 2P \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha; \qquad (P, \text{const.})$$

si establecemos que los ángulos α y β sean complementarios, la (2) dará

$$\cos \alpha = \frac{r}{v} \frac{d\omega}{dt},$$

y la (1) se convertirá en

$$\frac{2Pr}{v}\,\frac{d\omega}{dt}=\gamma EI;$$

poniendo, pues, $\frac{v\gamma}{2Pr}=K$, se tendrá,

$$d\omega=KEIdt,$$

é integrando, aparece

$$\omega-\omega_0=K\int_{to}^{t}EIdt=K(W-W_0), \qquad (3)$$

resultando que el ángulo descrito por la rueda en tal supuesto, durante el tiempo finito $t-t_0$, es proporcional al trabajo $W-W_0$ efectuado por la corriente en ese tiempo.

Integración B.—Sobre un plano apoya una ruedecilla cilíndrica de borde afilado y duro (capaz de penetrar ligeramente en el plano), cuyo eje es paralelo al plano, montada sobre una armadura que, además de ser giratoria alrededor de un eje perpendicular al mismo, puede tomar libremente una traslación v paralela al mismo también; al darse al punto del plano en que el contacto se verifica otra velocidad v' paralela al plano y perpendicular á v, la reacción de rozamiento que sobre el filo se producirá, dará origen, para que se haga posible la rodadura relativa *sin deslizamiento*, á que la armadura emprenda la traslación v, cuya velocidad será

$$v=nv'\,\text{tg.}\,\beta, \qquad (4)$$

donde β es el ángulo formado por el plano de la rueda con la dirección de v. En esta combinación está fundado el integrador que di á conocer el año 1897, con la sola diferen-

cía de que allí se utiliza la velocidad de rotación de la rueda, que está dada por la relación

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{h}{\cos\beta}, \qquad \text{(h, const.)}$$

para integrar la línea descrita por su borde en la rodadura relativa, mientras que aquí es la velocidad v la utilizable, como vamos á ver.

Para ello, en la ecuación (1) de equilibrio del vatímetro, demos al par antagonista el valor

$$\Pi = P\cos\alpha \qquad \text{(P, const.)}$$

y dispongamos las cosas de modo que α y β sean complementarios; la (4) dará

$$\text{tg.}\,\alpha = \frac{nv'}{v}; \qquad (5)$$

y como la (1) se convierte en

$$P = \gamma EI\,\text{tg.}\,\alpha,$$

poniendo $vdt = dl$, y $\frac{\gamma nv'}{P} = K$, queda

$$dl = KEIdt,$$

de donde

$$l - l_0 = K\int_{to}^{t} EIdt = K(W - W_0), \qquad (6)$$

resultando que el corrimiento en un tiempo finito es proporcional al trabajo efectuado por la corriente en el mismo tiempo.

II.—Primera aplicación: modelo A.

Las figuras 1, 2, 3 de la lámina I muestran cumplidamente la constitución de un aparato que aplica la integración *A:* como se comprende á la simple inspección, representan sus tres proyecciones, en que aparecen indicados los órganos todos, tanto fundamentales como accesorios, en sus principales detalles y relaciones.

La bobina fija *B* es horizontal; el árbol giratorio *AA*, portador del sistema móvil con las bobinas pequeñas *b*, *b*, vertical. La suspensión de este árbol está proyectada por el sistema de apoyarlo inferiormente sobre una esferilla de acero alojada en una cavidad cilíndrica de una cápsula *K* de hierro (con mercurio, como después se dirá), y de guiarlo en el extremo superior por una púa cónica abrazada por un tornillo-centro regulable. De este modo se aunan la indispensable fijeza del árbol con la gran movilidad exigida por la precisión.

El par resistente Π se obtiene por medio de un engranaje cónico con razón de 1 á 2 y un sistema de dos contrapesos: uno fijo, *P*, y otro ajustable, π, destinado á la regulación. Se ve que al desviarse el árbol un ángulo α de su posición normal ó de cero representada en el dibujo, la acción de estos contrapesos introduce un par proporcional á sen 2α, según establecimos en la teoría precedente.

Por debajo de la suspensión, merced al travesaño *H* y á dos varillas laterales *que pueden deslizar* en las resbaladeras cilíndricas *gg*, aparece en prolongación del árbol la armadura *U* que lleva la rueda integradora *V*. Esta rueda, de acero endurecido, descansa (á favor de su peso y el de la armadura, en virtud de dicho deslizamiento, garantizándose así una presión uniforme conveniente) sobre un disco *D* de cristal deslustrado, sujeto á una rueda horizontal giratoria alrededor de un eje vertical, la cual rueda es condu-

cida en rotación uniforme por un mecanismo de relojería *M*, mediante un engranaje cónico detalladamente representado.

El contacto de la rueda *V* con el disco se efectúa en un punto excéntrico de éste, y, como es debido, en la recta de suspensión del árbol. En la posición de cero del vatímetro, el plano de *V* pasa por el eje de la rotación del disco; y así, siendo entonces dicho plano normal á la dirección en que los sucesivos elementos del disco pasan bajo la rueda, ésta no girará absolutamente mientras tal posición se mantenga. Pero cuando una desviación α del vatímetro obligue á la rueda á formar ese mismo ángulo con el radio del disco dirigido al punto de contacto, se ve, sin entrar en explicaciones detalladas, que se verifican las relaciones supuestas en la teoría precedente, y que, en consecuencia, la rotación de la rueda será proporcional al trabajo de la corriente; de donde un sencillo contador de vueltas, indicado en la figura, permitirá leer los números que midan el trabajo.

Para la toma de la corriente que debe circular por las bobinas móviles, se han elegido los contactos de mercurio, efectuados en las dos cápsulas K y K_1. Para comprender bien esta disposición, bastará observar que la pieza r_1 de ebonita aisla entre sí las dos secciones *m* y *n* del árbol, y que las r_{i1} y r_{i2}, así como el disco de vidrio *D*, aislan estas dos secciones respecto de todo el aparato.

La cápsula superior K_1 tiene además la función de amortiguador de las oscilaciones, mediante la resistencia que ofrecerá el líquido al movimiento en su masa de una corona de laminillas que lleva la lengüeta por donde entra la corriente. Para acentuar este efecto, la cápsula tiene interiormente aristas vivas longitudinales (v. la *Sec. 3)*.

Como detalles accesorios del aparato, importa también notar:

1.° Un índice *L* que, marcando sobre un arco graduado *N* las desviaciones vatimétricas, permite utilizar el aparato como

indicador actual del producto *EI*, y, en todo caso, establecer su regulación.

2.° Un *mecanismo de economía* que, actuado alternativamente por un resorte y un electroimán *T* recorrido por la corrriente principal, ahorra desgastes inútiles y pérdida de corriente: *a)*, frenando el volante de la relojería cuando no circule corriente, á favor de la palanca *ff*, y la lengüeta *h; b)*, interrumpiendo la corriente derivada en el tubo basculante *q*, donde hay una gota de mercurio que, al caer sobre dos alambres de platino que atraviesan el tapón de ebonita, establece el contacto y cierra el circuíto.

3.° Otro interruptor de previsión (fig. 4), dependiente del mecanismo de relojería, que cortará el circuíto principal cuando este mecanismo carezca de cuerda. A tal efecto, la uña del trinquete va montada en la palanca $\gamma\beta$, oscilante entre dos topes α, α, y actuada por la presión de la uña y un resorte antagonista; mientras domine aquella presión, la pieza δ sostiene el contacto entre las dos láminas λ, λ y la corriente circula; cuando faltare la cuerda, dominará el resorte, y, desprendido el contacto, quedará interrumpido el circuíto. De este modo queda previsto el caso de olvido ó negligencia en que el integrador no pudiere funcionar por estar sin cuerda el reloj; y

4.° Dos cubiertas, *C* y C_1, destinadas á taponar á voluntad las cápsulas de mercurio, y al mismo tiempo á frenar el árbol del vatímetro cuando haya que transportar el aparato.

III. — Segunda aplicación: modelo B H.

Para aplicar la integración *B* se ha proyectado el modelo que en sus tres proyecciones (figuras 1, 2, 3) representa fundamentalmente la lámina 2.ª

La disposición de la bobina fija es la misma que antes; pero el árbol del sistema móvil no se proyecta ahora vertical, sino

horizontal. Para la suspensión se propone un sistema mixto de balanza y púas, de modo que, descansando fundamentalmente el peso del sistema móvil por los dos cuchillos *A*, *A* sobre los soportes *s*, *s*, que llevan planos duros como los de una balanza, las púas alojadas en dos cavidades cónicas sostenidas por dos láminas elásticas R, R_1, ajustables á tornillo, contribuyen á dar al eje de giro la fijeza indispensable. La figura 7.ª representa una sección longitudinal del árbol por su eje teórico.

El par resistente lo introduce el contrapeso *P*, situado excéntricamente en el sistema móvil; y se ve en seguida que, para una desviación angular α, el par es proporcional á sen α, conforme exige la teoría anteriormente expuesta.

El sistema integrador está constituído por un cilindro de cobre *I*, que puede girar libremente alrededor de su eje de revolución montado en una armadura *U* capaz de moverse en unas correderas paralelas á dicho eje, cuya dirección es para nuestro caso actual la de la velocidad v' señalada en la teoría. Esta velocidad es comunicada, *con signos alternativamente opuestos, para lograr la continuidad del movimiento,* por medio de una doble cremallera *CC*, conducida por un piñón mitad dentado que recibe movimiento rotatorio del mecanismo de relojería *M*.

El árbol del vatímetro lleva en su prolongación una armadura con la rueda integradora *G*, cuyo borde, afilado y duro, apoya con presión suave (regulada por la diferencia entre las tensiones de las dos láminas R, R_1) sobre la superficie del cilindro, y que está montada de manera que su plano, en la posición de cero del vatímetro, pase por el eje del cilindro, hallándose el punto de contacto en el eje teórico del árbol. Resulta así: 1.°, que en esa posición de cero el movimiento longitudinal del cilindro obliga á la rueda á efectuar una rodadura relativa sobre una generatriz, y el cilindro, no hallándose solicitado por acción alguna oblicua á su eje, no gira absolutamente nada; 2.°, que cuando al pasar una co-

rriente se origine una desviación α, formando entonces el plano de la rueda con el eje del cilindro precisamente este ángulo α, las reacciones originadas en el punto de contacto entre la rueda y el cilindro determinarán el movimiento giratorio de éste en su armadura, de modo tal, que la línea descrita en su superficie por el borde de la rueda, en su rodadura relativa, será (supuesto α constante) una hélice de inclinación $\frac{\pi}{2} - \alpha$, para lo cual será necesario que el cilindro gire con velocidad proporcional á tg α. La velocidad lineal v que su superficie tome por esta rotación, es, por tanto, la que hicimos entrar en la ecuación (5); y así, un contador de vueltas aplicado al cilindro medirá el trabajo efectuado por la corriente que circule por el vatímetro. Cuando los elementos de ésta varíen, variando α según la ley establecida en la teoría, la rotación del cilindro efectuaría de una manera rigorosa la integración representada por la ecuación (6).

Hemos sentado, y se comprende, que la continuidad del funcionamiento del aparato exige que el movimiento longitudinal del cilindro sea alternativo; pero también se ve sin esfuerzo que, si la rotación del cilindro ha de continuar efectuando la integración en el mismo sentido, se hace necesario que cada cambio de signo de la velocidad v' coincida con un cambio de signo también del ángulo α. Esto se logra fácilmente invirtiendo una de las corrientes (la derivada es, naturalmente, la preferible), al cambiar de sentido el movimiento del cilindro. Para ello, esta corriente se hace pasar por un conmutador actuado por la misma relojería.

Entre las múltiples disposiciones elegibles para este conmutador, se representa una que reune la sencillez á la precisión. El mismo eje del piñón conductor de la doble cremallera C lleva una leva r en espiral de Arquímedes (véanse también figuras 4.ª, 5.ª y 6.ª), sobre cuyo perfil apoyan dos varillas f y f_1 en puntos diametralmente opuestos, para que, actuadas por resortes, escapen alternativamente y hagan

bascular el soporte *E* de modo que dos gotas de mercurio encerradas en los tubos *t*, *t* caigan á uno ú otro lado, estableciendo contactos entre los alambres que atraviesan los tapones y produciendo la consiguiente conmutación, que fácilmente se colige de los enlaces representados en la figura.

Este modelo permite, además, una importante adición no representada. Si suponemos el cilindro *I* revestido de un papel convenientemente cuadriculado y adicionamos una pluma fija en contacto con este papel, el aparato dará un gráfico exacto de la distribución del trabajo efectuado en el tiempo del funcionamiento.

Hasta aquí lo esencial de este modelo. Algunos otros detalles pueden verse representados en las secciones 1 á 6. Uno de ellos, el único de que haremos mención explicativa, es el relativo á la toma de corriente para las bobinas móviles; está proyectada con contactos de mercurio en las cubetas *K*, *K*, á favor de dos discos *d*, *d*, recortados radialmente para que sirvan de amortiguadores (*), y conducida por los dos cilindros metálicos envolventes *g*, *g*, convenientemente aislados.

Los demás mecanismos accesorios indicados en el modelo *A*, son perfectamente aplicables á este otro: no deberemos insistir en ellos.

IV.—3.ª Aplicación: modelo B. V.

La lámina 3 representa (prescindiendo ya de detalles superfluos) una tercera combinación en que se aplica la misma integración *B*, pero con suspensión vertical.

Como puede observarse, la disposición general es la misma del modelo *A*, estribando las únicas diferencias en el sis-

---

(*) Esta disposición puede motivar alguna importante objeción; pero es sustituíble por otras que ya tenemos estudiadas. No nos detendremos en estos detalles.

tema integrador, que se ve es reproducción exacta del que acabamos de describir para el *B. H.*, y en el par resistente que, debiendo ser proporcional al seno, exige otra combinación.

Desde luego se reconoce la posibilidad de aplicar un contrapeso que actúe mediante un engranaje cónico con razón de 1 á 1, como se representa en la figura accesoria. Pero es más sencillo y ventajoso el empleo de los dos resortes r, r, paralelos en la posición de cero al eje del vatímetro, insertos en dos puntos del travesaño fijo H, y en otros dos del H_1 solidario con el árbol.

Esta disposición es asimilable á la conocida suspensión bifilar, cuya resistencia se sabe es proporcional al seno de la desviación; pero no será ocioso demostrar que el cálculo directo conduce también á esa proporcionalidad. Sean l la longitud del resorte y T su tensión elástica en la posición de cero; según las leyes de la elasticidad de los resortes helicoidales, si llamamos i el alargamiento y T' la tensión cuando se haya producido una desviación α, se tendrá

$$\frac{T'}{T} = \frac{l+i}{l} \qquad (7)$$

Pero en tal posición, la intensidad del par resistente está dada por el momento de T' respecto del eje; llamando a la distancia de los puntos de inserción al eje, y aplicando fórmulas bien conocidas, hallamos para expresión de dicho momento

$$a \operatorname{sen} \alpha \times T' \frac{a(1-\cos\alpha)}{l+i} - a \cos\alpha \times \left(-T' \frac{a \operatorname{sen} \alpha}{l+i}\right)$$

$$= \frac{a^2 T'}{l+i} \operatorname{sen} \alpha = \frac{T a^2}{l} \operatorname{sen} \alpha;$$

y como T, a, l son magnitudes constantes, queda evidenciada la proporcionalidad á sen α.

Claro está que, dada la fijeza del eje, bastaría un sólo resorte; pero la simetría y la conveniencia de disminuir los rozamientos, aconsejan el empleo de dos, que desde luego se ve no necesitan ser idénticos, ni tampoco estar rigorosamente á iguales distancias del eje, bastando que ambos le sean paralelos, y que su elasticidad sea perfectamente ajustada á la ley (7) dentro de límites suficientemente amplios para asegurar el juego del aparato. Para la regulación del par, se puede apelar á alguna de las disposiciones indicadas en las figuras 4, 5 y 6, mediante las cuales se pueden alterar *a*, *T* ó *l*. No creemos necesario detenernos en la explicación y discusión de estos detalles.

V.—Observaciones prácticas.

Sin pretensiones de autocrítica (casi siempre impertinente), y sin entrar en detalles impropios de este artículo, entendemos oportuno añadir algunas importantes observaciones, demostrativas de que nuestro estudio es completo y no se ha limitado á las relaciones teóricas fundamentales.

La uniformidad del campo. — Según la conocida fórmula

$$H = 4\pi I\left(1 - \frac{\omega + \omega'}{4\pi}\right),$$

para poder tomar como uniforme el campo interior de la bobina, habría de ser despreciable la razón $\frac{\omega + \omega'}{4\pi}$, y para ello habría que dar al cilindro una razón $\frac{d}{l}$ sumamente pequeña. Pero como d no puede menos de ser suficiente á permitir el alojamiento de la bobina móvil en el interior de la fija, y como es evidente que un gran valor de l, además de hacer inmanejable el aparato, originaría grandes pérdidas de energía por la resistencia introducida, creemos ha-

ber resuelto la dificultad eligiendo dimensiones tales que la razón $\frac{\omega + \omega'}{4\pi}$ no varíe en más de 0,01, para toda la región central del campo donde ha de sufrir acción la bobina móvil.

Para asegurarnos todo lo posible, hemos hecho numerosas experiencias de verificación, que nos han convencido de que, con las dimensiones adoptadas, el campo central es efectivamente uniforme en la práctica. Entre ellas, citaremos sólo su exploración en dicha región central, haciendo oscilar una pequeña aguja magnética (18 mm. de longitud por 0,4 mm. de grueso) y comprobando que el número de oscilaciones (que llegaron en algunas experiencias á 300 por minuto) no alcanzó mayor variación de 1 por 200.

Creemos suficientes estas indicaciones para afirmar que la ecuación (1) se verificará muy aproximadamente, y desechar todo temor de que el aparato sea erróneo por esta causa.

Paso del eje.—Mayor perturbación puede introducir en la uniformidad del campo la alteración que hay que hacer en el arrollamiento de la bobina fija para dar paso al eje. A fin de resolver sobre este extremo, dada la gran dificultad de confiarlo al cálculo teórico, hemos verificado también numerosos experimentos, de cuya explicación prescindimos aquí, por medio de los cuales nos hemos asegurado de que, con las dimensiones elegidas, *un vacío de vueltas en 5 mm. de la región central, debilita ligeramente el campo, pero sin perturbar sensiblemente la uniformidad.* Por lo demás, existen sistemas de arrollamiento que contrarrestan casi en absoluto esta causa de perturbación: no nos detendremos á exponerlos ni discutirlos.

Distribución de las corrientes.—La conveniencia de dar á Π la mayor intensidad posible es evidente; para ello, sabemos que es necesario aumentar el valor de γ.

Esta constante depende, para un mismo tipo de aparatos, del número de vueltas de las dos bobinas y de la intensidad

de la corriente derivada. Tomemos como tipo un vatímetro cuya capacidad sea de 10 amperios, destinado á una red cuyo potencial normal alcance 120 voltios, y supongamos que adoptamos como límite máximo de la corriente derivada $i = 0{,}02$ amperios; los cálculos conducen á la importante conclusión de que el mayor valor de γ compatible con una escasa resistencia del circuito principal, se logra haciendo circular la corriente derivada por la bobina *B*, que tendría en estos supuestos 3.000 m. de alambre de cobre de 0,1 mm. de grueso, en 20 capas con 12.600 vueltas, lo que daría una intensidad del campo correspondiente á 12 amperios-vueltas. El circuito principal recorrería, derivándose en dos ramas, las dos bobinas móviles *b*, *b*, con 16 m. de hilo de 1,4 mm., lo que introduciría una resistencia parásita enteramente despreciable, sin calentamientos sensibles. Una corriente de $I = 0{,}1$ amperio que circulase por este aparato, daría origen á un par $\Pi = 0{,}5$ *gramos-centímetros;* intensidad suficiente para garantizar un buen funcionamiento.

Análogamente se pueden combinar otras varias disposiciones.

La integración.—De la gran exactitud con que los dos sistemas integradores pueden funcionar, responden cumplidamente los numerosos planímetros de precisión que los aplican, y de los cuales nada tenemos que decir aquí. Sólo, pues, nos corresponde discutir (y ello ligeramente) la influencia que en el funcionamiento del sistema vatimétrico puede tener el sistema integrador.

Desde luego surge el temor de que el acoplamiento de los órganos integradores al eje del vatímetro, aumentando el peso del sistema móvil y produciendo reacciones normales á su eje, llegue á disminuir la sensibilidad y hacer el aparato excesivamente erróneo. En realidad, sobre este extremo, sólo podrá fallar en definitiva la experiencia, una vez que los aparatos se construyan con toda la delicadeza, la precisión, ligereza y movilidad de que hoy son capaces las artes mecá-

nicas; sin embargo, algo favorable puede adelantar el estudio teórico.

Tomemos como objeto de una ligera discusión el modelo *B. H.:* observando que el cilindro *I* tiene un radio de 29 *mm*, consideremos la desviación de 30°, que corresponde á 600 vatios-hora. Por cálculos muy sencillos, fáciles de comprobar mediante experimentos más sencillos aún, llegamos á reconocer que un cilindro horizontal de 200 gr. de peso (máximo asignable al que nos ocupa), bien centrado y montado con gran movilidad, se pone en rotación por un par inferior á 0,3 *gr.-cm*, lo que corresponde en nuestro caso á una fuerza de 0,1 *gr.* aplicada tangencialmente á la superficie. De donde resulta que la rotación del cilindro ha de producir sobre el eje del vatímetro una acción normal valuable en

$$\frac{0,1}{\cos 30^\circ}\ gr. = 0,116\ gr.,$$

aplicada al punto de contacto; como se ve, insignificante. Para 60°, desviación muy superior al límite práctico, sólo alcanza á 0,2 *gr.*; y admitiendo que no debamos extremar tanto las suposiciones favorables, ni aun quintuplicando este valor pasamos de 1 *gr.* de reacción perjudicial.

Análogas consideraciones aplicadas al modelo *A*, así como al estudio de la influencia del peso de los órganos integradores, ó de la del rozamiento originado por los contactos de las ruedas, pueden convencernos de que en ninguno de los modelos son de temer por estas causas errores de cuantía superiores, ni acaso iguales, á los que otras, análogas y distintas, introducen en otros sistemas de integradores.

La relojería.—Sobre la función del mecanismo de relojería, nos limitaremos á observar que no envuelve dificultad alguna. Siendo la velocidad del disco, en el modelo *A*, de $\frac{\pi}{6}$ por hora, y la lineal v' del cilindro, de 18 mm. por

hora, se ve que la potencia suplementaria que el resorte motor ha de añadir á la necesaria para el funcionamiento normal de la relojería, es sumamente pequeña. Apenas alcanza á 100 *gr.-cm* por hora; y así, bastará con un resorte capaz de prestar durante su distensión, que supondremos de 200 horas, un trabajo suplementario de 0,200 *kgm.*

La capacidad.—Terminaremos observando que por este concepto estos aparatos ofrecen gran elasticidad, ya que es práctico *shuntarlos* y alterar la significación de las unidades del contador.

Los modelos *B* tienen además la facultad de admitir una gran sobrecarga transitoria, sin que el funcionamiento sufra perturbación.

La capacidad de los proyectos representados es de 10 amperios; el cálculo está hecho para que una vuelta del tambor represente 10 kilovatios-hora. En cuanto á la precisión de las lecturas, es casi ocioso observar que los tambores admiten nonios (no representados) capaces de apreciar cómodamente hasta 0,0005 de vuelta, ó sea 5 vatios hora.

PUBLICACIONES RECIBIDAS

(Continuación.)

Joly, M. A. D. Sc. F. R S. F. G. S. (John) and William Francis (F. L. S.)—The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Sixth series.—No. 85. January, 1908.—London.

Lewis, Sec. R. A. S. (T). H. P. Hollis, B. A., F. R. A. S.—The Observatory, A. Monthly Review of Astronomy —London.

Laisant (C. A.) etc.—Nouvelles Annales de Mathématiques.—Quatrième série.—Tome VII.—Novembre, Décembre, 1907.—Paris, 1907.

Royal Institution of Great Britain.—Proceedings of the...—London-December, 1907.

Société Entomologique a Stockholm. - Entomologisk Tidskrift.—Utgifven of Entomologiska Föreningen i Stockholm.—Journal Entomologique publié par la...—Arg. 28-1907.—Haft 1-4.—Upsala, 1907.

Ciel et Terre.—Revue populaire d'Astromie, de Météorologie et de Physique du globe.—28 année.—N.° 20.—(16 Décembre 1907).—N.° 21.—(1 Janvier 1908).—N.° 22.—(16 Janvier 1908).—Bruxelles.

Laisant (C. A) etc.—L'Intermédiaire des Mathématiciens —Tomo XIV, 1907. N.° 12, Décembre, 1907.—Paris, 1907.

Bibliothéque Universelle.—Archives des Sciences Physiques et Naturelles.—Quatrième période.—Tome XXIV. N.° 12.—15 Decembre, 1907.—Genève, 1907.

Ferreira da Silva (A. J.) etc.—Revista de Chimica Pura e Applicada. 3.° Anno. N.° 12. 15 de Dezembro de 1907.—14.° anno. N.° 1. 15 de Janeiro de 1908.—Porto.

Institut International de Bibliographie.—Bulletin de L'... Année, 1907.—Fasc. 5.—Bruxelles.

Mouchez (E.) et Tisserand (F).—Bulletin Astronomique.—Tome XXV.—Janvier, 1908.—Paris, 1908.

Collegio de S. Fiel.—Broteria.—Revista de Sciencias Naturaes do... Volume VI.—1907. Fasc. VI.—Idem 1 parte.—Serie Zoologica. Vol. VII. 1908. Fasc. I.—S. Fiel. 1907-1908.

Royal Geographical Society.—The Geographical Journal. Vol. XXXI. No. 1. January, 1908.—London.

Societá Cattolica Italiana per Gli Studi Scientifici. Rivista di Fisica, Matematica e Scienze Naturali.—Anno 8, Diciembre 1907. Núm. 96.—Pisa Pavia.

Société Scientifique de Bruxelles.—Revue des Questions Scientifiques Publié por la. . Troisième série.—Tome XIII.—20 Janvier, 1908.—Louvain, 1908.

Bibl othéque de l'Ecole des Hautes Etudes.—Bulletin des Sciences Mathématiques. Deuxième série. - Tome XXXI.—Novembre, Décembre, 1907. París, 1907.

American Museum of Natural History (The).—The American Museum Journal.—Vol. VIII, Núm. 1 January, 1908.—Vol. VIII, Núm. 8. December, 1907. - New York City.

Biblioteca Nacionale Centrale di Firenze.—Bolletino delle Pubblicazioni Italiane, 1907. Núm. 84, Dicembre.—Firenze.

Museum of Comparative Zoology at Harvard College.—Bulletin of the... Vol. XLVIII. No. 4.—Cambridge, Mass., U. S. A.

Agassiz, Ll. D. (Alexander). —An address at the opening of the Geologicoal Section of the Harvard University Museum. By... Director-June, 12, 1902. Cambridge, 1902.

James (William).—Louis Agassiz.—Words spoken by Professor... at the reception of the American Society of Naturalists by the President and Fellows of Harvard College at Cambridge on December 30, 1896.—Cambridge, 1897.

Museum of Comparative Zoology.—Annual Report of the Curator of the... to the President and fellows of Harvard College for 1906-1907.--Cambridge, U. S. A.—1908.

Bureau Français du Catalogue International.—Bibliographie Scientifique Française —Tome V. 1er Section, núm. 5 - París, 1907.

Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, Copenhague.—Bulletin de l'...—1907.—No. 3 4.—Kenhavn, 1907.

Buffalo Society of Natural Sciences.—Bulletin of the . —Volume V.—No. 5 —Buffalo, New-York, 1907.

Cabreira (Antonio).—Noticia succinta da sua vida e obras.- Pelo Prof...—Lisboa, 1907.

American Philosophical Society —Proceedings of the... held at Philadelphia for promoting useful kuowledge. -Vol. XLVI.—January March, 1907.—No. 185 —Philadelphia, 1907.

(Continuará.)

LII.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimaquinta.

SEÑORES:

Imaginemos un sistema de puntos materiales; no decimos si están ó no enlazados entre sí por fuerzas interiores, ni si están sometidos á fuerzas exteriores, como en todos los problemas precedentes.

Por el pronto, para nosotros, no se trata más que de *un sistema geométrico*, de un sistema de puntos á pequeñísimas distancias unos de otros.

Sean x, y, z las coordenadas de uno de ellos. Considerémoslas como variables independientes, que fijan, que definen, por decirlo así, cada uno de los puntos en cuestión.

El sistema está referido á tres ejes trirrectangulares paralelamente á los que se cuentan las coordenadas x, y, z.

Supongamos que dicho sistema experimenta *una deformación infinitamente pequeña*; es decir, que cada punto se separa de su posición inicial y viene á parar á una posición muy próxima á la que tenía.

El punto a habrá ido á parar á a'; el punto b á la posición b', y así sucesivamente.

Las distancias $a\,a'$, $b\,b'$....., suponemos que son muy pequeñas y representarán, por decirlo de este modo, los desplazamientos de los puntos dados.

Comparando las posiciones a', b'..... con las a, b..... decimos que el sistema ha sufrido una deformación; pero no te-

nemos en cuenta por el momento, ni las causas de la deformación, ni las reacciones interiores que se desarrollan; no tratamos, como antes se indicó, de un sólido elástico, sino de un *sistema geométrico.*

Es un problema geométrico el que estamos definiendo; así es que no hablamos, ni de fuerzas exteriores, ni de reacciones, ni de velocidades, ni de la deformación elástica, ni de la energía acumulada en el sistema, ni de ninguno de los conceptos de la dinámica, ni siquiera de la cinemática, porque no se tiene en cuenta el tiempo.

Se trata tan sólo de deformaciones geométricas.

Hemos prescindido, ó hemos separado, por lo menos por el pronto, el problema de elasticidad, que nos ha ocupado durante este curso.

Es una abstracción de geometría pura, que es la que ha servido de base á obras modernas muy interesantes, de las cuales ya en las conferencias de este año nada podemos decir, pero aprovechamos la ocasión para anunciarlas: quizá las estudiaremos en otro curso.

***

La distancia $a\,a'$ tendrá tres componentes, que designaremos, como hemos hecho, en el problema de la elasticidad, por u, v, w, y serán las variaciones de x, y, z; en cierto modo las coordenadas de a', tomando a por origen y trazando por este punto tres paralelas á los ejes coordenados-trirectangulares.

Pero aunque el problema sea puramente geométrico, para que podamos definirlo y establecer enlaces entre los datos y deducir consecuencias analíticas ó geométricas, debemos definir las magnitudes u, v, w.

Cada punto tiene su desplazamiento, luego las u, v, w serán funciones de x, y, z; por ejemplo:

$$u = f_1(x, y, z)$$
$$v = f_2(x, y, z)$$
$$w = f_3(x, y, z).$$

Estas funciones suponemos que son contínuas, y que *tienen derivadas* con relación á cualquiera de las variables independientes.

Definen la deformación, porque suponemos que para cada sistema de valores x, y, z, las u, v, w quedan perfectamente determinadas.

Si se tratara de un problema de elasticidad, ó sea de un cuerpo sólido sujeto á fuerzas exteriores é interiores, las ecuaciones precedentes serían las que resultasen de resolver el problema elástico; pero, en nuestro caso, ya lo hemos dicho, no se trata, por el pronto, del problema de la elasticidad; así es que las ecuaciones anteriores son, en cierto modo, *datos del problema*: se dan los puntos a, a_1, a_2..... se dan sus desplazamientos aa', $a_1 a'_1$.....; se da, en suma, la ley de estos desplazamientos en función de x, y, z. Y una observación más para terminar estos preliminares. Hemos supuesto los puntos a, a_1, a_2..... distribuídos de una manera discontinua; en rigor, podrían constituir un sistema continuo de puntos geométricos.

***

Estos son los términos generales del problema: tal como lo planteamos, no parece que puedan deducirse consecuencias muy importantes para las aplicaciones prácticas; y, sin embargo, no es así.

El estudio de las deformaciones de los sistemas, desde el punto de vista puramente geométrico, ofrece sumo interés aun para la misma teoría de la Elasticidad.

Como la cinemática, ó estudio de los movimientos con independencia de las causas, como antes se decía, es una preparación importantísima para la Mecánica, el estudio de las deformaciones, prescindiendo de las fuerzas y del tiempo, es un precedente de suma importancia para la cinemática y para la Mecánica; y lo que el problema va perdiendo en contenido real, lo va ganando, en cierto modo, en rigor matemático.

Así es, que en la esfera geométrica pura, pueden estudiarse las deformaciones bajo forma abstracta, sin perjuicio de interpretar más tarde sus resultados analíticos y geométricos como expresión de algo más concreto, quiero decir, de algo más real. Pero ciñámonos á la cuestión, que nos habíamos propuesto estudiar en esta conferencia, que era, como anunciamos en la precedente, la relativa á los cuerpos isótropos; y antes, el de las funciones isótropas; y más particular y exclusivamente el de los polinomios isótropos de primero y segundo grado. Para ello, volvamos al sistema geométrico antes definido.

Consideremos un paralelepípedo trirrectangular, ó, si se quiere, un cubo situado en lo interior del sistema.

Este cubo contendrá un número inmenso de puntos a, a_1, a_2.....: unos estarán en el interior, otros constituirán la superficie del cubo que consideramos.

Por la deformación, todos los puntos habrán variado de sitio, y el conjunto de puntos a', a'_1, a'_2..... formarán otro sólido, que será la deformación del primero, es decir, del primer paralelepípedo.

Como la ley de deformación es continua, podemos considerar al sólido que contiene los puntos a', a'_1, a'_2..... como un paralelepípedo; pero esto nos importa poco por el momento.

Si V representa el volumen del sólido inicial y V' el volu-

men deformado, es decir, el del nuevo paralelepípedo, es claro que $V' - V$ representará la variación de volumen, y $\frac{V' - V}{V}$ la dilatación por unidad de volumen, que es lo que se llama, y lo que hemos llamado en los cursos anteriores, *dilatación cúbica.*

Representándola por θ, ya demostramos que

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

La demostración era sumamente sencilla: la repetiremos para facilidad del lector, empleando, para abreviar, las notaciones que hemos empleado siempre:

$$\frac{du}{dx} = a_1, \quad \frac{dv}{dy} = a_2, \quad \frac{dw}{dz} = a_3.$$

Así, pues, a_1, a_2, a_3 representan las dilataciones lineales por unidad de longitud.

Si consideramos un paralelepípedo trirrectángulo cuyas aristas sean dx, dy, dz, este paralelepípedo rectángulo se convertirá en un paralelepípedo oblicuo, que despreciando infinitamente pequeños de orden superior, podemos suponer que equivale á otro trirrectángulo, y que sus aristas son:

$$dx + a_1\,dx, \quad dy + a_2\,dy, \quad dz + a_3\,dz,$$

ó bien

$$(1 + a_1)\,dx, \quad (1 + a_2)\,dy, \quad (1 + a_3)\,dz,$$

y su volumen será

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= (1 \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_1a_2a_3)dx\,dy\,dz.$$

Pero como las dilataciones lineales suponemos que son muy pequeñas, despreciando términos de orden superior tendremos para el volumen aproximado del paralelepípedo después de la deformación:

$$(1 + a_1 + a_2 + a_3)\, dx\, dy\, dz;$$

la dilatación será, pues:

$$(1+a_1+a_2+a_3)dxdydz - dxdydz = (a_1+a_2+a_3)dxdydz,$$

y su relación con el volumen primitivo $dx\, dy\, dz$,

$$\frac{(a_1 + a_2 + a_3)\, dx\, dy\, dz}{dx\, dy\, dz} = a_1 + a_2 + a_3,$$

ó bien

$$\theta = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

Dada la ley de las dilataciones, es decir, la expresión de u, v, w en función de x, y, z, estas tres derivadas podremos obtenerlas en función de las variables independientes x, y, z, y, por lo tanto, θ tendrá un valor determinado para cada punto, que es lo que se llamará la dilatación cúbica para dicho punto. θ será, pues, una función perfectamente determinada para cada punto del sistema.

Supongamos ahora que se escoge otro sistema de coordenadas: x', y', z'; como las cantidades u, v, w son paralelas á los ejes, para los nuevos deberemos darles nombres distintos u', v', w'.

En el primer sistema de ejes x, y, z, las u, v, w eran las proyecciones $a\, a'$ sobre dichos ejes.

En el nuevo sistema, la u', v', w' serán las proyecciones de la misma recta $a\, a'$ sobre los nuevos ejes x', y', z'.

Y es evidente que las fórmulas de transformación de x, y, z en x', y', z' serán las mismas que las de u, v, w en u', v', w'.

***

Pues bien: si para un punto determinado buscamos la dilatación cúbica en el primer sistema de ejes coordenados, tendremos, según hemos visto:

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dx}.$$

Y si para el mismo punto expresamos esta misma cantidad, es decir, la dilatación cúbica en función de las nuevas coordenadas, como el procedimiento es idéntico en la forma y en el fondo al anterior y la dilatación cúbica es invariable para cada punto, obtendremos:

$$\theta = \frac{du'}{dx'} + \frac{dv'}{dy'} + \frac{dw'}{dz'}.$$

El primer miembro será idéntico numéricamente al de la ecuación anterior, porque, como acabamos de explicar, la dilatación cúbica es una magnitud independiente del sistema de ejes.

Pero además observamos, y esto es lo más importante, que esta magnitud determinada para cada punto se expresa de la misma manera en todo sistema de ejes trirrectangulares.

Se expresaba en x, y, z por

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz};$$

se expresará en x', y', z' por

$$\frac{du'}{dx'} + \frac{dv'}{dy'} + \frac{dw'}{dz'}.$$

Ni el valor ni la forma han variado.

Y esto se expresa por una palabra: diciendo que el polinomio lineal

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$$

es *isótropo*, es decir, independiente del sistema de ejes trirrectangulares que se escoja.

Es invariable su valor, que siempre es θ; es invariable su forma.

Esta es una propiedad importantísima de la deformación de todo sistema, que cumple con las condiciones de continuidad que hemos explicado.

Veremos en breve que hay muchas más funciones isótropas: por ejemplo, que hay polinomios de segundo grado de las nueve derivadas características de toda deformación, á saber:

$$\begin{matrix} \frac{du}{dx}, & \frac{du}{dy}, & \frac{du}{dz}, \\ \frac{dv}{dx}, & \frac{dv}{dy}, & \frac{dv}{dz}, \\ \frac{dw}{dx}, & \frac{dw}{dy}, & \frac{dw}{dz}, \end{matrix}$$

que son también isótropos; es decir, que un cambio de coordenadas trirrectangulares deja invariables su valor y su forma.

Por ahora insistamos en el polinomio lineal de primer grado $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$.

Hemos demostrado, que es isótropo, de una manera inmediata, sin cálculo de ninguna clase, con sólo observar que representa el valor de una magnitud determinada, que va unida, por decirlo así, á cada punto, y que, además, y esto es importante, que el procedimiento para determinar la dilatación cúbica es siempre el mismo, sea cual fuere el sistema de ejes.

Hemos escogido un paralelepípedo: hubiéramos podido escoger otro sólido cualquiera, el mismo para el primer sistema de ejes que para el segundo; sólo que para el primero lo hubiéramos descompuesto en paralelepípidos de aristas dx, dy, dz, y para el segundo, en paralelepípedos cuyas aristas serían dx', dy', dz'.

En suma, y sin entrar en mayores pormenores, la demostración es rigurosa y es inmediata, es sencilla en extremo y casi de intuición.

Pero también hubiéramos podido seguir un procedimiento regular de cálculo; muy largo, muy enojoso, pero aplicable á todos los casos, lo mismo á los polinomios isótropos lineales, que á los de segundo orden, ó de un orden cualquiera, y aun á otra clase de funciones, en las cuales quisiéramos poner en evidencia la propiedad de si eran ó no isótropas.

En el fondo sólo se trata aquí del problema del cambio de variables, que se estudia en todos los libros de cálculo diferencial.

Como ejercicio elemental, vamos á aplicar este cambio de variables al expresado polinomio isótropo, que representa la dilatación cúbica en cualquier punto de un sistema.

***

A fin de abreviar la escritura, cuando tengamos que expresar, que tres variables son todas ellas, y cada una, funcio-

nes de otras tres variables, por ejemplo, u, v, w, funciones de x, y, z, en vez de escribir, como antes hacíamos,

$$u = f_1(x, y, z),$$
$$v = f_2(x, y, z),$$
$$w = f_3(x, y, z),$$

escribiremos sencillamente:

$$\begin{array}{c|c} u & x \\ v & y \\ w & z \end{array}$$

que también expresaran que x, y, z son funciones de u, v, w.

En este problema de cambio de variables tendremos los cuatro cuadros fundamentales:

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{(1)} \\ u & u' \\ v & v' \\ w & w' \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{(3)} \\ u & x \\ v & y \\ w & z \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{(2)} \\ x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{(4)} \\ u' & x' \\ v' & y' \\ w' & z'. \end{array}$$

El (3) expresa, como ya hemos explicado, que las deformaciones u, v, w en cada punto están definidas por las coordenadas de este punto: son las relaciones fundamentales de la deformación en el sistema de ejes coordenados x, y, z.

La (4) expresa esta misma ley de deformación; pero en el nuevo sistema de ejes, x' y' z'. La u' será función de x', y' z'; y lo mismo la v' y la w'.

En suma, (3) y (4) determinan las variaciones u, v, w, u', v', u' en el primitivo y en el nuevo sistema.

La (1) y la (2) son, á su vez, las fórmulas de transformación de las primitivas u, v, w, x, y, z en función de las nuevas.

Veamos ahora cómo se determinan los nueve coeficientes primitivos en función de los del nuevo sistema, es decir:

$$\frac{du}{dx} \ldots\ldots \text{ en función de } \frac{du'}{dx'} \ldots\ldots$$

Por el pronto, y para nuestro objeto, no necesitamos determinar más que tres,

$$\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dw}{dz} \text{ en función de } \frac{du'}{dx'}, \frac{dv'}{dy'}, \frac{dw'}{dz'}.$$

Esto, dado que sea posible, es decir, si la suma de los tres primeros constituye un polinomio lineal isótropo de los coeficientes característicos de la deformación; porque de no ser así, si entrasen otros coeficientes, y no desapareciesen al hacer la suma, el polinomio en cuestión no tendría la propiedad que deseamos poner en evidencia.

Empecemos por $\frac{du}{dx}$.

Para ello, diferenciemos con relación á x la primera ecuación del grupo (1) y, estaremos en el caso de diferenciar funciones de funciones.

u, según el cuadro (1), es función de u', v', w'. Cada una de éstas, según el cuadro (4), es función de x', y', z'; y estas tres últimas, según el cuadro (2), son funciones de x, que es la variable independiente de la diferenciación. La y y la z son constantes; por eso decimos, que la x', y', z' sólo son funciones de x para esta diferenciación especial.

Tendremos, pues:

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{du'}\left(\frac{du'}{dx'}\frac{dx'}{dx}+\frac{du'}{dy'}\frac{dy'}{dx}+\frac{du'}{dz'}\frac{dz'}{dx}\right)+$$
$$+\frac{du}{dv'}\left(\frac{dv'}{dx'}\frac{dx'}{dx}+\frac{dv'}{dy'}\frac{dy'}{dx}+\frac{dv'}{dz'}\frac{dz'}{dx}\right)+$$
$$+\frac{du}{dw'}\left(\frac{dw'}{dx'}\frac{dx'}{dx}+\frac{dw'}{dy'}\frac{dy'}{dx}+\frac{dw'}{dz'}\frac{dz'}{dx}\right).$$

Pasemos ahora á obtener $\frac{dv}{dy}$.

Tendremos que diferenciar el cuadro (1) con relación á y, y para ello diferenciaremos v, según indica dicho cuadro, con relación á u', v', w'. Cada una de éstas, según el cuadro (4), con relación á x', y', z' y estas últimas según el cuadro (2) solo con relación á y, porque en este caso las x y las z son constantes.

Resultará, pues,

$$\frac{dv}{dy}=\frac{dv}{du'}\left(\frac{du'}{dx'}\frac{dx'}{dy}+\frac{du'}{dy'}\frac{dy'}{dy}+\frac{du'}{dz'}\frac{dz'}{dy}\right)+$$
$$+\frac{dv}{dv'}\left(\frac{dv'}{dx'}\frac{dx'}{dy}+\frac{dv'}{dy'}\frac{dy'}{dy}+\frac{dv'}{dz'}\frac{dz'}{dy}\right)+$$
$$+\frac{dv}{dw'}\left(\frac{dw'}{dx'}\frac{dx'}{dy}+\frac{dw'}{dy'}\frac{dy'}{dy}+\frac{dw'}{dz'}\frac{dz'}{dy}\right).$$

Por último debemos obtener $\frac{dw}{dz}$ y para ello, diferenciaremos en el cuadro (1), w con relación á u' v' w'. Cada una de estas, según el cuadro (4), con relación á x', y', z'; y estas últimas, según el cuadro (2), con relación á z, que es la variable con respecto á la cual ahora se diferencia: así,

$$\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{du'}\left(\frac{du'}{dx'}\frac{dx'}{dz}+\frac{du'}{dy'}\frac{dy'}{dz}+\frac{du'}{dz'}\frac{dz'}{dz}\right)+$$
$$+\frac{dw}{dv'}\left(\frac{dv'}{dx'}\frac{dx'}{dz}+\frac{dv'}{dy'}\frac{dy'}{dz}+\frac{dv'}{dz'}\frac{dz'}{dz}\right)+$$
$$+\frac{dw}{dw'}\left(\frac{dw'}{dx'}\frac{dx'}{dz}+\frac{dw'}{dy'}\frac{dy'}{dz}+\frac{dw'}{dz'}\frac{dz'}{dz}\right).$$

Las flechas que unen los cuadros indican el orden de las diferenciaciones.

Sumemos ahora las tres ecuaciones así obtenidas.

El primer miembro será:

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}.$$

Veamos si el segundo miembro se reduce á

$$\frac{du'}{dx'}+\frac{dv'}{dy'}+\frac{dw'}{dz'}.$$

En cuyo caso el polinomio lineal es isótropo; en el caso contrario no lo sería.

Reunamos en las tres fórmulas los términos con $\frac{du'}{dx'}$: serán éstos, sacando $\frac{du'}{dx'}$ por factor común:

$$\frac{du'}{dx'}\left(\frac{du}{du'}\cdot\frac{dx'}{dx}+\frac{dv}{du'}\cdot\frac{dx'}{dy}+\frac{dw}{du'}\cdot\frac{dx'}{dz}\right).$$

Y aquí debemos hacer una observación que simplifica estos cálculos.

Los cuadros (1) (2) expresan las fórmulas ordinarias de transformación de unos ejes á otros.

Por ejemplo, la primera fórmula del cuadro (1) será:

$$u = u' \cos(x', x) + v' \cos(y', x) + w \cos(z', x).$$

De suerte que en las diferenciaciones parciales, como son las que hemos hecho hasta aquí,

$$\frac{du}{du'} = \cos(x', x), \quad \frac{du}{dv'} = \cos(y', x), \quad \frac{du}{dw'} = \cos(z', x).$$

Es decir, que cada coeficiente diferencial es el coseno del ángulo de los ejes paralelos, por decirlo así, á las variables que el coeficiente diferencial contiene. Por ejemplo, $\frac{du}{du'}$ es el coseno del ángulo que forma el eje x paralelo á la u, con el eje x' paralelo á la u'. El coeficiente $\frac{du}{dv'}$ es el coseno del ángulo que forma el eje x paralelo á u, con el eje y' paralelo á v'. Y lo mismo podemos decir del tercer coeficiente diferencial.

Podemos repetir otro tanto para el cuadro (2).

La primera fórmula de dicho cuadro sería:

$$x = x' \cos(x', x) + y' \cos(y', x) + z' \cos(z', x),$$

y los coeficientes diferenciales

$$\frac{dx}{dx'} = \cos(x', x), \quad \frac{dx}{dy'} = \cos(y', x), \quad \frac{dx}{dz'} = \cos(z', x)$$

confirman la regla establecida.

Según esto, los términos que contienen $\frac{du'}{dx'}$, y que hemos visto que son

$$\frac{du'}{dx'}\left(\frac{du}{du'}\frac{dx'}{dx} + \frac{dv}{du'}\frac{dx'}{dy} + \frac{dw}{du'}\frac{dx'}{dz}\right)$$

se convertirán en

$$\frac{du'}{dx'}\,[\cos(x, x') \,.\, \cos(x, x') + \cos(x', y)\cos(x', y) + \\ + \cos(x', z) \,.\, \cos(x', z)]$$

ó bien

$$\frac{du'}{dx'}\left[\overline{\cos(x, x')}^2 + \overline{\cos(y, x')}^2 + \overline{\cos(z, x')}^2\right].$$

Es decir, que la cantidad entre paréntesis es la suma de los cuadrados de los cosenos de los ángulos que forma la recta x' con los tres ejes trirrectangulares x, y, z. Pero esta suma sabemos que es la unidad, y queda tan sólo

$$\frac{du'}{dx'}.$$

Reuniendo ahora los términos que contienen $\frac{dv'}{dy'}$, podremos, sin nuevas explicaciones, escribir las ecuaciones siguientes:

$$\frac{dv'}{dy'}\left[\frac{du}{dv'}\,\frac{dy'}{dx} + \frac{dv}{dv'}\,\frac{dy'}{dy} + \frac{dw}{dv'}\,\frac{dy'}{dz}\right],$$

ó bien

$$\frac{dv'}{dy'}\,[\cos(x, y')\cos(x, y') + \cos(y, y')\cos(y, y') + \\ + \cos(z, y')\cos(z, y')],$$

es decir

$$\frac{dv'}{dy'}\,(\cos^2(x, y') + \cos^2(y, y') + \cos^2(z, y')),$$

en que el coeficiente es la suma de los cuadrados de los ángulos que forma y' con los tres ejes x, y, z, suma que es

á igual la unidad: queda, pues, reducida la expresión anterior á

$$\frac{dv'}{dy'}.$$

Por último, reuniendo los tres términos que contienen $\frac{dw'}{dz'}$, tendremos sucesivamente

$$\frac{dw'}{dz'}\left(\frac{du}{dw'}\frac{dz'}{dx}+\frac{dv}{dw'}\frac{dz'}{dy}+\frac{aw}{dw'}\frac{dz'}{dz}\right),$$

$$\frac{aw'}{dz'}(\cos(x,z')\cos(x,z')+\cos(y,z')\cos(y,z')+$$

$$+\cos(z_1z')\cos(z_1z'),$$

$$\frac{dw'}{dz'}[\cos^2(x,z')+\cos^2(y,z')+\cos^2(z,z')],$$

$$\frac{dw'}{dv}.$$

Hemos obtenido hasta ahora para el segundo miembro

$$\frac{du'}{dx'}+\frac{dv'}{dy'}+\frac{dw'}{dz'},$$

que es precisamente de la misma forma que el primero.

Es indispensable que todos los demás términos se anulen.

Esto es, en efecto, lo que se verifica.

Haremos la comprobación para un grupo, y mis lectores podrán hacer la comprobación para los restantes.

Reunamos, por ejemplo, los términos que contienen $\frac{du'}{dy'}$. Tendremos

$$\frac{du'}{dy'}\left[\frac{du}{du'}\frac{dy'}{dx}+\frac{dv}{du'}\frac{dy'}{dy}+\frac{dw}{du'}\frac{dy'}{dz}\right],$$

ó bien

$$\frac{du'}{dy'}[\cos(x,x')\cos(x,y') + \cos(y,x')\cos(y_1 y) + \\ + \cos(z,x')\cos(z,y')].$$

La cantidad entre paréntesis representa la suma de los productos de los cosenos correspondientes á los ángulos que forman las dos rectas x', y', con los ejes x, y, z; que no es otra cosa que el coseno del ángulo que forman dichas dos rectas x', y'.

Ahora bien, como los nuevos ejes son trirrectangulares, las dos rectas x', y' forman un ángulo recto; luego su coseno es nulo; así, pues, todo el grupo anterior se reduce á cero.

Lo mismo demostraríamos para los términos restantes.

Queda, pues, comprobado directamente, sólo con aplicar el principio del cambio de variables, que el polinomio lineal

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$$

es isótropo, y queda invariable en magnitud y en forma para todo cambio de coordenadas de la especie que estamos considerando, ó sea de ejes trirrectangulares á ejes trirrectangulares.

Y en rigor, empleamos palabras supérfluas al decir que queda invariable en magnitud, porque esto es evidente: la transformación de coordenadas no cambia su valor numérico; siempre representará la dilatación cúbica.

Lo que importaba demostrar era que no cambiaba la forma, y ésta es precisamente la demostración que acabamos de exponer.

El método empleado es completamente general, pero es largo y molesto, y puede sustituirse por artificios especiales propios de cada caso.

En el ya estudiado del polinomio lineal, basta con esta consideración elemental y sencillísima, á saber: que la suma $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$ representa la dilatación cúbica; que ésta es constante para cada punto; y que en cada punto, sea cual fuere el sistema de coordenadas trirrectangulares, la forma analítica de dicha dilatación es la misma.

***

Pues para los polinomios isótropos de segundo grado, una consideración sumamente sencilla nos resuelve el problema, al menos en parte.

Antes de desarrollar los cálculos, demos la idea general, que este procedimiento me parece muy útil para la enseñanza, porque de otro modo va á ciegas el alumno, reconociendo que son exactas las transformaciones y los cálculos, pero sin saber por qué se hacen hasta no llegar al fin de ellos.

Y cuando llega al fin, reconoce que ha conseguido el objeto con encadenamiento irreprochable de verdades matemáticas, pero sin poder adivinar muchas veces cómo y por qué se le ocurrieron al autor.

Y acaso el alumno resulte un sabio; pero las facultades propias como descubridor de verdades, las iniciativas, la intuición se irán atrofiando cada vez más.

Perdóneseme esta pequeña digresión, y pasemos á la exposición del método en síntesis.

Imaginemos en el interior del sistema una esfera que contendrá un número inmenso de puntos, y, si se quiere, una masa continua.

La ley general de la deformación del sistema, expresada por las tres fórmulas de siempre, nos demuestra que cada punto de coordenadas x, y, z se transportará por la deformación á otro punto de coordenadas $x + u, y + v, z + w$.

La esfera deformada será un sólido de otra forma distinta de la esférica.

La superficie que la limita ya no será esférica; pero dada la pequeñez de las deformaciones, puede suponerse intuitivamente que es un elipsoide.

En el curso anterior demostramos que, en efecto, lo es con la aproximación que allí se explicaba; en el caso presente es una nueva hipótesis resultado de la intuición geométrica.

De todas maneras, esta transformación de la esfera en elipsoide se comprende que es independiente de los ejes que se elijan.

Cada punto a de la esfera va á otro punto determinado a', siempre el mismo, sea cual fuere el sistema de ejes; de igual manera que en el caso del polinomio lineal era independiente de dichos ejes la dilatación cúbica.

Pues el elipsoide es independiente de los ejes coordenados, los tres ejes de este elipsoide también serán independientes de aquéllos, y sus longitudes serán constantes; y aquí asalta la idea, que luego toma forma precisa, de que la ecuación de tercer grado que determine dichos ejes deberá tener coeficientes constantes y de la misma forma, con lo cual, intuitivamente, hemos resuelto el problema.

Ahora vamos á precisarlo. La intuición, guía; el cálculo, demuestra.

***

Sea $M\,M_1$ (fig. 44) la esfera que se considera, de radio infinitamente pequeño r.

Su centro M, por virtud de la deformación, se trasladará á M', y las coordenadas de M, á saber, x_1, y_1, z_1, habrán variado en las cantidades u, v, w, como siempre.

Mr. Poincaré, á fin de emplear un pequeño artificio, ó mejor dicho, un cambio de notación que simplifica los cálculos,

llama x, y, z á las tres coordenadas del punto M', en cuyo caso tendremos, evidentemente,

$$x_1 = x - u, \quad y_1 = y - v, \quad z_1 = z - w.$$

Otro punto cualquiera de la esfera, M_1 se habrá trasladado por la deformación á M'_1, y si representamos las variaciones de las coordenadas de M'_1 respecto á las de M' por

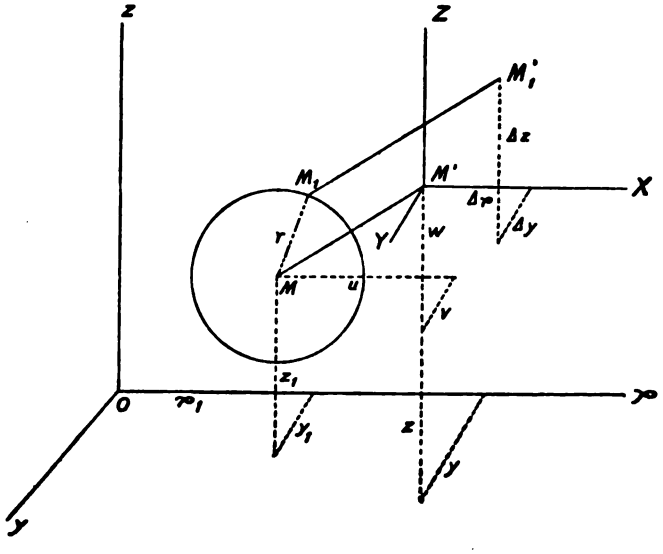


Figura 44.

$$\Delta x, \quad \Delta y, \quad \Delta z,$$

las coordenadas de M'_1 serán

$$x + \Delta x, \quad y + \Delta y, \quad z + \Delta z.$$

De aquí se deduce que las coordenadas de M_1 serán

$$x + \Delta x - (u + \Delta u), \; y + \Delta y \quad (v + \Delta v), \; z + \Delta z - (w + \Delta w).$$

porque, en efecto, las coordenadas de M se deducen restando de las de M' los desplazamientos u, v, w; luego las de M_1 se deducirán restando de las de M'_1 que son $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, los desplazamientos que corresponden á dicho punto M'_1, los cuales ya no son u, v, w, sino éstos más sus incrementos al pasar de M' á M'_1, es decir,

$$u + \Delta u, \quad v + \Delta v, \quad w + \Delta w.$$

Esto lo deduce Mr. Poincaré de un teorema muy sencillo que explica al principio de su *estudio cinemático de las deformaciones* en la obra de que vamos dando cuenta.

Se deduce de lo expuesto, que el radio de la esfera, ó si se quiere, según el lenguaje moderno, el vector $M\,M_1$ tendrá por proyecciones sobre los tres ejes, tomando las diferencias de las coordenadas de los puntos M_1 y M

$$\begin{aligned} &x + \Delta x - (u + \Delta u) - (x - u), \\ &y + \Delta y - (v + \Delta v) - (y - v), \\ &z + \Delta z - (w + \Delta w) - (z - w), \end{aligned}$$

ó bien

$$\begin{aligned} &\Delta x - \Delta u, \\ &\Delta y - \Delta v, \\ &\Delta z - \Delta w, \end{aligned}$$

luego el cuadrado del radio $M\,M_1$, que hemos llamado r, vendrá dado por la ecuación,

$$(\Delta x - \Delta u)^2 + (\Delta y - \Delta v)^2 + (\Delta z - \Delta w)^2 = r^2.$$

Obsérvese, antes de pasar adelante, que Mr. Poincaré sigue el método inverso del que seguimos en el curso anterior.

En aquel método pasábamos de la esfera al elipsoide; aquí pasamos del elipsoide, ó si no se quiere anticipar esta idea,

de los puntos de la superficie deformada $M'\ M'_1$ á la esfera por una especie de transformación inversa, utilizando este principio evidente, que hemos de venir á parar á la esfera primitiva y que el radio ha de ser constante.

Ahora bien, las variaciones de u, v, w al pasar de M' á M'_1 dependerán de las variaciones Δx, Δy, Δz de las coordenadas de ambos puntos, y suponiéndolas muy pequeñas, y no tomando más que los primeros términos del desarrollo, que es en rigor tomar las diferencias de u, v, w en las ecuaciones generales de la deformación

$$u = f_1 (x_1, y_1, z),$$
$$v = f_2 (x_1, y_1, z),$$
$$w = f_2 (x_1, y_1, z),$$

tendremos

$$\Delta u = \frac{du}{dx} \Delta x + \frac{du}{dy} \Delta y + \frac{du}{dz} \Delta z,$$
$$\Delta v = \frac{dv}{dx} \Delta x + \frac{dv}{dy} \Delta y + \frac{dv}{dz} \Delta x,$$
$$\Delta w = \frac{dw}{dx} \Delta x + \frac{dw}{dy} \Delta y + \frac{dw}{dz} \Delta x,$$

y sustituyendo en

$$(\Delta x - \Delta u)^2 + (\Delta y - \Delta v)^2 + (\Delta z - \Delta w)^2 = r^2$$

que antes obtuvimos, resultará

$$\left(\Delta x - \frac{du}{dx} \Delta x - \frac{du}{dy} \Delta y - \frac{du}{dz} \Delta z\right)^2$$
$$+ \left(\Delta y - \frac{dv}{dx} \Delta x - \frac{dv}{dy} \Delta y - \frac{dv}{dz} \Delta x\right)^2$$
$$+ \left(\Delta z - \frac{dw}{dx} \Delta x - \frac{dw}{dy} \Delta y - \frac{dw}{dz} \Delta z\right)^2 = r^2.,$$

ó bien

$$\left[\left(1-\frac{du}{dx}\right)\Delta x-\frac{du}{dy}\Delta y-\frac{du}{dz}\Delta z\right]^2$$
$$+\left[\left(1-\frac{dv}{dy}\right)\Delta y-\frac{dv}{dx}\Delta x-\frac{dv}{dz}\Delta z\right]^2$$
$$+\left[\left(1-\frac{dw}{dz}\right)\Delta z-\frac{dw}{dx}\Delta x-\frac{dw}{dy}\Delta y\right]^2=r^2.$$

Desarrollando ahora cada uno de los grupos del primer miembro, por ejemplo, el primero, tendremos

$$\left[1-2\frac{du}{dx}+\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]\Delta x^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2\Delta y^2+$$
$$+\left(\frac{du}{dz}\right)^2\Delta z^2-2\left(1-\frac{du}{dx}\right)\frac{du}{dy}\Delta x\,\Delta y-$$
$$-2\left(1-\frac{du}{dx}\right)\frac{du}{dz}\Delta x\,\Delta z+2\frac{du}{dy}\frac{du}{dz}\Delta y\,\Delta z.$$

En esta expresión despreciaremos los términos de cuarto orden, que serán los que contienen cuatro de estas cantidades

$$\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z,\ \frac{du}{dx},\ \frac{du}{dy},\ \frac{du}{dz};$$

porque Δx, Δy, Δz son cantidades sumamente pequeñas de primer orden, y las tres derivadas también lo son, en razón á que las deformaciones son infinitamente pequeñas, y, por lo tanto, du, dv, dw lo son respecto á dx, dy, dz.

La expresión anterior quedará, pues, reducida á la siguiente

$$\Delta x^2\left(1-2\frac{du}{dx}\right)-2\frac{du}{dy}\Delta x\,\Delta y-2\frac{du}{dz}\Delta x\,\Delta z.$$

Efectuando desarrollos y simplificaciones análogas á las precedentes, tendremos dos grupos de términos análogos á los anteriores:

$$\Delta y^2\left(1-2\frac{dv}{dy}\right)-2\frac{dv}{dz}\Delta y\,\Delta z-2\frac{dv}{dx}\Delta y\,\Delta x,$$

$$\Delta z^2\left(1-2\frac{dw}{dz}\right)-2\frac{dw}{dx}\Delta z\,\Delta x-2\frac{dw}{dy}\Delta z\,\Delta y;$$

y reuniendo estos tres grupos, la última ecuación se convierte en la que sigue

$$\Delta x^2\left(1-2\frac{du}{dx}\right)+\Delta y^2\left(1-2\frac{dv}{dy}\right)+\Delta z^2\left(1-2\frac{dw}{dz}\right)$$
$$-2\,\Delta y\,\Delta z\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)-2\,\Delta z\,\Delta x\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)-$$
$$-2\,\Delta x\,\Delta y\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)=r^2.$$

Expresión que, sustituyendo á los coeficientes diferenciales que expresan las dilataciones lineales y las traslaciones en las caras de un paralelepípido elemental, las notaciones a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, que hemos empleado en los cursos anteriores y en éste, es decir

$$\frac{dz}{dx}=a_1,\quad \frac{dv}{dy}=a_2,\quad \frac{dw}{dz}=a_3,$$

$$\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}=b_1,\quad \frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}=b_2,\quad \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}=b_3,$$

puede escribirse de este modo

$$\Delta x^2(1-2a_1)+\Delta y^2(1-2a_2)+\Delta z^2(1-2a_3)$$
$$-2\,\Delta y\,\Delta z\,b_1-2\,\Delta z\,\Delta x\,b_2-2\,\Delta x\,\Delta y\,b_3=r^2$$

ó también abreviadamente, empleando el signo Σ para letras y subíndices en orden natural

$$\Sigma \Delta x^2 (1 - 2a_1) - 2 \Sigma \Delta y \Delta z b_1 = r^2.$$

En esta expresión no entran más que a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, que son funciones de x, y, z, y, por lo tanto, *invariables para el punto que se considera*, que, según hemos explicado, será el M' de la figura 44, ó, como luego veremos, el centro del elipsoide transformado.

Las otras cantidades son Δx, Δy, Δz.

Si tomamos como origen de coordenadas en la superficie transformada el punto M', que corresponde en la transformación al centro M de la esfera, y por este punto hacemos pasar tres ejes X, Y, Z, paralelos á x, y, z, es evidente que tendremos

$$X = \Delta x, \quad Y = \Delta y, \quad Z = \Delta z,$$

de suerte que la última ecuación podremos escribirla de este modo:

$$(1 - 2a_1) X^2 + (1 - 2a_2) Y^2 + (1 - 2a_3) Z^2 - \\ - 2b_1 YZ - 2b_2 XZ - 2b_3 XY = r^2,$$

pero esta ecuación, siendo X, Y, Z las variables, es la ecuación de un elipsoide referido á su centro M', que es el nuevo origen de coordnnadas.

Y decimos *elipsoide*, y no otra superficie cualquiera de segundo grado, porque una superficie cerrada como la esfera por una tranformación infinitamente pequeña, ha de convertirse también en una superficie cerrada.

***

Sea cual fuere el sistema de ejes, la esfera siempre se convertirá en el mismo elipsoide, por las mismas transforma-

ciones analíticas; luego su ecuación será de la misma forma que la anterior, y los coeficientes se habrán transformado en coeficientes análogos: $a_1 = \frac{du}{dx}$ en $\frac{du'}{dx'}$; $a_1 = \frac{du}{dy}$ en $\frac{du'}{dy'}$, y así sucesivamente.

Si el elipsoide es siempre el mismo, sus ejes serán invariables y podremos establecer estas conclusiones: obtenemos,

Tres magnitudes constantes, sea cual fuere el sistema de coordenadas, *expresadas del mismo modo* en función de los coeficientes diferenciales a, b, en el primer sistema; a', b', en el segundo.

Tal es el artificio de que antes hablábamos, y que equivale al de la constancin de la dilatación lineal para el polinomio de primer grado.

Calculemos, pues, la longitud de los tres ejes.

La distancia del centro del elipsoide á un punto cualquiera del mismo, representándola por R, estará dada por la fórmula

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2;$$

y se trata de determinar los máximos y mínimos de R, ó de R^2, es decir, los valores de X, Y, Z del elipsoide, á los cuales corresponden estos máximos y estos mínimos y el valor de los mismos.

Este un problema elemental de analítica, y no hay más que aplicar la teoría de los máximos y mínimos.

Pero como nuestras conferencias son de carácter elemental, quiero facilitar su lectura, refrescando los recuerdos de mis lectores.

El método consiste en diferenciar la ecuación anterior, considerando á X, Y, Z como variables, y tendremos:

$$XdX + YdY + ZdZ = 0.$$

Pero las X, Y, Z no son independientes, porque el punto (X, Y, Z) está sobre el elipsoide, luego sus diferenciales han

de satisfacer á dicha ecuación del elipsoide, que según hemos visto era,

$$(1-2a_1)X^2+(1-2a_2)Y^2+(1-2a_3)Z^2-$$
$$-2b_1YZ-2b_2XZ-2b_3XY=r^2.$$

y diferenciándola resultará,

$$(1-2a_1)XdX+(1-2a_2)YdY+(1-2a_3)ZdZ$$
$$-b_1(YdZ+ZdY)-b_2(XdZ+ZdX)-b_3(XdY+YdX)=0.$$

Esta ecuación y la

$$XdX+YdY+ZdZ=0,$$

son las dos ecuaciones que deben quedar satisfechas para los valores de dX, dY, dZ.

Sabemos que el método de máximos y mínimos, empleando un procedimiento regular de cálculo, consiste en multiplicar la última ecuación por una constante arbitraria λ y en sumar el producto con la ecuación anterior, y tendremos, sacando las factores comunes dX, dY, dZ,

$$[(1-2a_1)X-b_2Z-b_3Y+\lambda X]dX$$
$$+[(1-2a_2)Y-b_1Z-b_3X+\lambda Y]dY$$
$$+[(1-2a_3)Z-b_1Y-b_2X+\lambda Z]dZ=0,$$

y como ya podemos considerar á dX, dY, dZ, como independientes, gracias á la intervención de la constante arbitraria, λ, obtendremos las tres ecuaciones de condición:

$$(1-2a_1+\lambda)X-b_2Z-b_3Y=0,$$
$$(1-2a_2+\lambda)Y-b_1Z-b_3X=0,$$
$$(1-2a_3+\lambda)Z-b_1Y-b_2X=0,$$

que en unión con la ecuación del elipsoide, nos determinará los valores de X, Y, Z, λ.

Tendremos, pues, cuatro ecuaciones para determinar las cuatro incógnitas X, Y, Z y λ.

Veamos la significación de esta constante, que en rigor no es arbitraria, sino que ha tener el valor necesario para reducir á cero uno de los coeficientes de la ecuación fundamental, en cuyo caso, como no quedarán más que las dos otras diferenciales, y éstas serán independientes, sus coeficientes podrán ser también igualados á cero.

De este modo hemos obtenido las tres ecuaciones anteriores; pero de este modo resulta que λ no es ya una constante arbitraria, sino una incógnita que determinar.

En resumen, tenemos las cuatro ecuaciones

$$(1 - 2a_1 + \lambda)X - b_2Z - b_3Y = 0$$
$$(1 - 2a_2 + \lambda)Y - b_1Z - b_3X = 0$$
$$(1 - 2a_3 + \lambda)Z - b_1Y - b_2X = 0$$
$$(1 - 2a_1)X^2 + (1 - 2a_2)Y^2 + (1 - 2a_3)Z^2 - \\ - 2b_1YZ - 2b_2XZ - 2b_3XY = r^2.$$

λ tiene una significación fácil de determinar. En efecto, multipliquemos la primera de las cuatro ecuaciones anteriores por X, la segunda por Y, la tercera por Z, y sumemos: resultará,

$$(1 - 2a_1 + \lambda)X^2 + (1 - 2a_2 + \lambda)Y^2 + (1 - 2a_3 + \lambda)Z^2 - \\ - 2b_1YZ - 2b_2XZ - 2b_3XY = 0,$$

y restando de la última, queda

$$-\lambda(X^2 + Y^2 + Z^2) = r^2 \quad \text{ó bien} \quad -\lambda = \frac{r^2}{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

Ahora bien, las X, Y, Z corresponden á los extremos de los ejes; si á uno de estos ejes lo representamos por e, re-

sulta, poniendo por X, Y, Z las coordenadas de la extremidad de e

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = e^2$$

y la ecuación se convierte en

$$-\lambda = \frac{r^2}{e^2}.$$

Lo que prueba, dicho sea entre paréntesis, que λ, tal como la hemos escogido, debe ser negativa; pero esto importa poco: si hubiéramos multiplicado por $-\lambda$ resultaría $\lambda = \frac{r^2}{e^2}$.

Lo que importa es que λ tendrá tres valores, uno correspondiente á cada eje.

Si representamos los valores positivos por λ_1, λ_2, λ_3, y por e_1, e_2, e_3 las magnitudes de los tres ejes, los tres valores de λ estarán enlazados con los tres ejes por estas ecuaciones:

$$\lambda_1 = \frac{r^2}{e_1^2}, \quad \lambda_2 = \frac{r^2}{e_2^2}, \quad \lambda_3 = \frac{r^2}{e_3^2};$$

de suerte, que lo que digamos de los ejes e, podemos decir de los valores de λ.

Si los ejes están expresados en función de a, b por polinomios isótropos, los tres valores de λ serán también tres funciones isótropas dadas por las ecuaciones anteriores.

Luego podemos ya prescindir de los ejes, y fijarnos en los valores de λ.

Para determinar la ecuación de que depende λ, no hay más que considerar las tres primeras ecuaciones del grupo fundamental

$$(1 - 2a_1 + \lambda) X - b_2 Z - b_3 Y = 0,$$
$$(1 - 2a_2 + \lambda) Y - b_1 Z - b_3 X = 0,$$
$$(1 - 2a_3 + \lambda) Z - b_1 Y - b_2 X = 0,$$

y para abreviar la escritura, en vez de la incógnita λ, consideraremos $1 + \lambda$, que llamaremos s.

Si λ es isótropa, s lo es también, y recíprocamente; y advertiremos al lector, por si estudia la Memoria de Mr. Poincaré, que dicha s no tiene la misma significación que en la obra de aquel autor, y que además hemos introducido una ligerísima modificación en el método.

Las tres ecuaciones anteriores, introduciendo s y ordenándolas de otro modo, se convierten en:

$$\begin{aligned} (s-2a_1)X - b_3 Y - b_2 Z &= 0, \\ -b_3 X + (s-2a_2) Y - b_1 Z &= 0, \\ -b_2 X - b_1 Y + (s-2a_3) Z &= 0. \end{aligned}$$

La ecuación final en s, que es la incógnita que hemos substituído á los ejes e y á λ, se obtiene fácilmente eliminando X, Y, Z entre las tres ecuaciones anteriores, resultando que será de toda evidencia la determinante

$$\begin{vmatrix} (s-2a_1) & -b_3 & -b_2 \\ -b_3 & (s-2a_2) & -b_1 \\ -b_2 & -b_1 & (s-2a_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Esta ecuación es la que nos da los valores de s; y los *coeficientes*, que son la suma y los productos dos á dos, y el producto $s_1 . s_2 . s_3$ deberán ser funciones isótropas de a y b, puesto que las tres raíces s_1, s_2, s_3 lo son.

Desarrollando, tendremos sucesivamente:

$$(s-2a_1) \begin{vmatrix} (s-2a_2) & -b_1 \\ -b_1 & (s-2a_3) \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} -b_3 & -b_1 \\ -b_2 & (s-2a_3) \end{vmatrix} -$$

$$-b_2 \begin{vmatrix} -b_3 & (s-2a_2) \\ -b_2 & -b_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(s-2a_1)\,[(s-2a_2)(s-2a_3)-b_1^2]+$$
$$+\,b_3[-b_3(s-2a_3)-b_1b_2]-b_2\,[b_1b_3+b_2(s-2a_2)]=0,$$
$$(s-2a_1)\,[s^2-2s(a_2+a_3)+4a_2a_3-b_1^2]+$$
$$+\,b_3(-b_3s+2a_3b_3-b_1b_2)-b_2(b_2s-2a_2b_2+b_1b_3)=0.$$

El primer término es, evidentemente,

$$s^3.$$

El segundo es

$$-2s^2(a_1+a_2+a_3).$$

El tercero

$$s\,[(4a_2a_3-b_1^2)+4(a_1a_2+a_1a_3)-b_3^2-b_2^2]$$

ó bien

$$s\,[(4a_1a_2-b_3^2)+(4a_1a_3-b_2^2)+(4a_2a_3-b_1^2)].$$

El último término se obtiene desde luego haciendo s igual á cero en la determinante, y queda esta otra determinante

$$-\begin{vmatrix} 2a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & 2a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & 2a_3 \end{vmatrix}.$$

De suerte que la ecuación de tercer grado que determina s, y al fin la longitud de cada eje, será:

$$s^3-2(a_1+a_2+a_3)s^2+[(4a_1a_2-b_3^2)]+(4a_1a_3-b_2^2)+$$
$$+(4a_2a_3-b_1^2)-\begin{vmatrix} 2a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & 2a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & 2a_3 \end{vmatrix}=0.$$

En la conferencia próxima continuaremos discutiéndola.

LIII. — Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimasexta.

SEÑORES:

Estudiando las simplificaciones y casos particulares que se presentan al aplicar las fórmulas generales de la elasticidad, que habíamos obtenido por el método de Mr. Poincaré, llegamos al caso en que el sólido elástico constituye un sistema isótropo; y al llegar á este punto abrimos algo así como un paréntesis en nuestras conferencias.

En ese paréntesis estamos todavía, y no podremos detenernos mucho en él, si como es mi propósito, y si como lo exige lo avanzado del tiempo, ésta ha de ser la última conferencia del presente curso.

Decía, que suspendiendo el problema de la elasticidad, entramos en otro terreno y en otra clase de problemas, que aunque con los primeros tienen íntimas relaciones, pueden constituir por sí solos un cuerpo de doctrina, comprendida en esta denominación general, que es la adoptada por Mr. Poincaré: *Cinemática de las deformaciones de un sistema.*

Prescindíamos, pues, del problema mecánico, y consideráb amos un sistema de puntos puramente geométrico, prescindiendo de las fuerzas exteriores, de las masas de los puntos, de las velocidades que pudieran adquirir y de los esfuerzos interiores que pudieran desarrollarse.

Y considerábamos tan sólo el carácter geométrico del sistema y la deformación por él experimentada, suponiendo

que cada punto, saliendo de su posición primitiva, y experimentando determinado desplazamiento, definido por sus tres componentes u, v, w, venía á ocupar una posición muy próxima á la que antes tenía.

Estudiábamos, pues, la deformación geométrica de un sistema geométrico, sin más datos ni condiciones que las siguientes:

Posiciones iniciales de los diferentes puntos del sistema, y expresiones analíticas de las tres variables u, v, w, en función de las variables independientes x, y, z, expresiones que designábamos de este modo:

$$u = f_1(x, y, z),$$
$$v = f_2(x, y, z),$$
$$w = f_3(x, y, z).$$

Las deformaciones, decíamos, estarán definidas por las nueve derivadas

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{du}{dz},$$
$$\frac{dv}{dx}, \quad \frac{dv}{dy}, \quad \frac{dv}{dz},$$
$$\frac{dw}{dx}, \quad \frac{dw}{dy}, \quad \frac{dw}{dz},$$

y planteábamos esta cuestión:

Existen funciones de estas nueve derivadas ó de algunas de ellas, que son independientes del sistema de ejes trirrectangulares á que se refiera el sistema.

Y concretando el caso, nos limitábamos á estudiar polinomios que gozasen de la propiedad indicada, y les dábamos el nombre de *polinomios isótropos* (ó isotropos).

Encontrábamos uno, gozando de la propiedad indicada, que era el polinomio de primer grado

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$$

en que θ representa la dilatación cúbica.

Es decir, que la dilatación cúbica es constante para cada punto, y que su forma, que es la del segundo miembro, es siempre la misma, sea cual fuera el sistema de ejes trirrectangulares que se escoja.

Claro es que sólo este polinomio de primer grado, ó este polinomio multiplicado por una constante, goza de la propiedad indicada, porque es evidente que los tres coeficientes diferenciales han de estar multiplicados en todo caso por la misma cantidad; si estuvieran multiplicados por cantidades distintas, sólo por cambiar los ejes unos en otros, se alteraría la forma de dicha expresión lineal.

Por ejemplo:

$$M_1 \frac{du}{dx} + M_2 \frac{dv}{dy} + M_3 \frac{dw}{dz}$$

cambiando las x, y, con lo cual el sistema sigue siendo trirrectangular, se convertiría en

$$M_1 \frac{dv}{dy} + M_2 \frac{du}{dx} + M_3 \frac{dw}{dz}$$

ó bien

$$M_2 \frac{du}{dx} + M_1 \frac{dv}{dy} + M_3 \frac{dw}{dz}$$

que es una forma distinta de la primitiva.

Pasamos después á los polinomios de segundo grado, para ver si existen entre ellos también polinomios isótropos, y dijimos que puede seguirse un método general, ó que pue-

den seguirse también métodos particulares mucho más breves.

Escogiendo entre estos últimos la transformación de una esfera primitiva en elipsoide, llegamos á una ecuación de tercer grado, con una cierta incógnita s que era igual á $1 - \lambda$; siendo λ igual, á su vez, á una relación $- \frac{r^2}{e^2}$.

r era el radio de la esfera primitiva, y e podía ser uno cualquiera de los tres ejes del elipsoide.

Estos tres ejes eran independientes, respecto á su magnitud, porque son constantes, y podemos agregar que en la forma analítica que los expresase, del sistema de ejes trirrectangulares que se escogiera.

Luego los tres valores de s serán á su vez evidentemente isótropos.

Ahora bien; los coeficientes de la ecuación de tercer grado, que determinan los tres valores de s, son funciones de estos tres valores, según se sabe por la teoría general de ecuaciones: ó la suma de los tres valores de s con signo contrario, ó la suma de los productos dos á dos con el mismo signo, ó el producto de dichas tres raíces con signo contrario también.

Por lo tanto, si las tres raíces de s son isótropas, es decir, no cambian de forma analítica por un cambio de coordenadas trirrectangulares, y lo mismo se expresan en función de las nueve derivadas $\frac{du}{dx}$..... que de las nueve derivadas $\frac{du'}{dx'}$..... es evidente que de la misma propiedad gozarán los coeficientes de la ecuación de tercer grado en s.

A este punto habíamos llegado en la conferencia anterior.

***

Dicha ecuación era ésta:

$$s^3 - 2(a_1 + a_2 + a_3)s^2 + [(4a_1a_2 - b_3)] + (4a_1a_3 - b_2^2) + \\ + (4a_2a_3 - b_1^2) - \begin{vmatrix} 2a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & 2a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & 2a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Representando por A_1, A_2, A_3 los valores numéricos de los coeficientes, es decir, haciendo:

$$A_1 = 2(a_1 + a_2 + a_3),$$
$$A_2 = (4a_1a_2 - b_3^2) + (4a_1a_3 - b_2^2) + (4a_2a_3 - b_1^2),$$
$$A_3 = \begin{vmatrix} 2a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & 2a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & 2a_3 \end{vmatrix},$$

podemos decir que estas tres expresiones serán isótropas; es decir, que sea cual fuere el sistema de ejes, los primeros miembros tendrán el mismo valor numérico, y los segundos la misma forma en función de las derivadas de la deformación, ó sea de las a, b, con independencia del sistema de ejes trirrectangulares que se escoja.

O de otro modo: que los segundos miembros representarán tres polinomios isótropos de primero, segundo y tercer grado respectivamente.

El primero representa la dilatación lineal multiplicada por 2, y ya lo habíamos encontrado en la conferencia precedente. Aquí encontramos otra demostración.

El segundo, es de segundo grado, y es uno de los que íbamos buscando.

Podemos, pues, decir, que:

$$(4a_1a_2 - b_3^2) + (4a_1a_3 - b_2^2) + (4a_2a_3 - b_1^2), \quad (2)$$

ó abreviadamente

$$\Sigma\,(4\,a_2\,a_3 - b_1^2),$$

ó si se quiere

$$\Sigma\left[4\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dw}{dz}-\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)^2\right], \qquad (2)$$

es un polinomio isótropo de segundo grado.

En cuanto al tercero, también será isótropo; pero no nos interesa, puesto que sólo los de segundo grado queremos determinar.

***

Otro polinomio ísótropo de segundo grado, podemos escribir desde luego.

Y en efecto, si $a_1 + a_2 + a_3$, ó bien $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$ lo es, su cuadrado también lo será, puesto que conservando su forma la expresión lineal, conservará también su forma el cuadrado de la misma; quiero decir, que si para dos sistemas x, y, z; x', y', z' se tiene

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=\frac{du'}{dx'}+\frac{dv'}{dy'}+\frac{dw'}{dz'},$$

también se tendrá

$$\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)^2=\left(\frac{du'}{dx'}+\frac{dv'}{dy'}+\frac{dw'}{dz'}\right)^2 \quad (1)$$

Pero desarrollado el primer miembro, resulta:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{dv}{dy}\right)^2+\left(\frac{dw}{dz}\right)^2+2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}+$$
$$+2\frac{du}{dx}\frac{dw}{dz}+2\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dz}. \qquad (1)$$

Tenemos, pues, otro polinomio isótropo de segundo grado.

Existe aún otro polinomio isótropo, de segundo grado todavía, que vamos á determinar, no por el procedimiento general, que daría lugar á cálculos muy largos, sino por un procedimiento artificial, pero rápido; así como determinamos el polinomio de primer grado por la consideración de la dilatación cúbica, ó como hemos obtenido el de segundo grado (2) por la consideración de la deformación de una esfera en elipsoide.

En efecto, vamos á determinar otro tercer polinomio isótropo de segundo grado, convirtiendo el *sistema geométrico* deformable en un *sistema mecánico*, superponiendo, á los puntos geométricos masas y convirtiendo u, v, w en velocidades.

Es un método artificioso, pero ingeniosísimo, y digamos de paso, que en la Física-matemática pudieran citarse otros muchos ejemplos, que demuestran las relaciones íntimas que existen entre teorías al parecer distintas.

***

Sea M (fig. 45) un punto del sistema geométrico, y tracemos alrededor de M, como centro, una esfera, e, que supondremos infinitamente pequeña.

Sea M' otro punto del interior de la esfera.

Si el punto M ha sufrido un desplazamiento, cuyas componentes sean u, v, w, el punto M' experimentará un desplazamiento, distinto del desplazamiento del punto M, y las componentes de M' podremos representarlas por

$$u + \delta u, \quad v + \delta v, \quad w + \delta w,$$

en que δu, δv, δw expresarán lo que han variado estas componentes al pasar del punto M al punto M'; y si las diferencias de las coordenadas de M y M' las representamos

por $\delta x, \delta y, \delta z$, podemos decir que $\delta u, \delta v, \delta w$ son las variaciones que experimentan u, v y w cuando las x, y, z del punto M aumentan en $\delta x, \delta y, \delta z$.

Para todos los puntos de la esfera podemos repetir lo que hemos dicho para M'.

Si considerando M como origen, trazamos por este punto

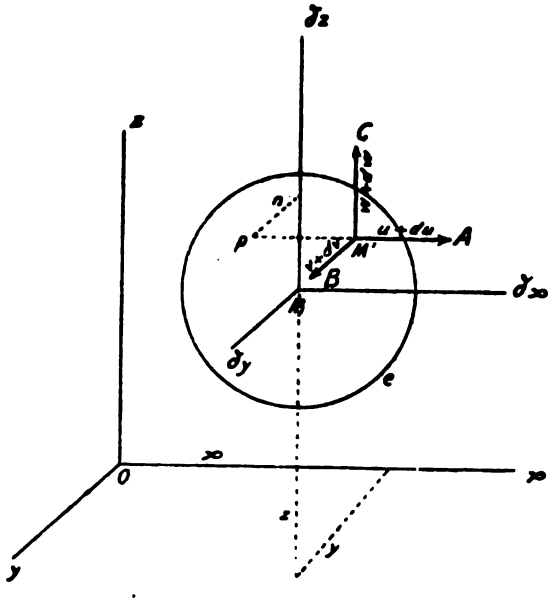


Figura 45.

tres rectas paralelas á los ejes x, y, z, todo punto del interior de la esfera, como M', y referida á estos nuevos ejes $M\delta x$, $M\delta y$, $M\delta z$, tendrá por coordenadas

$$M'p = \delta x, \quad pn = \delta y, \quad Mn = \delta z.$$

Hasta ahora la esfera, con todos sus puntos interiores, es una figura puramente geométrica, y á cada punto M' van unidas tres rectas paralelas á los ejes y de magnitudes determinadas:

$$M'A = u + \delta u, \quad M'B = v + \delta v, \quad M'C = w + \delta w,$$

que son las componentes del desplazamiento que, según la ley general de tales desplazamientos, corresponderían á dicho punto.

Y ahora vamos á convertir este sistema puramente geométrico en un sistema mecánico.

Las tres componentes $u + \delta u$, $v + \delta v$, $w + \delta w$, que hasta ahora representaban rectas, vamos á suponer que representan componentes de una velocidad; componentes de velocidad que tengan el mismo valor numérico que las componentes del desplazamiento como rectas, y otro tanto para todos los puntos interiores de la esfera.

Bastaría para ello dividir todas las magnitudes lineales $u + \delta u$, $v + \delta v$, $w + \delta w$ por un mismo espacio de tiempo que podemos coger por unidad, con lo cual dichas rectas se transformarán en velocidades.

Además, en cada punto como M', podemos suponer colocada una masa μ de tal suerte que e resulte una esfera de masa homogénea, lo cual siempre es posible, porque, ó bien la esfera, siendo muy pequeña, tiene en su interior una distribución uniforme de puntos, ó bien se aumentan convenientemente las masas donde los puntos estén más espaciados, para restablecer la uniformidad.

Y de este modo tendremos una esfera de masa homogénea y en que todos los puntos están solicitados por velocidades que tienen las mismas direcciones, el mismo valor numérico y, por lo tanto, las mismas componentes que los primitivos desplazamientos que representaban la deformación.

Fijémonos, pues, en este sistema mecánico, y olvidemos por breves momentos el problema cinemático que considerábamos.

Para cada punto como el M' tendremos una cantidad de movimiento, y hasta podríamos decir una fuerza, cuyos componentes serán:

$$\mu\,(u + \delta u), \quad \mu\,(v + \delta v), \quad \mu\,(w + \delta w).$$

Sabemos por Mecánica que estas cantidades de movimiento tienen un *momento* determinado con relación á un eje determinado también.

Si las considerásemos como fuerzas, diríamos que con relación al punto M tienen un par, cuyo eje está determinado en dirección y en magnitud, y que este eje del par es absolutamente independiente del sistema de ejes coordenados que se considere.

Este eje es el que vamos á fijar.

Sabemos por Mecánica racional, que para ello basta obtener los momentos de las cantidades de movimiento con relación á los tres ejes que pasan por por M, á saber:

$$M\delta x,\ M\delta y,\ M\delta z.$$

Los tres momentos, en rigor, son los tres pares componentes del par total resultante.

Determinemos, pues, estos tres pares componentes, ó, si se quiere, estos tres momentos de las cantidades de movimiento.

Empecemos por el eje $M\delta z$, y lo que de él digamos, podríamos repetir para los demás.

La cantidad de movimiento $\mu \,.\, M'A$, ó bien $\mu\,(u + \delta u)$ (figura 45), tiene por brazo de palanca pn, que, como antes dijimos, es δy; luego dicho momento será

$$\mu\,(u + \delta u)\,.\,\delta y,$$

y tenderá á hacer girar el sistema alrededor del eje de las z en el sentido que generalmente se escoge como positivo.

Del mismo modo la cantidad de movimiento

$$\mu \,.\, M'B = \mu\,(v + \delta v)$$

tendrá por brazo de palanca una cantidad igual á $M'p$, que hemos llamado δx.

De suerte que el momento de esta componente, que tiende á hacer girar el sistema en sentido contrario al anterior, será

$$-\mu(v+\delta v).\delta x.$$

Y como el momento de la cantidad de movimiento correspondiente á $M'C$ es nulo porque esta línea es paralela al eje de las z, para el punto M' el momento total de la cantidad de movimiento propia del punto M' con relación al eje de las z, será

$$\mu[\delta y(u+\delta u)-\delta x(v+\delta v)]$$

y para toda la esfera no habrá más que sumar cantidades análogas correspondientes á todos los puntos de la misma. Así

$$\int\mu[\delta y(u+\delta u)-\delta x(v+\delta v)]$$

representará el momento total de todas las cantidades de movimiento con relación al eje de las z; ó, si se quiere, la componente del par resultante con relación á dicho eje.

Pero no olvidemos que δu, δv, δw son las variaciones de u, v, w al pasar de M á M', es decir, por virtud de los incrementos δx, δy, δz; luego tendremos evidentemente, escribiendo diferenciales totales,

$$\delta u=\frac{du}{dx}\delta x+\frac{du}{dy}\delta y+\frac{du}{dz}\delta z,$$

$$\delta v=\frac{dv}{dx}\delta x+\frac{dv}{dy}\delta y+\frac{dv}{dz}\delta z.$$

No escribimos el valor de δu porque no entra en la fórmula anterior.

Sustituyendo en ella los valores de δu, δv, tendremos

$$\int \mu \left[\delta y \left(u + \frac{du}{dx} \delta x + \frac{du}{dy} \delta y + \frac{du}{dz} \delta z \right) - \right.$$
$$\left. - \delta x \left(v + \frac{dv}{dx} \delta x + \frac{dv}{dy} \delta y + \frac{dv}{dz} \delta z \right) \right].$$

Consideremos el primer grupo, que se descompondrá de este modo

$$u \int \mu \delta y + \frac{du}{dx} \int \mu \delta y \delta x + \frac{du}{dy} \int \mu \delta y^2 + \frac{du}{dz} \int \mu \delta y \delta z.$$

El primer término $u \int \mu \delta y$ es evidentemente nulo, porque M es el centro de gravedad de la esfera, y se reduce á cero el coeficiente $\int \mu \delta y$, porque el centro de gravedad coincide con el origen de coordenadas.

$\int \mu \delta x \delta y$ y $\int \mu \delta y \delta z$ son también iguales á cero puesto que los ejes paralelos á z y á x, que pasan por el punto M, son ejes principales de inercia de dicho punto.

Por último, $\int \mu \delta y^2$ es el momento de inercia de la esfera con relación á uno de sus diámetros, dividido por 2. Representándolo por I, el grupo que estamos considerando queda reducido á

$$\frac{du}{dy} \frac{I}{2}.$$

Como lo mismo podemos decir del segundo grupo

$$- \int \mu \delta x \left(v + \frac{dv}{dx} \delta x + \frac{dv}{dy} \delta y + \frac{dv}{dz} \delta z \right) =$$
$$= - v \int \mu \delta x - \frac{dv}{dx} \int \mu \delta x^2 - \frac{dv}{dy} \int \mu \delta x \delta y - \frac{dv}{dz} \int \mu \delta x \delta z$$

en que

$$\int \mu \delta x = 0, \quad \int \mu \delta x \delta y = 0, \quad \int \mu \delta x \delta z = 0 \text{ y } \int \mu \delta x^2 = \frac{I}{2},$$

resulta que

$$\int \mu \left[\delta y \left(u + \frac{du}{dx} \delta x + \frac{du}{dy} \delta y + \frac{du}{dz} \delta z \right) - \right.$$
$$\left. - \delta x \left(v + \frac{dv}{dx} \delta x + \frac{dv}{dy} \delta y + \frac{dv}{dz} \delta z \right) \right] = \frac{1}{2} I \left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} \right)$$

Calculando del mismo modo el momento con relación al eje de las y, tendremos

$$\frac{1}{2} I \left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} \right)$$

y para el momento relativo al eje de las x,

$$\frac{1}{2} I \left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz} \right).$$

El momento total será

$$\frac{1}{2} I \sqrt{\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dy} - \frac{du}{dz} \right)^2}.$$

Y haremos de paso una advertencia, á saber: que en todas las integrales hemos sacado fuera de su signo u, v, w y sus derivadas, porque hemos supuesto, dada la pequeñez de la esfera, que dichas derivadas son constantes para todos sus puntos.

La expresión que hemos obtenido para el momento total de las cantidades de movimiento es una cantidad constante fija é invariable para cada punto, sea cual fuere el sistema de coordenadas, porque es una cantidad mecánica, que no depende más que de la distribución de los puntos dentro de la esfera, de las masas que en ellos hemos colocado y de las velocidades que á cada uno corrresponden.

La resultante de los momentos hemos visto que se puede obtener directamente sin acudir á ningún sistema de ejes, con sólo transportar al centro las cantidades de movimiento y componer todos los pares.

En cuanto á la forma, siempre será la misma, porque tendríamos que repetir los mismos cálculos ya efectuados, con sólo llamar x', y', z', á lo que hemos llamado x, y, z.

En suma, tendríamos

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}\right)^2+\left(\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}\right)^2+\left(\frac{dw}{dx}-\frac{du}{dz}\right)^2}=$$

$$=\frac{I}{2}\sqrt{\left(\frac{du'}{dy'}-\frac{dv'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dv'}{dz'}-\frac{dw'}{dy'}\right)^2+\left(\frac{dw'}{dx'}-\frac{du'}{dz'}\right)^2}$$

y, por lo tanto,

$$\left(\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}\right)^2+\left(\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}\right)^2+\left(\frac{dw}{dx}-\frac{du}{dz}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{du'}{dy'}-\frac{dv'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dv'}{dz'}-\frac{dw'}{dy'}\right)^2+\left(\frac{dw'}{dx'}-\frac{du'}{dz'}\right)^2.$$

Tenemos, pues, el polinomio de segundo grado isótropo que buscábamos, pues no hay más que prescindir del sistema mecánico y suponer que u, v, w representan, no ya componentes de velocidad, sino componentes de desplazamientos.

***

En resumen, hemos obtenido tres polinomios de segundo grado isótropos, que, adoptando las mismas notaciones de Mr. Poincaré, serán

$$1.^{\circ}\ \theta^2 = \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)^2 = \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 +$$

$$+ 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} + 2\frac{du}{px}\frac{dw}{dz} + 2\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dz}$$

ó abreviadamente:

$$\theta^2 = \Sigma\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 2\Sigma\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}.$$

Esto es lo que se deduce, por la consideración de la *invariabilidad*, para cada punto, de la *dilatación cúbica.*

$$2.^{\circ}\ A_2 = (4a_1a_2 - b^2_3) + (4a_1a_3 - b^2_2) + (4a_2a_3 - b^2_1)$$

en que ya conocemos la significación de las a y b en valores de los nueve coeficientes diferenciales.

Este polinomio se obtiene por la *invariabilidad de los ejes del elipsoide de deformación.*

$$3.^{\circ}\ \left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dy}\right)^2 -$$

$$- 2\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx} - 2\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dy} - 2\frac{dw}{dx}\frac{du}{dz}$$

ó abreviadamente

$$\Sigma\left(\frac{du}{dy}\right)^2 - 2\Sigma\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}$$

Acabamos de obtener este último polinomio, puede decirse que por un artificio de mecánica y por la constancia del momento de las cantidades de movimiento.

Cuando decimos constancia, queremos decir que el valor y la forma serán constantes *para cada punto*, sea cual fuere el sistema de ejes trirrectangulares que escojamos.

Claro es que en general, *al pasar de un punto á otro* del sistema, variará el valor numérico *de la dilatación cúbica;* variarán los valores *de los ejes del elipsoide*; y *variará el valor del momento de las cantidades de movimiento.*

Estas tres magnitudes serán funciones de x, y, z.

***

Y aquí se presenta una cuestión.

Que estos tres polinomios son distintos; que ninguno de ellos se puede obtener por una combinación lineal de los otros dos, es decir, multiplicándolos por constantes arbitrarias y sumando, sean cuales fueren estas constantes, se demuestra inmediatamente: es un ejercicio de álgebra elemental en que no hemos de insistir.

Pero queda otra duda, que es importante.

¿No existirá algún otro polinomio de segundo grado independiente de los anteriores, es decir, que no resulte de una combinación lineal de estos últimos?

Mr. Poincaré lo demuestra por un procedimiento sumamente sencillo, que por falta de tiempo no podemos hacer otra cosa que indicar.

Se demuestra en primer lugar, variando los ejes x, y, z y $-x$, $-y$, $-z$, entre sí, que un polinomio isótropo no puede contener más que estos cuatro grupos

$$\Sigma \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \qquad \Sigma \frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}$$

$$\Sigma \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \qquad \Sigma \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}.$$

Y se observa después que si hubiera cuatro polinomios lineales de estos grupos é independientes, eliminando tres de ellos y no dejando más que el primero, que como se había obtenido por sumas y restas de polinomios isótropos debería ser un polinomio isótropo también, deberíamos considerar como tal al polinomio

$$\Sigma \left(\frac{du}{dx}\right)^2.$$

Pero se demuestra inmediatamente que no lo es, sin más que aplicar las fórmulas de transformación, que ya hemos escrito, y se llega á este resultado sin necesidad de obtener los desarrollos completos.

De aquí resulta que todo polinomio isótropo debe ser precisamente una combinación lineal de los ya obtenidos.

***

Mr. Poincaré sustituye á los tres polinomios anteriores, la siguiente combinación de éstos.

El primero subsiste tal como es; de suerte que representando las tres derivadas $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$, como hasta aquí por a_1, a_2, a_3, tendremos:

$$\theta^2 = (a_1 + a_2 + a_3)^2$$

en que θ^2 puede considerarse como una constante para cada punto, es decir, como una función de x, y, z, que para cada punto son cantidades determinadas.

El segundo polinomio isótropo se obtiene por la combinación de los dos primeros

$$\theta^2 = (a_1 + a_2 + a_3)^2$$
$$A_2 = \Sigma\,(4\,a_1\,a_2 - b_3^2)$$

en que A_2 era uno de los coeficientes de la ecuación de tercer grado que servía para determinar la incógnita s, ó si se quiere, para determinar cada uno de los ejes del elipsoide deformado.

Desarrollemos ambas ecuaciones, y tendremos:

$$\theta^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2\,a_1\,a_2 + 2\,a_1\,a_3 + 2\,a_2\,a_3,$$
$$A_2 = 4\,(a_1\,a_2 + a_1\,a_3 + a_2\,a_3) - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2.$$

Dividiendo esta última por 2, resultará

$$\frac{A_2}{2} = 2\,(a_1\,a_2 + a_1\,a_3 + a_2\,a_3) - \frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}{2},$$

y restando de la primera

$$\theta^2 - \frac{A_2}{2} = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}{2}.$$

Representando el primer miembro por H, y es claro que esta cantidad será una constante en el sentido que hemos explicado, es decir, una función de x, y, z determinada para cada punto, é invariable para dicho punto en valor numérico, sean cuales fueren los ejes á que se refiera el sistema, obtendremos

$$H = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}{2}.$$

El segundo miembro será el polinomio isótropo de segundo grado que consideraremos.

Pasemos á fijar el tercero.

Como hemos combinado el primero con el segundo de los tres antes determinados, combinaremos ahora estos mismos, multiplicando el primero por 2 y restando como antes.

Tendremos, pues, poniendo en evidencia las derivadas :

$$2\theta^2 + A_2 = 2\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2\right] +$$

$$+ 4\left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} + \frac{du}{dx}\frac{dw}{dz} + \frac{dv}{dy}\frac{dw}{dz}\right)$$

$$- 4\left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} + \frac{du}{dx}\frac{dw}{dz} + \frac{dv}{dy}\frac{dw}{dz}\right) +$$

$$+ \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)^2$$

y simplificando y desarrollando los últimos cuadrados

$$2\theta^2 - A_2 = 2\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2\right] +$$

$$+ \left[\left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dy}\right)^2\right].$$

$$+ 2\left(\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}\right).$$

A esta ecuación le agregaremos la que se deduce del tercer polinomio que obtuvimos al principio; y que representando por B el cuadrado del momento total, después de dividido por el coeficiente constante, ó mejor dicho, el valor del polinomio para cada punto, resulta bajo esta forma:

$$B = \left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right),$$

ó desarrollando

$$B=\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\right)^2+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+$$
$$+\left(\frac{dv}{dz}\right)^2+\left(\frac{dw}{dy}\right)^2+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2-$$
$$-2\left(\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dz}\frac{dw}{dx}+\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dy}\right).$$

Esta ecuación, sumada con la del valor $2\theta^2 - A_2$, da

$$2\theta^2 - A_2 + B = 2\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2+\right.$$
$$+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\frac{dv}{dy}\right)^2+\left(\frac{dw}{dy}\right)^2+$$
$$\left.+\left(\frac{du}{dz}\right)^2+\left(\frac{dv}{dz}\right)^2+\left(\frac{dw}{dz}\right)^2\right]:$$

dividiendo por 2, y recordando, según la notación de monsieur Poincaré, que explicamos en una conferencia precedente, que se representan por Π_{xx} los tres primeros términos; los tres segundos, por Π_{yy}, y los tres últimos por w_{zz}, se escribirá de este modo:

$$\frac{2\theta^2 + A_2 + B}{2} = \Pi_{xx} + \Pi_{yy} + \Pi_{zz}.$$

Representando el primer miembro por K, siendo esta cantidad constante en el sentido que ya hemos explicado varias veces, tendremos:

$$K = \Pi_{xx} + \Pi_{yy} + \Pi_{zz}.$$

En resumen, escogeremos, como los tres polinomios isótropos fundamentales, los tres que acabamos de obtener, y son:

$$\theta^2 = (a_1 + a_2 + a_3)^2,$$

$$H = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}{2},$$

$$K = \Pi_{xx} + \Pi_{yy} + \Pi_{zz}.$$

Las cantidades θ^2, H y K son cantidades constantes *para cada punto*; pero también las emplearemos como símbolos abreviados de los segundos miembros.

Cualesquiera otro polinomio isótropo, podrá expresarse en función lineal de los tres anteriores; porque hemos visto que no pueden existir cuatro polinomios isótropos independientes, y que estos tres no pueden expresarse unos en función de otros, es decir, no están ligados por una ecuación lineal.

Y aquí termina el paréntesis, que antes abrimos para este problema, de lo que llama Mr. Poincaré «cinemática de las deformaciones».

***

Volvamos ya al problema de la Elasticidad, y á la simplificación de las fórmulas generales.

Dijimos que las simplificaciones que íbamos á considerar eran dos, con el objeto de venir á parar á las fórmulas de Mr. Lamé.

Primera: Que en el estado inicial, las fuerzas exteriores sean nulas. En este caso vimos que lo que llamábamos W_1 se reducía á cero, y que las cantidades Π se reducian á cero también.

Segunda simplificación: Que el sistema fuese isótropo.

Decíamos en el curso precedente, que en el caso general, los coeficientes de las fórmulas finales eran funciones de x, y, z, es decir, variables de un punto á otro.

Que cuando el cuerpo era homogéneo, es decir, cuando cualquier elemento del interior podía coincidir con otro

por un movimiento de traslación, los coeficientes eran constantes para todos los puntos, prescindiendo de las ecuaciones de los límites; pero que variarían de valor numérico por un cambio de coordenadas.

Y que por fin, si una porción esférica del interior del cuerpo giraba de cualquier modo sobre su centro, sin que la distribución de sus puntos cambiase, el sistema en este punto sería isótropo; y si además era homogéneo, sería isótropo todo él.

Este es precisamente el caso que ahora vamos á considerar.

La función de fuerzas U, ó la potencial, para un elemento muy pequeño del cuerpo, tendrá un valor determinado que dependerá, como hemos visto, de las nueve derivadas fundamentales de la deformación.

Más aún: será un polinomio de segundo grado de estas derivadas.

Y como suponemos que el sistema es isótropo, este polinomio que expresa la función de fuerzas para el elemento en cuestión, no vendrá á cambiar ni de valor ni de forma por un cambio de ejes.

Luego deberá ser un polinomio isótropo.

Luego la parte de la potencial que hemos llamado W_2, y que como recordarán mis alumnos, se componía de dos polinomios de segundo grado

$$W_2 = P_c(a, b) + P_l(\Pi),$$

siendo un polinomio de segundo grado, deberá expresarse por una función lineal de los tres polinomios isótropos fundamentales de segundo grado que hemos representado antes por θ^2, H, K.

Es decir:

$$W_2 = C_1\theta^2 + C_2 H + C_3 K.$$

Para conformarnos con el uso, designaremos las constantes arbitrarias C, de este modo:

$$C_1 = -\frac{\lambda}{2}; \quad C_2 = -\mu; \quad C_3 = +\nu$$

y tendremos,

$$W_2 = -\lambda \frac{\theta^2}{2} - \mu H + \nu K$$

En rigor, la potencial del elemento, referida á la unidad de volumen, sería:

$$W_1 + W_2.$$

Y como W_1 es un polinomio lineal é isótropo, no puede ser otro que θ, de suerte, que realmente lo que llamábamos W, es decir, la potencial de un elemento infinitamente pequeño referida á la unidad de volumen, sería:

$$W = k\theta - \lambda \frac{\theta^2}{2} - \mu H + \nu K$$

Cuando las fuerzas exteriores, en el estado inicial, son nulas, W_1 también lo es; y lo son las cantidades II de suerte, que la potencial se reduce á dos términos nada más,

$$W = W_2 = -\lambda \frac{\theta^2}{2} - \mu H$$

que desarrollados dan,

$$W = -\frac{\lambda}{2}(a_1 + a_2 + a_3)^2 -$$

$$-\mu\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}{2}\right)$$

ó escribiendo explícitamente las derivadas de la deformación

$$W = -\frac{\lambda}{2}\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)^2 -$$

$$-\mu\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{dv}{dy}\right)^2+\left(\frac{dw}{dz}\right)^2\right]+$$

$$+\frac{\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}+\frac{du}{dx}\right)^2}{2},$$

Esta será la expresión de la cual deberemos tomar las derivadas con relación á dichas derivadas fundamentales a, b, para obtener los coeficientes de las seis ecuaciones que resuelven el problema de la elasticidad, ó para obtener las componentes de las tensiones en las caras de un paralelepípedo elemental, como demostramos en una conferencia anterior, y como recordaremos en esta, para hacer coincidir las fórmulas de Poincaré, con las fórmulas clásicas de Lamé en el caso; 1.°, de que las fuerzas exteriores sean nulas en el estado inicial; 2.°, de que el cuerpo sea isótropo en toda su extensión; y esto, téngase en cuenta, sin acudir á la hipótesis de las fuerzas centrales; pero aceptando el principio de la conservación de la energía.

***

Hemos visto en la conferencia XIV que las fórmulas fundamentales que resolvían el problema de la elasticidad eran las siguientes:

$$Ab + Bm + Cn + P_x = 0,$$
$$A'b + B'm + C'n + P_y = 0,$$
$$A''b + B''m + C''n + P_z = 0.$$

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} - X =$$

$$\frac{dA'}{dx} + \frac{dB'}{dy} + \frac{dC'}{dz} - Y = 0,$$

$$\frac{dA''}{dz} + \frac{dB''}{dy} + \frac{dC''}{dz} - Z = 0,$$

en que A, B, C..... se deducían diferenciando W por relación á los nueve coeficientes diferenciales $\frac{du}{dx}$..... De suerte que teníamos:

$$A = \frac{dW}{d\frac{du}{dx}}, \quad B = \frac{dW}{d\frac{du}{dy}}, \quad C = \frac{dW}{d\frac{du}{dz}},$$

$$A' = \frac{dW}{d\frac{dv}{dx}}, \quad B' = \frac{dW}{d\frac{dv}{dy}}, \quad C' = \frac{dW}{d\frac{dv}{dz}},$$

$$A'' = \frac{dW}{d\frac{dw}{dx}}, \quad B'' = \frac{dW}{d\frac{dw}{dy}}, \quad C'' = \frac{dW}{d\frac{dw}{dz}},$$

y no habrá que hacer, por lo tanto, otra cosa, que aplicar estas diferenciaciones á la expresión

$$W = -\lambda \frac{\theta^2}{2} - \mu H;$$

recordando que θ y H son la expresión abreviada de polinomios de segundo grado de las nueve derivadas fundamentales de la deformación, según antes decíamos.

Tendremos, pues:

$$A = \frac{dW}{d\frac{du}{dx}} = -\lambda\theta\frac{d\theta}{da_1} - 2\mu a_1 = -\lambda\theta - 2\mu\frac{du}{dx},$$

$$B = \frac{dW}{d\frac{du}{dy}} = -\mu b_3\frac{db_3}{d\frac{du}{dy}} = -\mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right),$$

$$C = \frac{dW}{d\frac{du}{dz}} = -\mu b_2\frac{db_2}{d\frac{du}{dz}} = -\mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right),$$

$$A' = \frac{dW}{d\frac{dv}{dx}} = -\mu b_3\frac{db_3}{d\frac{dv}{dx}} = -\mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right),$$

$$B' = \frac{dW}{d\frac{dv}{dy}} = -\lambda\theta\frac{d\theta}{da_2} - 2\mu a_2 = -\lambda\theta - 2\mu\frac{dv}{dy},$$

$$C' = \frac{dW}{d\frac{dv}{dz}} = -\mu b_1\frac{db_1}{d\frac{dv}{dz}} = -\mu\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right),$$

$$A'' = \frac{dW}{d\frac{dw}{dx}} = -\mu b_2\frac{db_2}{d\frac{dv}{dz}} = -\mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right),$$

$$B'' = \frac{dW}{d\frac{dw}{dv}} = -\mu b_1\frac{db_1}{d\frac{du}{dy}} = -\mu\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right),$$

$$C'' = \frac{dW}{d\frac{dw}{dz}} = -\lambda\theta\frac{d\theta}{du_3} - 2\mu a_3 = -\lambda\theta - 2\mu\frac{dw}{dz}$$

No queda más que substituir estos valores en las tres ecuaciones fundamentales, y tendremos para la primera:

$$\frac{d\left(-\lambda\theta-2\mu\frac{du}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(-\mu\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)\right)}{dy}+$$

$$+\frac{d\left(-\mu\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)\right)-X=0}{dz}$$

ó bien

$$\lambda\frac{d\theta}{dx}+2\mu\frac{d^2u}{dx^2}+\mu\left(\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2v}{dx\,dy}\right)+$$

$$+\mu\left(\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{d^2w}{dx\,dz}\right)+X=0$$

que puede escribirse de este modo:

$$\lambda\frac{d\theta}{dx}+\mu\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2v}{dx\,dy}+\frac{d^2w}{dx\,dz}\right)+$$

$$+\mu\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)+X=0$$

Pero

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2v}{dx\,dy}+\frac{d^2w}{dx\,dz}=\frac{d\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)}{dx}=\frac{d\theta}{dx}$$

y según una notación que ya hemos explicado varias veces:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}=\Delta u.$$

Luego la ecuación se reduce á

$$\lambda\frac{d\theta}{dx}+\mu\frac{d\theta}{dx}+\mu\Delta u+X=0,$$

ó, por último:

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dx} + \mu\Delta u + X = 0$$

que es la primera ecuación clásica de la teoría de la elasticidad.

Del mismo modo se transforman las dos últimas en las siguientes:

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dy} + \mu\Delta v + Y = 0$$

$$(\lambda + u)\frac{d\theta}{dz} + \mu\Delta w + Z = 0.$$

Hemos llegado, pues, según habíamos anunciado, para este caso particular, á las ecuaciones de Lamé, y además los coeficientes A, B, C..... coinciden con la N y T, que expresan las componentes de las tensiones, y el cuadro de las primeras resulta simétrico.

Con esto damos por terminada en esta serie de cursos la exposición de la teoría de la elasticidad en sus tres grandes métodos: el de Cauchy, el de Lamé y el de Poincaré, cuyas fórmulas finales, es decir, cuyas ecuaciones diferenciales, en que u, v, w son las funciones y x, y, z las variables independientes, coinciden en los tres sistemas, salvo la igualdad de las constantes λ y μ en el método de Cauchy.

Esta coincidencia, por lo demás, no nos sería difícil de prever comparando los tres procedimientos seguidos para los casos particulares á que nos referimos.

En rigor, no hemos expuesto más que la parte elemental de la teoría en cuestión.

Queda después la gran masa de las aplicaciones, de las que no hemos podido hacer otra cosa que presentar algunos ejemplos en el segundo curso.

Si hubiéramos querido ampliar esta última parte, que

llena gruesos volúmenes en obras que hoy son clásicas, y que forma en la obra de Mr. Poincaré una parte interesantísima de la misma, tendríamos materia sobrada para algunos cursos más de esta asignatura; pero ya es tiempo de pasar á otras teorías de interés más moderno y, por decirlo así, más palpitante.

Sólo sentimos no poder decir algo de tres obras que formarían el complemento de nuestro trabajo, si pudiéramos tratarlas, por enlazarse íntimamente con esta teoría de la elasticidad; y estas obras son las siguientes:

1.ª *Leçons sus l'integration des èquations differentielles aux derivèes partielles professées à Stockholm*, por M. V. Volterra.

2.ª *Recherches sur l'élasticité*, par Pierre Duhem.

3.ª *Thèorie des corps dèformables*, por E. y F. Cosserat.

Pero el curso termina, el tiempo apremia y mi voluntad no es todopoderosa.

En rigor, la Física-matemática termina en cualquiera de sus ramas cuando ha escrito las relaciones entre las incógnitas y los datos por medio de ecuaciones diferenciales.

Ya lo que queda son problemas de análisis ó de cálculo integral.

Queda, en verdad, lo más difícil; pero son dificultades que, hablando en términos generales, pertenecen á las Matemáticas puras.

La Física-matemática, como decíamos en el primer curso, establece para cualquiera de los problemas que aborda ciertas hipótesis, en el siglo pasado, hipótesis mecánicas; y aplicando el cálculo á estas hipótesis llega á ecuaciones que, por lo general, son ecuaciones diferenciales, porque dada la manera de ser de la inteligencia humana, le es más fácil establecer la ley elemental de los incrementos, que establecer leyes finitas, es decir, leyes entre magnitudes finitas.

Obtenidas estas ecuaciones, la Física-matemática propiamente dicha ha terminado, ó, en todo caso, sólo le queda la

interpretación de los resultados finales, procurando que concuerden con la realidad de los fenómenos, así en las líneas generales como en los valores numéricos de los coeficientes que haya necesitado emplear.

En suma, la Física-matemática está al principio, al establecer las ecuaciones; y está al fin, al interpretar los resultados, de suerte que la teoría constituya, por lo menos, un gran simbolismo de la realidad, y un simbolismo tan perfecto como sea posible; es decir, que la realidad del fenómeno y la imagen matemática, dibujada por medio de fórmulas, se ajusten y se acoplen con toda exactitud ó con la exactitud posible.

Entre el principio y el fin queda una labor inmensa, que es la que llena millares de páginas en las obras de Física-matemática.

Al llegar á este punto debemos detenernos: quizá sea la materia que escojamos para las conferencias del curso inmediato.

LIV. — Sobre los metales de las tierras raras (*). — (Europio, Gadolinio, Terbio, Disprosio, Neoiterbio, Lutecio.)

POR GEORGES URBAIN.

Siendo imposible, en este momento, ocuparme en los pormenores de las investigaciones que durante quince años constituyeron el objeto de mis trabajos, me limitaré á hacer un resumen de ellas, procurando exponer, de la manera más sencilla, las ideas que me guiaron y los resultados obtenidos.

Hace cosa de unos quince años también, en particular después de las principales indagaciones de Sir William Crookes, á cuyo talento y á cuya valentía me complazco en rendir el debido homenaje, aunque nuestras actuales conclusiones sean diametralmente opuestas, el grupo de las tierras raras, y más especialmente el de las tierras itricas, se consideraba formado por multitud de cuerpos. Parecía que se debía renunciar á aislarlos uno á uno, limitándose el experimentador á observar caracteres nuevos para definir elementos nuevos.

Cuantas investigaciones se practican encaminadas á determinar la individualidad de un elemento, comprenden una parte química, relativa á la separación de los cuerpos, y otra parte físico-química, relativa á las medidas que permiten especificarlo. Para separar cuerpos ó elementos que tienen propiedades químicas tan semejantes como los contenidos en las tierras raras, sólo hay dos métodos, que recuerdan las destilaciones fraccionadas, de uso constante en la Química Or-

(*) Comunicación hecha en la Seccion X del Congreso Internacional de Química Aplicada de Londres el día 28 de Mayo de 1909.

gánica cuando es menester separar substancias dotadas de la misma función química. Y como las tierras raras no dan compuestos volátiles sino á temperaturas prácticamente inaccesibles, se ha recurrido á las precipitaciones fraccionadas y á las cristalizaciones fraccionadas.

En la medida de lo posible he renunciado al primero de estos métodos, á causa de la multiplicidad de manipulaciones que requiere, adoptando el segundo y prefiriendo, en su práctica, las sales muy solubles. Para semejante linaje de operaciones, que han de repetirse millares de veces, antes de lograr resultados prácticos satisfactorios, las sales más convenientes, por razones de orden experimental, son aquellas que, como los nitratos, se funden en su agua de cristalización. De todas suertes, es menester asegurarse de la eficacia del método adoptado.

Con el fin de evitar los inconvenientes del polvo, es ventajoso hacer las cristalizaciones en matraces, siendo necesario emplearlos de buen vidrio de Jena ó de Krasma, y sólo deben contener líquido, á lo sumo, hasta la mitad de su cabida, para que puedan efectuarse las dilataciones libremente, evitándose de camino las rupturas. Después de cada cristalización, las aguas madres deben quedar reducidas al mínimo. Las operaciones subsiguientes, únicas necesarias, decantaciones, disoluciones y concentraciones, son de la mayor sencillez, y las últimas pueden disponerse en series, elevando simultáneamente la temperatura de muchas vasijas colocadas sobre una placa metálica calentada. Esta técnica había sido de tiempo atrás preconizada por M. Demarçay. Al principio de las operaciones se emplean grandes matraces; pero no es conveniente que su cabida pase de un litro; al término del tratamiento, las vasijas son muy pequeñas; las que me sirvieron en la obtención del *lutecio* eran sólo de 20 centímetros cúbicos. En cierta época tuve en mi laboratorio más de 300 matraces, en cuyo interior se producían cristalizaciones, y en todos se efectuaba una serie de ellas cada medio día. Mis

ayudantes y yo podíamos hacer dos series de cristalizaciones diarias, y el conjunto de las realizadas durante todo el trabajo han pasado de doscientas mil.

He aquí, reducido á sus términos esenciales, el método operatorio. Supongamos que el fraccionamiento preciso para aislar un cuerpo comprende 15 fracciones, numeradas por orden de solubilidad; el núm. 1 es el término menos soluble, el número 15 el término más soluble; las aguas madres de éste se vierten en otro matraz que lleva un número 16, y las del 14 se decantan en el 15, cuyos cristales se disuelven en el agua madre del número anterior, y así sucesivamente. Se añade de continuo disolvente puro en la vasija núm. 1, que termina por anularse, y entonces la fracción de cabeza corresponde al contenido de la núm. 2; y cuando la núm. 16 ha recibido suficiente cantidad de aguas madres para hacer cristalizar el suyo, entra en la serie un nuevo matraz, el 17, y así el número de fracciones permanece constante. Con el fin de evitar concentraciones inútiles, conviene igualar los volúmenes. El número de fracciones depende de la eficacia del método y le es inversamente proporcional.

Deben hacerse tratamientos previos, encaminados á clasificar los cuerpos en grupos. En mi principal trabajo acerca de las tierras de la monacita, que ha necesitado 500 kilogramos de primeras materias, los tratamientos primordiales, en grande, fueron efectuados industrialmente. Me interesaban de preferencia las tierras ítricas, apenas conocidas, y era preciso aislar cantidades considerables de las del grupo cérico: Cerio, Lantano, Praseodimio, Neodímio y Samario, y las tierras ítricas, de otra parte, no contenían menos de 80 por 100 de ítrio, del cual era menester separarlas. Se explica la necesidad de partir de tan considerables cantidades de primera materia, sabiendo que algunos cuerpos, como el Europio, el Terbio ó el Lutecio, son, á su vez, sumamente raros en las mismas tierras raras. Por mis cálculos, las tierras ítricas de la monacita contienen menos de unas dos cien milésimas de Europio, y

sin embargo, siguiendo metódicamente los tratamientos, he podido aislarlo casi cuantitativamente.

Esta parte del trabajo ha sido la clave de la bóveda del conjunto, y en ella tuve por colaborador á M. H. Lacombe, y hemos llegado á la más rigurosa separación del Europio del Samario de la manera siguiente: pudimos averiguar que el nitrato de bismuto forma con los nitratos de la serie magnesiana sales completamente isomorfas con los nitratos dobles que constituyen los nitratos de los metales de las tierras raras con los de la serie magnesiana:

$$2\,M(NO_3)_3,\ 3\,Mg.\,(NO_3)_2\ 24\,H_2O,$$

representando *M* el Bismuto ó uno de los metales: Ce—La—Nd—Pr—Sm—Eu—Gd—Tb.

Luego de haber practicado algunos tanteos, hemos determinado que, atendiendo á la solubilidad de su nitrato doble, el Bismuto se colocaba entre el Samario y el Europio. Y el isomorfismo, que se creía el principal obstáculo en la separación de las tierras raras, nos ha servido esta vez para realizarla.

A las mezclas, en estado de nitratos magnésicos, se añadía gran exceso de nitrato magnésico de bismuto, procediendo luego al fraccionamiento metódico; Ce—La—Pr—Nd—Sm, cristalizan los primeros, el bismuto les sigue, quedando como productos de cola Eu, Gd, etc. Cuando la fracción del medio sólo contiene bismuto, puede darse por separado cuantitativamente el samario del europio, y sólo resta eliminar el bismuto, cosa fácil empleando el H_2S, con cuyo reactivo no precipitan los metales de las tierras raras.

Sirve de esta suerte el bismuto como cuerpo separador, y si hubiera otros elementos, entre los usuales, isomorfos con los de las tierras raras, se comprende que el método podría generalizarse; desgraciadamente, sólo el bismuto se halla en semejante caso, siendo muy notable el hecho de que todas

las sales de bismuto isomorfas con las de los metales de las tierras raras — y son numerosas — pueden colocarse, atendiendo á su solubilidad, en el mismo lugar de la serie, de manera que si se pretende cortarla en cualquiera otro de sus términos, los resultados no son satisfactorios.

Juzgo que semejante observación indica, por ventura, una gran ley natural relativa á la solubilidad de los elementos de una misma serie, y tengo observado constantemente cómo, cualquiera que sea el método de cristalización empleado, las tierras raras se clasifican siguiendo el mismo orden:

Lantano.....	La	= 139,0
Cerio.....	Ce	= 140,25
Praseodimio.	Pr	= 140,6
Neodimio...	Nd	= 144,5
Samario....	Sm	= 150,4
(BISMUTO)		
Europio.....	Eu	= 152,0
Gadolinio...	Gd	= 157,5
Terbio.....	Tb	= 159,2
Disprosio...	Di	= 162,5
Holmio.....	Ho	= 162,5 – 167
Itrio.....	Ir	= 89,0
Erbio.....	Er	= 167
Tulio.....	Tu	= 168,5
Neoiterbio...	Ny	= 172
Lutecio.....	Lu	= 174

Exceptuando el itrio, este orden es el de los pesos atómicos crecientes, y si la ley no ha aparecido evidente antes de mis investigaciones, la razón está en que con ciertas sales se repliega sobre sí misma, conforme lo hacen los rayos dispersados del espectro en los casos de dispersión anormal.

Por cristalizaciones de diversas sales, entre las que los etilsulfatos, los nitratos dobles de la serie magnesiana y los nitratos simples con cinco moléculas de agua, han desempeñado el principal papel, es como he llegado á aislar unos de otros los elementos que constituyen la parte central de la se-

rie: Sm, Eu, Gd, Tb, Di. No solamente pude definirlos de modo riguroso por la descripción de sus espectros y la determinación de sus pesos atómicos, sino que además he establecido la invariabilidad de tales caracteres y demostrado que no podía existir entre ellos ningún otro elemento.

Tomando la serie ítrica por el otro extremo, he demostrado también, hace muy poco tiempo, que el iterbio es una mezcla de peso atómico y espectro variables, y me ha sido posible aislar un nuevo elemento, el lutecio. Cuarenta días después, Mr. Auer publicaba los datos numéricos, semejantes á los míos, y esta es la exposición sumaria de los principales resultados que he aportado á la química de las tierras raras, á saber: descubrimiento de dos elementos, el lutecio y el neoiterbio, y descripción completa de otros cuatro: el europio, el gadolinio, el terbio y el disprosío. Y merced á este trabajo, figuran en la tabla internacional de los pesos atómicos, cuatro elementos: europio, disprosio, lutecio y neoiterbio, que de tal suerte han adquirido, por decirlo así, existencia oficial en la ciencia.

Lo que precede corresponde, en rigor, á la química pura; pero los métodos de la físico-química tienen, en el orden de semejantes investigaciones, un lugar preeminente, y he creído deber exponerlos en la Sección correspondiente de este Congreso. No basta fraccionar mezclas y determinar pesos atómicos para alcanzar resultados en el camino de las indagaciones de que se trata; operando así, sólo se consigue una primera aproximación, porque los pesos atómicos de dos elementos tienen, á veces, valores casi idénticos, y de otra parte el carácter único de los pesos atómicos es insuficiente. No obstante, siempre me he ocupado de que mis medidas, en tal orden de ideas, fueran muy precisas. Tomando en abscisas los números de orden de las fracciones y en ordenadas los pesos atómicos, las curvas obtenidas al principio de un fraccionamiento son muy continuas y regularmente ascendentes ó descendentes. Cuando las separaciones van

más adelantadas, se observan en las curvas indicaciones de mesetas horizontales, que al momento se precisan. Si muchas fracciones consecutivas tienen en los límites, salvo errores de medida, el mismo peso atómico, estas mesetas corresponden, por lo general, á cuerpos puros. Mas también pueden corresponder á mezclas: en las destilaciones fraccionadas hay mezclas líquidas que destilan á temperatura constante; en las cristalizaciones fraccionadas pueden observarse mezclas indesdoblables, de las cuales he citado algunos ejemplos y establecido la teoría del hecho.

He tenido que estudiar sistemáticamente los diversos caracteres espectrales de las mesetas de peso atómico constante, siguiendo cada carácter en las fracciones sucesivas, y desde luego me ha sido preciso salvar todo género de dificultades. Las tierras raras producen, al igual de todos los elementos químicos, tres especies de espectros.

Espectros de emisión.

Espectros de absorción.

Espectros de fosforescencia.

Eran muy incompletos, y á menudo contradictorios, los datos obtenidos por diferentes experimentadores. Por lo general, cada autor se limitaba á la observación de un solo carácter y atribuía los caracteres nuevos, distintos de los investigados, á un nuevo elemento; uno de ellos sólo podía dar tres géneros de espectros, y de esta manera cada elemento podía ser descubierto por lo menos tres veces. De tal suerte, la química de las tierras raras vióse embarazada con tantos cuerpos simples, provisionalmente designados con las letras X, Y, Z. G..... no bastando los alfabetos griego y romano, y esto hacía el efecto de un hormigueo de elementos químicos inaccesibles.

De otra parte, el espectro de un elemento jamás es cosa invariable, conforme se creyó durante mucho tiempo; la intensidad, sea de las líneas, sea de las bandas, puede cambiar de modo notable, mediante influencias muy variadas, de suer-

te que se había llegado á admitir que las diversas bandas de un espectro caracterizaban á otros tantos elementos distintos. Si se advierte, además, que los espectros de las tierras raras son muy ricos de rayas y á veces extremadamente sensibles, puede formarse idea aproximada de la dificultad del problema.

Cada espectro ha sido, pues, objeto de un estudio sistemático, y me he visto precisado á estudiar las distintas técnicas operatorias hasta ahora propuestas, las cuales dan en ocasiones — para un espectro de emisión, por ejemplo — resultados muy distintos: los espectros de arco son diferentes de los espectros de chispa; éstos pueden adquirir variadísimas fisonomíaas, según la capacidad y la autoinducción del circuito excitador, y por fin, cuando un cuerpo existe en estado de trazas, su espectro difiere, en general, del que produce cuando se encuentra en estado de masas.

Varían los espectros de absorción con la acidez, la concentración de las disoluciones y la temperatura. Poseen los espectros de emisión y los de absorción intensidades que resultan sensiblemente proporcionales á las masas que los originaron, sólo que los de emisión son menos sensibles que los otros. Gracias á esto puede observarse si dos espectros (uno de emisión y el otro de absorción) pertenecen á un mismo elemento. Experimentan, á causa de las diferencias de sensibilidad, igual variación á un lado ú otro de la meseta de peso atómico constante, á lo largo de la cual permanecen constantemente idénticos á sí mismos, con su brillo máximo. No es igual tratándose de los espectros de fosforescencia, y esta ha sido la parte más trabajosa de mis investigaciones espectrográficas.

La fosforescencia es una propiedad de la materia diluida. Son las mezclas de algunas centésimas de materias activas — fosforógenos, según ahora se llaman — las que en el vacío y mediante la influencia de los rayos catódicos se tornan más luminosas; antes ó después de este óptimo, ó si

aumenta ó disminuye la proporción de fosforógeno, las fosforescencias se atenúan y en general desaparecen mucho antes de llegar á los cuerpos puros. He comprobado el hecho diluyendo estos cuerpos puros no fosforescentes en otros cuerpos inmediatos asimismo puros y que tampoco fosforescían, y de esta manera el trabajo de análisis se doblaba y completaba con el trabajo sintético ulterior. Semejante estudio sistemático me ha permitido observar que no solamente la fosforescencia catódica total de un elemento, diluído en proporciones crecientes en otro elemento, pasaba por un máximo, sino tambien que la mayor parte de las bandas de un mismo espectro admitía óptimos luminosos particulares. En suma, la ley que rige la fosforescencia de las mezclas sólidas es la siguiente:

En todo sistema fosforescente binario, en el cual varían las proporciones relativas del fosforógeno y del diluyente, se demuestra:

1.° *Que cada banda de fosforescencia pasa por un óptimo.*

2.° *Que los óptimos de las diferentes bandas no coinciden necesariamente, aunque correspondan siempre á proporciones relativamente exiguas de fosforógeno.*

Merced á esta ley, se tiene la clave de los fenómenos que se observan, los cuales pueden resumirse así:

1.° Las mesetas correspondientes á cuerpos puros, no son fosforescentes.

2.° Las mezclas intermedias son, por punto general, fosforescentes, y de una fracción á otra el color y el espectro de la fosforescencia experimentan modificaciones progresivas y regulares.

Obsérvase que estas últimas dan la ilusión de una separación de muchas tierras fosforescentes; pero tal ilusión no resiste la prueba de los experimentos hechos por vía de síntesis con mezclas de cuerpos puros en diferentes proporciones, porque no se puede admitir que al mezclar dos cuerpos se separen sus constituyentes.

Después de haber practicado gran número de experimentos, llego á establecer, de manera que me parece irrefutable, la exactitud de las apreciaciones apuntadas, las cuales hállanse en formal contradicción con las atractivas interpretaciones que, bajo el nombre de *teoría de los meta-elementos*, ha dado Sir William Crookes para explicar los magníficos fenómenos cuyo descubrimiento le debemos. Mis experimentos han precisado, en la mayoría de los casos, el sentido de los resultados obtenidos por el ilustre profesor, y acaso por ello cuanto ha ganado en sencillez la Química de las tierras raras lo ha perdido en seducción.

Las investigaciones que he indicado, entreteniendo vuestra atención y fijando tan sólo las ideas directoras de las mismas, me llevaron á las siguientes conclusiones:

1.ª Los elementos S_δ de Sir William Crookes, Z_ε y Z_ξ de Mr. Lecoq de Boisbaudran, son, en realidad, idénticos al *Europio* de Demarçay.

Este elemento posee un espectro de emisión, un espectro de absorción y un espectro de fosforescencia, que sólo se manifiesta cuando se mezclan los derivados del Europio con los convenientes diluyentes. El peso atómico del europio es: Eu = 152,0.

2.ª El elemento *Victorio* de Sir Willian Crookes es idéntico al *Gadolinio*. Este elemento presenta, de la misma suerte, los tres géneros de espectros. Su peso atómico es: Gd = 157,3.

3.ª Los elementos Γ de Demarçay, Z_δ y Z_β de Mr. Lecoq de Boisbaudran, G_β, *Ionio* é *Incognito* de Sir Willíam Crookes, son idénticos al *Terbio*, entrevisto por Mosander y que sólo ha podido ser aislado y descrito sesenta años después. Su peso atómico es: Tb = 159,2.

4.ª Los elementos Δ de Demarçay Z_γ y Z_α de Mr. Lecoq de Boisbaudran, G_δ de Sir William Crookes, X_2 de MM Exner y Haschek son idénticos al *Disprosio* de Lecoq de Boisbaudran. Su peso atómico es: Di = 162,5.

5.ª El *Iterbio* de Marignac es una mezcla, á lo menos de dos elementos. He podido caracterizar uno de ellos, cuyo peso atómico está cerca de 174, por un espectro de líneas y un espectro de bandas; es el *Lutecio*. Al resto del antiguo iterbio le he llamado *Neoiterbio*; la media de su peso atómico es 172; pero todavía no me ha sido posible obtener la constancia y he observado tales variaciones en su espectro de bandas, que me inclino á considerarlo mezcla de dos elementos.

LV.—Fosforescencia de dos colores observada en un sulfuro de estroncio (*).

POR JOSÉ RODRÍGUEZ MOURELO.

Al dar cuenta de las nuevas series de experimentos, relativos á la particularísima fotoluminescencia observada en un sulfuro de estroncio, recordaré, á manera de precedente, otros fenómenos análogos, ha tiempo notados, y que fueron expuestos en anterior trabajo. Refiérense principalmente al sulfuro de bário fosforescente, muy impresionable para la luz, produciéndola luego intensa en la obscuridad y de dos tonos distintos: es el hecho fundamental, punto de partida de las investigaciones que constituyen el objeto de la presente Nota. Hay que considerar, en realidad, dos géneros de hechos, en lo que respecta á las dobles coloraciones de fosforescencia, á saber: sulfuros de bario que la presentan amarilla, no homogénea, y sulfuros de bario en los cuales adviér-

---

(*) Nota leída en la *Sección X* del *Congreso de Química Aplicada de Londres* el día 1.º de Junio de 1909.

tense los efectos luminosos de las aureolas de dos colores, bien distintos y determinados, y en ambos casos son sistemas sólidos diferentes, más ó menos complicados; el diluyente permanece constante y lo forma el monosulfuro de bario, adrede impurificado con carbonato y cloruro de sodio, y el fosforógeno, variable, fué, según las ocasiones, subnitrato de bismuto ó carbonato manganoso (0,002 gr. por 100 de CO_3 Ba) y anhidrido arsenioso (0,015 gr. por 100 de CO_3 Ba), é impórtame traer á cuento los modos operatorios y los resultados obtenidos (*).

Merece indicarse, ante todo, cómo la obtención de fotoluminescencias de dos colores, lo mismo en el caso presente que en los anteriores y en otros de que tengo noticia, es fortuíta y casual, no obedeciendo á reglas fijas; sólo parece depender de circunstancias especiales que hayan concurrido en la formación de los sistemas en los que aquellos fenómenos son advertidos. No obstante lo cual, á lo menos en el momento presente, faltan datos para considerarlos excepciones de una regla conocida.

Bueno es recordar también cómo en el color uniforme de la fosforescencia influyen muchas y variadas circunstancias, siendo las principales, en mi entender, la naturaleza del diluyente y la del fosforógeno, la temperatura á que ha sido obtenida la disolución sólida, el estado de concentración de la misma, respecto de la materia activa, y la mayor ó menor complicación de los sistemas luminescentes, cualesquiera que sean los agentes excitadores de su sensibilidad. Vale señalar, en punto á ello, á guisa de ejemplo, el sulfuro de bario dotado de fosforescencia roja, uniforme y característica, cuando á un sistema en el cual es diluyente y que con-

---

(*) Véanse los pormenores en mi Memoria INVESTIGACIONES ACERCA DE LA FOSFORESCENCIA DEL SULFURO DE BARIO, en los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, tomo II, página 335, 1904.

tiene, en calidad de impurezas, carbonato y cloruro sódicos y sulfato potásico, ejerciendo de fosforógeno el subnitrato de bismuto, se añade una traza de nitrato de cobre, calentando luego la mezcla por cuatro horas al blanco, siguiendo lento enfriamiento, ó los distintos matíces del color de la fosforescencia del sulfuro de calcio, según la procedencia de la cal ó del carbonato de calcio empleado como disolvente sólido. Y no es menos notable la variación del color en la termoluminescencia de ciertas fosforitas y fluoritas con la temperatura á que son sometidas, dentro de los límites de producción del fenómeno, en este caso irreversible. Aparte la naturaleza de los cuerpos que la presentan, en ocasiones la coloración de la triboluminescencia, particularmente si alcanza la intensidad máxima en forma de ráfagas, depende de la manera de la excitación, conforme lo tengo observado en ciertas blendas negras, dotadas de grandísima sensibilidad, y que fosforecen con sólo frotarlas contra un cuerpo algo duro.

Ningún sistema sólido susceptible de la catodoluminescencia, formado de un disolvente y una sola materia activa, que es el más sencillo, hasta los de mayor complicación, en los cuales hay varios diluyentes y varios fosforógenos, pasando por toda la serie de disoluciones sólidas posibles, se exceptúa de lo apuntado, y á partir de los clásicos experimentos de Lecoq de Boisbaudran, hasta las notables investigaciones de Crookes y las modernas de Lenard y Klat, siempre se han notado las influencias señaladas, en particular las de la temperatura á que han sido formadas las disoluciones sólidas fosforescentes, más ó menos complejas.

Cuanto se refiere al color en la fosforescencia, considerado el fenómeno en general, y más especialmente por lo que atañe á la fotoluminescencia y á la catodoluminescencia, ha sido objeto de minuciosos y variados estudios, sobre todo, respecto de lo primero, en lo tocante á la luminescencia verde y á la luminescencia amarilla del sulfuro de cinc, cu-

yas propiedades se diferencian bastante. Sabido es que en los sistemas excitables por la luz directa suelen constituir los diluyentes los sulfuros de bario, de calcio y de estroncio, siendo variadísimos los fosforógenos; y en los sistemas impresionables y disociables por los rayos catódicos, es el diluyente general el sulfato de calcio, muy calcinado y purísimo cuando se trata de hacer investigaciones espectroscópicas, ya que la fijeza de los espectros de fosforescencia es un método analítico admirable, al cual debemos el descubrimiento de algunos cuerpos simples. Partiendo de un diluyente, siempre empleado en gran exceso respecto del fosforógeno, que se usa en mínimas proporciones, y agregando aquellas materias de naturaleza alcalina, fijas unas, como los carbonatos y sulfatos, volátiles otras á temperatura elevada, al igual de los cloruros, y cuya eficacia está bien demostrada en la práctica, se comprende la facilidad de conseguir, á voluntad, sistemas más complicados, puesto que en un sólo disolvente sólido se pueden difundir varias materias activas y recíprocamente una de éstas es susceptible de penetrar en la masa de varios diluyentes, resultando mezclas homogéneas.

Ocurre pensar que si dos fosforógenos, para poner el caso más sencillo, comunican cada cual á un sistema binario—un disolvente y una materia activa—determinado color de fotoluminescencia, otro sistema, esta vez ternario, que contenga á ambos en el mismo estado de dilución, deberá presentar ó dos colores ó un color intermedio, resultado de la combinación de los primitivos. Y de la propia suerte, si es uno sólo el fosforógeno y dos los diluyentes, con cada uno de los cuales aquél produce fosforescencia de distinto color (ejemplo, el subnitrato de bismuto con sulfuro de estroncio, verde, y con sulfuro de calcio, violeta), el del nuevo sistema debiera ser ó doble ó intermedio. Trátase, al cabo, de mezclas íntimas de disoluciones sólidas dotadas de especialísimas cualidades.

De intento emprendí, hace algunos años, experimentos muy variados con ánimo de esclarecer estos puntos, sirviéndome de base y guía los de Lecoq de Boisbaudran y los de Sir William Crookes, referentes á la fosforesceneia, en el vacío y mediante la influencia de descargas eléctricas, de mezclas calcinadas muy variadas, cuyas investigaciones han sido el fundamento de las posteriores relativas á la catodoluminescencia. Fueron negativos los resultados y jamás logré fosforescencias de dos colores, ni de coloraciones intermedias definidas, apelando á los medios cuyo pormenor dejo consignado en dos trabajos ya publicados (*). En otro anterior, al cual hice referencia al principio, considerándolo origen y punto de partida de las observaciones que quiero describir en esta Nota, he dado noticia de ciertas fosforescencias advertidas en determinados casos, experimentando con el sulfuro de bario en condiciones particulares, bien poco semejantes á las más propicias para lograr el sulfuro de estroncio con dos colores de luminescencia.

Ponía mis cuidados, en cierto período de las investigaciones acerca de la fosforescencia del sulfuro de bario, en determinar las influencias de los distintos fosforógenos metálicos, sobre todo las del subnitrato de bismuto y del carbonato manganoso, aislados ó juntos, con cuyas sales había obtenido los sistemas dotados de mayor sensibilidad para la luz directa y que presentan más intensa y duradera fosforescencia, de hermoso color amarillo de oro, á veces con cierto matiz anaranjado. Aunque las mezclas (carbonato de bario artificial, de intento impurificado con carbonato y cloruro sódico, 30 por 100 de azufre y algunos miligramos de los

---

(*) SUR LES MÉLANGES PHOSPHORESCENTS FORMÉS PAR LE SULFURE DE STRONTIUM. *Comptes Rendus de l'Academie de Sciences de Paris*, tomo CXXVII, pág. 1.508. Mai 1898.

MEZCLAS FOSFORESCENTES. *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, tomo III, núm. 22. 1905.

citados fosforógenos), hacíanse lo más homogéneas posible, se calentaban por igual en crisoles tapados y eran sometidas á idénticos tratamientos, aconteció que uno de los sulfuros, de estructura uniforme, agrisado claro, compacto y duro, grandemente excitable por la luz, dió hermosa fosforescencia en toda su masa; pero con dos matices bien distintos del propio color amarillo.

En vista del primer resultado, enteramente casual, emprendí nuevos experimentos, procurando en ellos hacer lo más eficaz posible la acción del fuego, alcanzando con la mayor rapidez el límite de la temperatura del rojo muy vivo, sosteniéndola por tres horas; el sistema resultante era sulfuro de bario en calidad de diluyente, impurificado de intento con carbonato y cloruro de sodio y como fosforógenos, según los casos, subnitrato de bismuto ó carbonato manganoso. Transcurrido el término dicho y enfriado lentamente el crisol, recogí una masa dura, de color amarillento en la superficie, casi blanca en su interior, en extremo sensible á la luz directa, presentando luego, en la obscuridad, hermosa é intensa fosforescencia amarilla de oro, en cuyo tono general se destacan zonas muy brillantes, de color amarillo claro, con bien señalado matíz verdoso, produciendo singular efecto el contraste de ambas coloraciones; y al cabo de más de diez años los ejemplares que conservo nada perdieron de sus propiedades, antes parecen haber ganado en sensibilidad, por virtud de las reiteradas impresiones de la luz, bastando la eléctica incandescente para que se manifieste un principio de fosforescencia.

Quedaba así demostrada, en mi sentir, la posibilidad de obtenerla de dos colores con el más sencillo sistema binario; un sólo diluyente y un sólo fosforógeno; pero es menester añadir que, aun disponiendo de idéntico modo los experimentos, no es posible responder de los resultados, lo cual significa que no se consiguen á voluntad las luminescencias del sulfuro de bario formadas por núcleos de color amarillo

claro, con marcado tono verdoso, rodeados por aureolas brillantes de color amarillo de oro. A pesar de los resultados indicados, si no negativos, variables é inciertos, dispuse nuevos ensayos, también con el sulfuro de bario, buscando en la complicación de las disoluciones sólidas el modo eficaz y seguro de lograr la fosforescencia de dos colores, y como en anteriores experimentos había demostrado, respecto de otros particulares, las ventajas positivas y constantes del anhidrido arsenioso, se emplearon este cuerpo y el subnitrato de bismuto en calidad de fosforógenos ó materias activas, usándolos en las exiguas proporciones indicadas al principio, por ser aquellas que para otros menesteres habían dado el máximo de sensibilidad y de luminescencia.

Fueron primeras materias el carbonato de bario impurificado como de costumbre (100 gr.), el azufre (30 gr.) y el anhidrido arsenioso (0,015 gr.); hecha la mezcla homogénea se llenó un crisol, comprimiéndola mucho para darle adherencia, y en ella se practicó un taladro cónico, que fué llenado con otra mezcla análoga, que en lugar del anhidrido arsenioso, contenía 0,002 gr. de subnitrato de bismuto. Calentado el sistema al rojo vivo por tres horas, resultó un producto duro y compacto, en cuya masa se distinguen dos zonas, la exterior blanca y la interior agrisada amarillenta; reducido á fragmentos y expuestos á la luz, son muy sensibles y presentan singular fosforescencia con núcleos de color amarillo claro algo verdoso y aureolas de brillante color amarillo de oro, observándose en algunos trozos una curiosa inversión de las coloraciones. Al igual del experimento anterior, el fenómeno de la doble coloración es inconstante y parece obedecer á condiciones especiales, cuyas influencias no he podido determinar.

Relatados los antecedentes de investigación personal que considero obligado preliminar de los nuevos ensayos, se de-

duce de ellos, respecto del sulfuro de bario, la posibilidad de obtener fosforescencias de dos colores, bien con disoluciones formadas por un sólo diluyente y un sólo fosforógeno, bien con otras más complicadas en las que se contienen dos fosforógenos de tan distinta naturaleza como el anhidrido arsenioso y el subnitrato de bismuto, siquiera no haya logrado averiguar los modos fijos de producir á voluntad el fenómeno. Tocante á sus causas, aunque luego insistiré acerca del particular, impórtame desde luego advertir que al principio hube de fijarme en la influencia del calor y en la heterogénea estructura de la masa, que implica acaso cierta desigualdad en la distribución del fosforógeno, resultando disoluciones que pudieran llamarse irregulares. Entonces la luz no excita de igual manera todas sus partes, ni provoca en toda la masa las mismas disociaciones, y perturbado en ella de diferentes modos el equilibrio molecular representado por la disolución sólida, en razón de la variable sensibilidad que implica la estructura no homogénea, aparecen en la fosforescencia las coloraciones dobles, cuya explicación no me parece actualmente satisfactoria, ni otra alguna, mientras no se establezcan relaciones precisas entre el color de la fotoluminescencia y la naturaleza del fosforógeno.

Guiado por los resultados antes alcanzados, quise reanudar, hace poco tiempo, mis trabajos acerca de los sulfuros metálicos fosforescentes, especialmente el de estroncio, con ánimo de indagar la constitución especial de las disoluciones sólidas que los forman, buscando datos para resolver el problema de la química de la fotoluminescencia, cuyo interés, particularmente en su calidad de fenómeno reversible, sube de punto. Bien se entiende que había de ocuparme, dada la invariabilidad del diluyente (sulfuro de estroncio, formado de contínuo mediante la acción del azufre sobre el carbonato á elevada temperatura), en volver al estudio de los diversos fosforógenos, cuyos efectos á tantas variaciones hállanse sujetos, siquiera, en la actualidad, algo seguro pueda ya cole-

girse respecto del máximo de su poder fosforogénico; mejor dependiente, á lo que parece, de la proporción empleada y no de su naturaleza química.

Substancialmente, los procedimientos experimentales fueron los mismos cuya eficacia quedó bien demostrada á los principios de mi labor, no sin haberme permitido modificaciones de importancia, de las cuales conviene dar cuenta, porque uno de sus primeros efectos ha sido el obtener masas dotadas de fosforescencia intensa de dos colores. Fuí bastante afortunado para encontrar excelente carbonato de estroncio, muy blanco, exento de calcio y de bario y cuya sola impureza eran algunas milésimas de cloruros; el azufre, en flor, no contenía ni trazas de hierro, y esto aseguraba el conseguir masas blancas ó agrisadas, sin que les sirva de pigmento el color pardo de sulfuro de hierro, que tanto disminuye su sensibilidad respecto de la luz y perturba grandemente la fosforescencia. Estas fueron las primeras materias del diluyente y de intento se han suprimido los fundentes, en algunas otras ocasiones empleados, y el impurificar, como era uso, el carbonato de estroncio, agregándole exiguas proporciones de carbonato y de cloruro de sodio, porque habiendo prescindido de ellos con ocasión de preparar sulfuros de bario, que resultaron muy fosforescentes, hice lo propio con el de estroncio, logrando igual efecto; pero es condición indispensable el operar de la manera que luego se dirá, y no de otra forma. Como se ve, hay en el nuevo sistema, tocante al diluyente, una simplificación importante, cuya conveniencia, para los fines que yo me proponía, la demostraron los experimentos, y por eso la he preferido en las últimas investigaciones.

Hay, no obstante, inconvenientes en prescindir en absoluto y para todos los menesteres del carbonato y del cloruro de sodio y de cualesquiera otros fundentes. Resultan entonces las masas fosforescentes bastante menos compactas, su aspecto es más terroso, no aparecen homogéneas, es mayor

su alterabilidad en contacto del aire y manifiesta su tendencia á reducirse á polvo y hasta parece que el fosforógeno se encuentra en ellas desigualmente distribuído; es frecuente verlas constituídas por capas bien marcadas de distintas coloraciones, dentro del tono agrisado claro, más ó menos amarillento, cuya sensibilidad para la luz y cuya fosforescencia van en aumento desde el núcleo á la más externa y superficial.

Tienen mis actuales investigaciones, en lo que atañe á la fosforescencia del sulfuro de estroncio, un objetivo principal, es á saber: determinar la influencia que en los cambios y variaciones de su color pueda tener la distinta naturaleza de los fosforógenos, y por eso los elegí distintos y variados, combinándolos unos con otros para constituír sistemas, en ocasiones ya bastante complejos, y fué en el curso de tales experimentos cuando observé, por nueve veces y en dos series distintas, la fosforescencia de dos colores muy diferentes, con la mayor claridad determinados. Busqué dos metales cuya eficacia tenía bien conocida, el bismuto y el manganeso, otro que la posee decisiva en la luminescencia roja del sulfuro de bario, y es el cobre, y otros dos -- el cobalto y el niquel — los cuales, á causa de la condición de estar clasificados entre los metales magnéticos, eran calificados de inactivos en calidad de fosforógenos. No es indiferente la forma de emplearlos; y siguiendo, en punto á ello, el criterio de otros investigadores y el derivado de los resultados de algunos ensayos propios, he dado la preferencia á los nitratos de los metales antedichos, siendo conveniente emplearlos ácidos y aun añadir un poco de ácido nítrico, si fuera menester, por ejemplo, cuando se opera con el bismuto y presentan los fosforógenos empleados la ventaja de poder mezclarse sin que entre ellos haya reacción, ni tampoco con el carbonato de estroncio en frío, y esto permite hacer muchas combinaciones de materias activas y complicar bastante las mezclas que han de constituír, luego de

haber sido sometidas á las continuadas acciones del calor rojo vivo, las disoluciones sólidas y los sistemas fosforescentes, siempre con un sólo diluyente, que es el sulfuro de estroncio, exento de materias alcalinas.

Importa notar ahora, una vez más, la conveniencia de emplear los fosforógonos, sobre todo si los constituyen metales pesados, en forma de nitratos, cuyas sales se descomponen por el calor, dejando un residuo fijo de óxidos muy divididos, los cuales, arrastrados acaso por los productos gaseosos de la reacción, á la elevada temperatura á que ésta se efectúa, son difundidos, con cierta regularidad, en la masa sólida. Habrá, pues, un fenómeno de transporte mecánico de las materias activas, contribuyendo á formar la disolución homogénea.

Un hecho, que juzgo bien establecido, es que no pueden contener el fosforógeno en estado de sulfuro, siéndolo el diluyente: los sulfuros de los metales pesados de uso general en calidad de cuerpos activos, son pardos ó negros, y si por extremar la temperatura ó por otras causas llegan á formarse, sirven de pigmento á las masas, las tiñen de tonos obscuros y no resultan fosforescentes. Puede advertirse muy bien esto mismo empleando primeras materias que contengan hierro; entonces prodúcese sulfuro, y, á causa de su coloración, el cuerpo resultante es en absoluto inerte para la luz, y por ninguna excitación llega á ser fosforescente, ni siquiera después de muy fuerte insolación directa, prolongada durante algunas horas. Hay cierto contraste entre el no ser fotoluminescentes las masas ennegrecidas, con mayor ó menor intensidad, por sulfuros metálicos obscuros y la triboluminescencia de ciertas blendas negras, tan sensibles, que basta rozarlas con un cuerpo duro para que en la superficie de rozamiento aparezcan ráfagas luminosas intensas; verdad es que tales blendas constituyen, en realidad, sistemas complejos, conteniendo numerosos fosforógenos de variada naturaleza, sirviéndoles como diluyente el sulfuro de cinc. Ensa-

yando, en calidad de materias activas, los óxidos metálicos puros, procurando difundirlos con la homogeneidad posible en el carbonato de estroncio, procediendo en todo lo demás como de costumbre, obtuve resultados aceptables y cuerpos fosforescentes, aunque no con tanta intensidad, ni en tal grado impresionables como empleando los correspondientes nitratos, y así, en mis actuales experimentos, les he otorgado la preferencia, además de que, siendo todos solubles, está facilitado el empleo de sus mezclas. Son los apuntados pormenores experimentales que tienen su interés cuando se trata de fenómenos de la índole de la fosforescencia, que presenta aspectos tan diversos, multitud de variantes y singularidades dignas del más atento y minucioso estudio.

Junto con lo expuesto, es menester considerar, siquiera brevemente, los métodos de obtención para relacionar de algún modo con ellos los resultados conseguidos. En anteriores trabajos me valía de medios mecánicos, largos y penosos, para incorporar el fosforógeno con los carbonatos ó los óxidos, primera materia de los diluyentes, y el procedimiento, aunque eficaz, conforme lo demuestran las numerosas series de materias fosforescentes que he preparado, no es seguro en cuanto á la homogeneidad de los productos, al punto que á la falta de ella y á sus imperfecciones han de atribuirse en gran parte muchas de las anomalías que en anteriores Memorias dejo apuntadas. Es preferible y más ventajoso impregnar, conforme lo hago ahora, suprimiendo los compuestos alcalinos, el carbonato de estroncio, del que ha de ser formado el diluyente, con disoluciones acuosas de los fosforógenos, que, según va dicho, son nitratos, agregando un ligero exceso de ácido nítrico puro. Con el líquido, conteniendo uno ó varios nitratos activos y el carbonato bien pulverizado, se hace una suerte de pasta blanda, la cual es desecada á 100° sin dejar de removerla; las sales activas no han experimentado la menor alteración, y al mismo tiempo, gracias al exceso de ácido nítrico, se forma algo de ni-

trato de estroncio, favorable á la luminescencia. Resulta, por tan sencillo medio, muy completa la impregnación, particularmente si la cantidad de líquido no es excesiva—para 50 gr. de carbonato de estroncio bastan 100 c. c.—, y se distribuye con perfecta regularidad el fosforógeno, quedando á la postre un cuerpo blanco, pulverulento y seco, el cual sólo contiene 0,001 gr. de cada una de las materias consideradas activas, en cuya proporción media reside el máximo de su eficacia, operando, conforme lo hago de ordinario, á la temperatura del rojo vivo sostenida durante cuatro horas.

Viene luego el mezclar el carbonato de estroncio, impregnado del fosforógeno en la manera que es dicha, con azufre — 15 gr. en mis presentes ensayos—, y puesta la mezcla en crisoles de barro, sin comprimirla ni cubrirla con polvo de almidón, conforme se hacía otras veces, pero tapándolos convenientemente, se calienta durante cuatro horas al rojo vivo y sostenido. Pasado este término, ha de procurarse que el enfriamiento sea lo más lento posible, disminuyendo poco á poco la temperatura, pues tengo advertido ser muy ventajoso, para el resultado final, semejante proceder.

Lejos estaba de prever los resultados de este método operatorio: al principio de los experimentos prescindía del nitrato de bismuto y empleaba el de cobre como fosforógeno constante, agregando, según los casos, uno ó varios de los otros nitratos que dejo mencionados; en ocasiones era el término invariable alguno de ellos, y realicé todas las combinaciones posibles con los cuatro y ensayé mezclas que los contenían juntos, y eran, por consiguiente, sistemas de relativa complejidad. Vale decir que los nitratos de níquel y de cobalto, cada uno de por sí, mezclados, ó unidos á otros nitratos, á pesar de contener metales magnéticos, son excelentes materias activas é iguales calidades tienen las demás sales empleadas. Nunca las mezclas de dos ó varios fosforógenos han alterado el color verde de la fotoluminescencia de la disolución sólida resultante, aunque cambiaron el matiz y

la intensidad de la coloración, en igualdad de las demás circunstancias y los efectos generales puede decirse que son los mismos substancialmente que empleando solos, formando con el diluyente sistemas binarios, el manganeso, el níquel, el cobalto ó el cobre. Este último no comunica á la fosforescencia de sulfuro de estroncio el tono rojizo bien determinado que suele comunicar, á lo menos en casos particulares, á la del sulfuro de barío; cuyos fenómenos atribuyo, con fundamento, á la temperatura, juzgando insuficiente la que me fué dado alcanzar para conseguir ciertos resultados, en especial tratando mezclas ricas de variados fosforógenos con un sólo diluyente; lo cual demuestra la influencia del calor respecto de la luminescencia de los sulfuros metálicos susceptibles de adquirirla.

Ya se presentan otros fenómenos cambiando un poco el método, prolongando las acciones del calor y haciendo intervención, en calidad de fosforógeno, el bismuto, cuya peculiar eficacia está sobradamente demostrada. Habiendo practicado un primer experimento con 0,001 gr. de nitrato de bismuto, con exceso de ácido nítrico, calentando el crisol al blanco, sostenido más de cuatro horas, obtuve una masa heterogénea, dispuesta en capas ó zonas concéntricas, con una suerte de núcleo central, presentando tonos grises claros, algo verdosos; extraída del crisol y dividida en fragmentos grandes, resultó en extremo sensible para la luz, y en su fosforescencia adviértense centros de color violeta obscuro, circundados de muy brillantes aureolas de tonos verdes.

Multitud de veces había preparado en el transcurso de mis largas investigaciones, en las más variadas circunstancias, el sulfuro de estroncio dotado de intensa fosforescencia verde, cuyas propiedades tengo muy por menudo estudiadas y sólo hasta el experimento relatado pude observarla de dos colores, perfectamente determinados. Son las masas que la presentan compactas, granugientas, sin aspecto escoriforme, menos duras que las conseguidas añadiendo á las

primeras materias carbonato y cloruro sódicos y tan excitables que basta exponerlas á la iluminación directa sólo 30″ para que sean susceptibles de presentar enseguida, llevadas á la obscuridad, la máxima fosforescencia en la forma que es dicha, persistiendo, con las naturales y progresivas disminuciones de intensidad, durante una hora y siendo la coloración violeta la primera en extinguirse, y he observado asimismo que el sulfuro de estroncio de que se trata manifiesta tendencias á desmoronarse, aún conservándolo fuera del contacto del aire, como si hubiera poca cohesión y escasa adherencia entre sus partículas ó á ello se opusiera su estructura y la disposición en zonas ó capas bastante regulares, de las cuales son las dotadas de mayor luminescencia las externas, que por encontrarse precisamente inmediatas á las paredes internas del crisol, experimentan la acción del fuego más directa; conviene notar que su color es más claro, y por lo general de perfecta blancura.

A la vista del primer resultado, que varias veces he comprobado, quise ver si en idénticas condiciones experimentales, cambiando de fosforógeno, se producía el mismo fenómeno, el cual, en varias ocasiones, presentaba aquélla inversión en colores ya notada de atrás en el sulfuro de bario: junto á fragmentos luminescentes con núcleos de color violeta obscuro y aureolas verdes, habíalos con núcleos verdes y aureolas violadas y la línea de separación de ambas coloraciones ostenta, de continuo, la intensidad máxima de la fosforescencia. Trataba de ver, en resumen, los efectos de cada uno de los nitratos de cobre, manganeso, niquel y cobalto y los de estos mismos cuerpos, mezclados individualmente con el nitrato de bismuto, término ó fosforógeno constante. De esta suerte los ensayos habían de referirse á sistemas binarios de un fosforógeno y ternarios con dos fosforógenos, siendo en todos diluyente único el sulfuro de estroncío.

Nunca se emplearon sino las proporciones siguientes: 50

gramos de carbonato de estroncio puro exento de bario, calcio y compuestos alcalinos, 0,001 gr. de materia activa, incorporada por impregnación, en la forma antes dicha, y 15 gramos de azufre, y he practicado dos series de experimentos, cuyos resultados pongo aquí.

1.ª serie. Un sólo diluyente (CO_3Sr) y un sólo fosforógeno, es á saber:

$$[(NO_3)_3Bi, 5Aq = (NO_3)_2Co, 6Aq = (NO_3)_2Cu, 6Aq =$$
$$= (NO_3)_2Mn, 6Aq = (NO_3)_2Ni, 6Aq] =$$

= *fosforescencia con núcleos violeta y aureolas verdes.*

2.ª serie. Un sólo diluyente (CO_3Sr) y dos fosforógenos, uno de ellos constante, á saber:

a) — $[(NO_3)_3Bi, 5Aq + (NO_3)_2Cu, 6Aq]$
b) — $[(NO_3)_3Bi, 5Aq + (NO_3)_2Co, 6Aq]$
c) — $[(NO_3)_3Bi, 5Aq + (NO_3)_2Mn, 6Aq]$
d) — $[(NO_3)_3Bi, 5Aq + (NO_3)_2Ni, 6Aq]$

Fosforescencia con núcleos violeta y aureolas verdes,

habiéndose observado, como en el primer ensayo, aunque no sea frecuente ni constante, la inversión de las coloraciones, que jamás se confunden ni difunden una en otra, antes se hallan como separadas y limitadas por una línea brillante.

Bastan los resultados expuestos y los datos consignados para demostrar cómo se logra obtener sulfuros de estroncio dotados de fotoluminescencia de dos colores, lo mismo tratándose de sistemas que contengan un sólo fosforógeno, que de aquellos en los que entran dos materias activas distintas. Importa ahora indicar dos observaciones: es la primera que los colores de fosforescencia han sido siempre el violeta y el verde, con intensidades variables, según las ocasiones, y nunca otro alguno, bien es cierto que fueron iguales, en to-

dos los experimentos, el estado de dilución del fosforógeno y las condiciones de la temperatura; es la segunda la inconstancia del fenómeno, idéntica á la notada, en análogos casos, para el sulfuro de bario, cuando presenta también dos coloraciones. Esto último aparece muy claramente probado en la serie de experimentos, que pudiera llamar preliminares y antes he indicado, efectuados empleando las mismas materias activas, en las propias condiciones experimentales, habiendo resultado, sin embargo, productos con fosforescencia de un solo tono verde, de notable intensidad y muy impresionables por la luz.

Ofrécese naturalmente, aunque el número de hechos apuntados sea corto y sus variantes no hayan podido ser con precisión determinadas, el tratar de inquirir á qué es debida la singular fosforescencia de dos colores observada en el sulfuro de estroncio. No he de aventurar, sin embargo, conjeturas, ni trato de establecer hipótesis, limitándome, en punto á ello, á exponer breves consideraciones relativas á las circunstancias y apariencias del fenómeno estudiado, dentro de las doctrinas más admitidas tocante al hecho general de la fotoluminescencia, cuyo punto de partida es la teoría actual de las disoluciones diluídas, que no otra cosa son, á la postre, las mezclas fosforescentes; y la propia fosforescencia, considerada en su generalidad, es una verdadera propiedad de la materia diluída. Así parece inducirse de los ya largos y muy diversos estudios hechos referentes, no á un fenómeno aislado, sino á variadas series de interesantes fenómenos, cuyas conexiones aparecen en la actualidad bastante puestas en claro para establecer, sobre bases experimentales, los principios de una doctrina llamada á adquirir notables desenvolvimientos.

Constituyen los sistemas fosforescentes dos elementos esenciales: el diluyente, que es, en el caso presente, el sulfuro de estroncio, y el fosforógeno ó materia activa, uno ó dos nitratos metálicos en los experimentos relatados, y al

calentar la mezcla de carbonato de estroncio, impregnado del nitrato ó nitratos con azufre, se forma el sulfuro de estroncio, y éstos se descomponen, dejando por residuo los correspondientes óxidos metálicos fijos, y el conjunto es una perfecta disolución sólida diluída — para 40,5 gr. de CO_3Sr, 0,001 gr. de fosforógeno—nada compleja. En tal concepto, la materia disuelta debe hallarse parcialmente disociada y contener iones libres dotados de su peculiar movilidad, de suyo activos, pero cuya actividad adquiere nuevos incrementos bajo la influencia de la luz, y este agente, al excitarla, crea un estado de equilibrio transitorio, distinto desde el punto de vista físico-químico, del que consideramos inicial, antes de la iluminación directa, complicándose con las acciones, de orden puramente químico, reversibles, efectuadas con gran rapidez, entre el diluyente y el fosforógeno, por virtud de las que su estado cambia en un momento y no vuelve al primitivo sino en la obscuridad, produciéndose, de camino, la fotoluminescencia y restaurándose, mientras dura, el régimen primitivo del sistema sólido.

Pudiera acontecer que, á causa de la temperatura, por ejemplo, la estructura de la masa no resultase homogénea; y, como en los productos de mis últimos ensayos, apareciese claramente estratificada, y entonces su impresionabilidad, respecto de la luz, no es igual en toda ella, originándose de esto, por ventura, los dos colores de fosforescencia, los cuales ahora significarían dos estados de dilución del fosforógeno coexistentes, cada uno dotado de cierta individualidad, con sus peculiares acciones internas fisico-químicas, pero, sobre todo, distintos en cuanto á la fotoluminescencia. Téngase presente que en un fenómeno de la misma categoría y para muchos casos el color de la termoluminescencia es función de la temperatura, en particular cerca del límite, y en cuanto á los efectos químicos generales, no hay inconveniente en admitir que sólo la velocidad, en igualdad de circunstancias, distingue los luminosos de los térmicos.

Debe tenerse entendido, muy en primer lugar, la característica de las acciones físico-químicas de la luz; como la emanación catódica, tiene este agente extraordinario poder de disociación y disgrega la materia, comunicando á sus elementos actividades considerables de que antes no gozaban, haciéndolos caminar libres, dotados de movilidad incesante, conforme lo prueban sus funciones de catalizadores fotoquímicos en ciertos fenómenos de fototropia, de la categoría de los llamados seudoreversibles; y aun sólo desde el punto de vista químico, la luz es un agente reductor y en tal condición están fundadas sus principales y extendidas aplicaciones. Hay, pues, en las luminescencias que ocasiona, no poco de disociación ó disgregación del fosforógeno incorporado á la masa del diluyente, en cuyo sentido la fosforescencia de dos colores, ahora observada en el sulfuro de estroncio, como antes en el de bario, reduciríase á una variante, más ó menos aparente, del fenómeno general de la fosforescencia, cuando es provocada por la luz y alcanza el límite máximo de su intensidad, es decir, á una disgregación particular, reversible, mas no homogénea, por no serlo tampoco la disolución sólida, que representaría ya en su estado inicial un doble régimen, cuyas partes han de ser diferentemente perturbadas cuando la luz ejerza sobre toda la masa sus energías disociantes.

Madrid, Abril de 1909.

LVI. — Método para determinar la dirección de los vientos superiores por las ondulaciones del borde de los astros.

POR VICENTE VENTOSA.

(Continuación.)

VII

El Dr. See imagina que cada onda aérea tiene la forma de una lente biconvexa, y, en general, todos los que se han ocupado en este problema participan, más ó menos explícitamente, de la misma opinión. Pero, en tiempos posteriores, el astrónomo americano Mr. Wadsworth hizo una distinción de tales fenómenos (*) que, para el objeto que perseguimos, nos parece de la mayor importancia. Ahondando un poco en el estudio de los diversos estados de la atmósfera, que modifican y perturban la visibilidad de los astros, parece indudable que son dignas de atención las ideas del mencionado autor, por lo cual creemos lo más acertado traducir casi textualmente sus propias palabras.

«Es de desear—dice—que se clasifiquen los efectos de »las perturbaciones atmosféricas en la posición y carácter de »las imágenes de los astros formadas en el plano focal. Pue»den dividirse los diversos efectos observados en tres cla»ses generales:

»1.° Movimientos de trepidación de las imágenes de los »astros sin pérdida sensible de definición. Estos movimientos »pueden ser:

(*) *On the Conditions of maximum Efficiency in Astrophotographic Work.* Part. II. *(The Astrophysical Journal,* Enero de 1898).

»*a*) Rápidos é irregulares, en los cuales las imágenes »parece que saltan de un lugar á otro desordenadamente, ó »bien:

»*b*) Lentos y oscilatorios.

»2.° De difusión y dilatación de las mismas sin movi»miento lateral.

»3.° De trepidación y difusión combinadas.

»Cada uno de estos efectos se debe á un cambio caracte»rístico en la naturaleza de la perturbación atmosférica. El »primero está producido por una variación regular y pro»gresiva de la densidad de una parte á otra de la columna »de aire á través de la cual debe pasar la luz emanada del »astro antes de llegar al objetivo del telescopio. Esta varia»ción da por resultado una desviación general del haz lumi»noso: es el mismo efecto que produciría un prisma delgado »de vidrio interpuesto en la trayectoria del haz. Si el *prisma* »*de aire* equivalente fuera *perfectamente homogéneo*, ten»dríamos una simple desviación de la imagen telescópica, »sin *ninguna* pérdida de definición (salvo el efecto pequeñí»simo debido á la aberración cromática del *prisma de aire)*; »no obstante, dicha condición, como es de esperar, no se »verifica sino muy rara vez, particularmente si el objetivo es »de grandes dimensiones, porque entonces el *prisma de aire*, »cuya arista refringente toma á cada instante nueva dirección, »se deshace y rehace sin cesar. En muchos casos el *prisma* »*de aire* no se forma sino en parte de la lente, y entonces se »verá un rayo de luz como arrojado de la imagen en direc»ción perpendicular á la arista refringente del *prisma*.

»De manera análoga pueden considerarse los efectos de »segunda especie como si fueran producidos por la interpo»sición momentánea, delante del objetivo, de *coágulos* (clots) »de aire, de forma más ó menos globular, y cuya densidad »variase del centro á la periferia. Estas condensaciones ó »enrarecimientos locales del aire cambian instantáneamente »la distancia focal del telescopio, del mismo modo que lo ha-

»ría una lente delgada de vidrio colocada en iguales condi-»ciones. Tampoco aquí, como en el primer caso, este efecto »es, de ordinario, bien puro, por la estructura irregular de la »*lente de aire* que equivaldría á la citada lente de vidrio. Pero »si esa estructura fuese regular, y persistentes la posición y la »forma de la *lente de aire*, el efecto indicado podría casi por »completo compensarse por una simple variación de la dis-»tancia focal del anteojo. Y es circunstancia que merece ser »notada, que, cuando las perturbaciones atmosféricas son en »su mayor parte de esta naturaleza, se llega á obtener los in-»tervalos más frecuentes de visión distinta, introduciendo ó »sacando algo el ocular de la posición que convendría si el »aire no experimentase perturbación alguna; esto es, mo-»viéndole hacia dentro, cuando las *lentes de aire* que con más »frecuencia se forman son más densas en su centro, ó hacia »fuera, en el caso contrario.

»Finalmente se ve que el tercer efecto indicado procede, ó »de la combinación momentánea de las *lentes de aire* con los »*prismas de aire*, ó sólo de las *lentes de aire*, si éstas no »son concéntricas al eje del telescopio.» En este caso, si la agitación de las imágenes de los astros es excesiva, su observación llega á ser impracticable.

En las colecciones de trabajos astronómicos publicadas por diversos observatorios, hállanse indicaciones más ó menos explícitas sobre los diferentes estados de la atmósfera, como medio de apreciar el grado de precisión de los resultados obtenidos, y se les distingue con palabras apropiadas, según el efecto que producen en la calidad de las imágenes de los astros. También en el Observatorio de Madrid se hace la misma distinción, y así se dice que las estrellas están *ondulantes*, *movidas* ó *saltarinas*, etc., para apreciar los diversos grados de *movimiento* de las imágenes; ó bien *abultadas*, *deshechas*, etc., para señalar la escala progresiva del estado *difuso* de las mismas. Las numerosas observaciones meridianas hechas en el indicado Observatorio parece

que revelan una circunstancia atendible: que la difusión de las imágenes (la cual puede estar influída ó modificada por la magnitud ó el color del astro) se nota preferentemente en las estrellas que culminan cerca del cenit, aunque los dos estados definidos por Mr. Wadsworth puedan advertirse, ya solos, ya combinados, á cualquier altura del astro sobre el horizonte. No sabemos si en otra parte se ha hecho la misma observación, que, de confirmarse, ayudaría acaso á esclarecer la verdadera naturaleza de las citadas condensaciones globulares.

Hablando de las deformaciones observadas en las imágenes telescópicas de las estrellas, dice el Dr. See («Astr. Nachr.», núm. 3.438): «Conviene notar que el mal procede »principalmente de la presencia simultánea de corrientes »frías y calientes, así como de la irregularidad de las expan»siones y refracciones que origina semejante mezcla. Cuan»do el aire está uniformemente frío ó caliente, cuando la »temperatura de la masa es proporcionada á la densidad, de »manera que se presente un estado general de equilibrio, »las refracciones irregulares de la luz no causan ninguna per»turbación. La diferencia de humedad de las corrientes en»tremezcladas tiene mucha importancia, porque el vapor de »agua posee gran calor específico.»

Recientemente, Mr. R. T. A. Innes, discutiendo los resultados de las observaciones de estrellas dobles efectuadas en el Observatorio Yerkes (Estados Unidos) por Mr. Burnham, ha demostrado (*) que los anteojos de pequeña abertura tienen, relativamente, un poder de separación de las estrellas componentes de los pares muy ceñidos, mucho mayor que los anteojos de gran abertura. En opinión del autor tal resultado está enteramente producido por la interposición de nuestra atmósfera, pues, conforme aumenta la abertura del

(*) *The Relative Atmospheric Efficiency of Telescopes.* («The Observatory», núm. 411, Julio de 1909.)

objetivo, la dilatación aparente de las imágenes telescópicas de los astros crece también, y es, por tanto, cada vez más difícil hallar noches en que la definición de los mismos sea perfecta, condición necesaria para poder desdoblar estrellas en apariencia simples; dentro siempre de los límites que imponen la mayor ó menor perspicacia del observador, y el grado de perfección óptica del anteojo.

Los hechos consignados en los dos últimos párrafos, y el razonamiento, en cada caso, de los Sres. See é Innes, sólo pueden referirse al estado de difusión de las imágenes estelares. Lo que, en último término, parece más probable, á juzgar por los estados especiales de la atmósfera que generalmente acompañan á dichos fenómenos, ó con ellos coinciden, es que la difusión de las imágenes se origina por la mezcla súbita de capas de aire, cuya temperatura y humedad difieren mucho entre sí, conforme opina el Dr. See; mientras que su trepidación debe más bien atribuirse á esas pulsaciones incesantes, de amplitud sensible, que existen siempre en el viento, según Mr. Langley (*). Los ingeniosos experimentos de este sabio, han revelado, en efecto, que el aire en movimiento no varía de lugar en masa, como lo haría un cuerpo sólido rígido, sino que, siendo un flúido elástico casi perfecto, tiene que experimentar al moverse incesantes condensaciones y enrarecimientos, y variaciones frecuentes en su densidad, que con rapidez se propagan sucesivamente en la masa gaseosa formando ondas.

Mr. W. N. Shaw (**) afirma igualmente que el viento, por efecto de un rozamiento superficial entre las diversas capas del aire, está constituído por una serie de ráfagas y calmas de corta duración y alternadas, que los anemómetros de pre-

---

(*) *The Internal Work of the Wind.* («Smithsonian Contributions to Knowledge», 1893.)

(**) *Barometric Gradient and Wind Force.* («Report to the Director of the Meteorological Office etc., by Ernest Gold», London, 1908, Preface.)

sión acusan con toda fidelidad. Con arreglo á las investigaciones analíticas de Helmholtz, la condición necesaria para la producción de las ondas es la discontinuidad de la densidad de las capas de aire que están en contacto, de manera que tengan una superficie de separación bien definida. Dicha condición queda evidentemente satisfecha en las capas inferiores de la atmósfera, que están en contacto inmediato, ya con el agua, ya con el suelo, pero Helmholtz duda que pueda verificarse en las capas superiores (*).

Sin embargo, Mr. Langley se inclina á creer que, aun á distancias considerables de la superficie terrestre, el aire no debe de ser enteramente homogéneo, ni sus moléculas moverse en todas partes con la misma velocidad; porque, si le considerásemos como flúido absolutamente elástico y desprovisto de fricción, conservaría indefinidamente el movimiento que en otro tiempo se le hubiere impreso, y las irregularidades actuales del viento podrían no ser más que el resultado de alteraciones ó cambios ocurridos en época anterior, aun cuando fuera lejana. Como puede admitirse, sin error considerable, que el viento no difiere mucho en su constitución interna de ese estado ideal, parece verosímil que las incesantes variaciones que experimenta deban su origen á impulsos anteriormente recibidos, y cuya extinción, se efectúa con lentitud suma. Siendo esto así, no habría mucha dificultad en concebir que en el seno del aire superior, cualquiera que sea su altitud, puedan existir esas variaciones locales, ó pulsaciones, análogas á las que con evidencia obsérvanse á menor altura sobre el suelo. A estas consideraciones ó razonamientos de Mr. Langley conviene añadir

---

(*) Las memorias notables de Helmholtz referentes á los movimientos de la atmósfera, al principio publicadas en las *Sitzungsberichte* de la Real Academia de Ciencias de Berlín, 1888-89, fueron después traducidas al inglés y coleccionadas por Mr. Cleveland Abbe en su interesante obra *The Mechanics of the Earth's Atmosphere* («Smithsonian Miscellaneous Collections», 1891).

que la presencia simultánea de varias corrientes, que se mueven con velocidades distintas y en direcciones y altitudes diferentes, hecho por la observación corroborado muchas veces, es causa permanente de ese estado de heterogeneidad necesario para la producción de las ondas en la mayor parte de las capas atmosféricas.

En cuanto á las aglomeraciones de forma globular, en que antes nos hemos ocupado, quizás harían comprender ciertos estados pasajeros del limbo solar, en los cuales éste no presenta movimiento ondulatorio bien caracterizado, sino una agitación especial indefinible, que no sería extraño fuera producida por corrientes verticales, ascendentes ó descendentes, de diversas temperaturas, y difíciles de discernir con el anteojo.

VIII

Recuérdese que uno de los argumentos de más peso presentados por M. Exner contra la posibilidad de medir, con arreglo á nuestro método, la altitud de las corrientes atmosféricas, fué que, según dicho señor, las mismas ondulaciones observadas en el borde ó limbo solar cuando se saca el ocular del anteojo fuera del foco principal, deberían verse también claramente al introducirle de la misma longitud al otro lado del foco. Y que habiendo M. Trabert hecho la experiencia, halló que la predicción de M. Exner *solamente* se realizaba cuando se reducía mucho, por medio de un diafragma, la abertura del objetivo.

Con el fin de analizar los fenómenos observados por el primero de los señores mencionados y dar cumplida respuesta á las objeciones por ambos formuladas, comenzamos nuestros ensayos por repetir muchas veces, durante algunos meses, el experimento de M. Trabert, acerca de la influencia de la mayor ó menor abertura del objetivo en la visibilidad de las ondas, obturando parcialmente el de la ecuatorial de

Merz con diversos diafragmas, perforados en su parte central con agujeros circulares de diferentes diámetros. Desde el 23 de Junio al 31 de Octubre de 1907, el aspecto del limbo solar fué de esta manera con frecuencia observado, según que alternativamente se alejaba ó se aproximaba el ocular respecto del objetivo, á los dos lados del foco principal.

Las observaciones dobles fueron 70, repartidas del siguiente modo:

39	hechas	con toda la abertura de 27 centímetros.					
18	»	con un diafragma que reducía la abertura			á	19	centímetros.
5	»	»	»	»	á	8	»
8	»	»	»	»	á	3	»

La extensión de la distancia focal Δf varió entre $\pm$ 8 y $\pm$ 30 milímetros. Dividiendo por Δf el número constante 23.717, se obtiene, como ya más atrás dijimos, la distancia, expresada en metros, del foco conjugado respectivo, dadas las dimensiones de nuestra ecuatorial de Merz.

Los resultados más notables de dicha investigación fueron éstos: Con el diafragma de 3 centímetros veíase *siempre* correr las ondas *al interior del foco*, y *casi siempre* con el de 8 centímetros; mas cuando se hacía uso de las aberturas de 19 y 27 centímetros, el movimiento ondulatorio era *generalmente invisible*. Y en los casos bastante raros (el 14 por 100) en que pudo notarse, aunque *poco distintamente*, se advirtió que esto solía suceder cuando la atmósfera estaba agitada por una corriente general y enérgica.

Permítasenos citar particularmente dos casos que, á nuestro parecer, ofrecen cierto interés. Uno de ellos presentóse el 11 de Septiembre de 1897. En este día dos corrientes compartían el dominio del aire. La corriente superior era mucho más fuerte é invariable que la inferior, y algunos pequeños cumuli indicaban por su movimiento vacilante é indeciso la superficie de separación de ambas corrientes. Te-

niendo el objetivo enteramente descubierto, y alargando la distancia focal, es decir, alejando el ocular del foco de una longitud $\Delta f = +25^{mm}$, veíase casi siempre la ondulación producida por la corriente inferior, y á veces hasta parecía bien enfocada. Pero al introducir el ocular, al otro lado del foco, de la misma longitud $\Delta f = -25^{mm}$ apenas si se llegaba á adivinar la existencia de dicha corriente. Habiendo después reducido la abertura del objetivo á 3 centímetros, la agitación tumultuosa, debida al encuentro de ambas corrientes, era perceptible en todas las posiciones del ocular; pero al ajustar éste en el foco principal, veíase mejor que en cualquier otro lugar correr las ondas procedentes del viento superior, mientras que en la posición $\Delta f = +25^{mm}$ era cuando las ondas originadas por el viento inferior parecían mejor definidas. Esto quiere decir que, aun con una abertura tan pequeña, de 3 centímetros, no eran siempre absolutamente idénticos los fenómenos observados al variar la extensión de la distancia focal.

El segundo caso, de diferente naturaleza, ocurrió en los días 22 y 23 de Octubre del mismo año, entre los cuales el estado atmosférico cambió notablemente. En estos dos días pudieron ser observados los efectos producidos en la visibilidad de las ondas por la variación de la distancia focal, sin necesidad de recurrir á la interposición de ningún diafragma. El 22 de Octubre había una corriente muy alta del ONO., y otra más baja procedente del E., pero más fuerte que la primera. Tres ensayos hechos con distintas extensiones de la distancia focal dieron estos resultados, que copiamos de nuestro cuaderno de observación:

$\Delta f = +25^{mm}$: se ve una ondulación débil.
$\Delta f = -25^{mm}$: dicha ondulación apenas es visible.
$\Delta f = +20^{mm}$: la ondulación aparece ahora fuerte.
$\Delta f = -20^{mm}$: se la ve algo mejor que cuando era $\Delta f = -25^{mm}$.
$\Delta f = +8^{mm}$: la ondulación es ahora aún más fuerte que para $\Delta f = +20^{mm}$.
$\Delta f = -8^{mm}$: en esta posición se ha debilitado mucho, y, además,

las ondas producidas por la corriente superior comienzan á vislumbrarse. El contraste entre estas dos últimas posiciones (+ 8 y — 8) es sorprendente.

Al día siguiente, 23, todavía surcaban la atmósfera las mismas corrientes, sin haber de manera apreciable variado de dirección, pero su importancia relativa se había invertido. El viento superior, intenso ahora, reinaba en las altas regiones de la atmósfera; el viento inferior, muy debilitado, estaba, por el contrario, á punto de desvanecerse en las cercanías del suelo. Examinado atentamente el borde del Sol, presentaba entonces los aspectos siguientes: para $\Delta f = +25^{mm}$, veíanse en él bastante bien las ondas largas; para $\Delta f = -25^{mm}$, no quedaba sino esa vibración indefinible llamada *Flimmern* por los alemanes. Dicho se está que al ajustar el ocular cerca del foco principal, las ondas cortas, pertenecientes al viento superior, se percibían con toda claridad.

Los hechos que acabamos de describir, por una parte confirman los resultados de los experimentos del Dr. Trabert, que ya expusimos; y por otra hacen patente el papel que en ellos juega la interposición de los diafragmas, cuyo oficio no es otro que el de poner en foco objetos situados á distancias muy diferentes. Esta propiedad del diafragma, muy conocida por los ópticos, y por los fotógrafos en particular, de aumentar la *profundidad del foco*, parécenos que no la tuvo en cuenta M. Exner, cuando trató de buscar la explicación de los fenómenos mencionados.

(Continuará.)

LVII.—Nuevo modelo de grisúmetro (*).

POR ENRIQUE HAUSER.

El grisúmetro que voy á describir ha sido imaginado con el fin de poder disponer, á la vez, de un aparato portátil, barato y tan exacto ó más que los grisúmetros corrientemente empleados en los laboratorios.

Para simplificar, evitando el empleo de soporte especial y tubos de caucho, he suprimido en mi grisúmetro el tubo de nivel, usado para ajustar la presión del gas, que se regula ahora por la altura del agua de la cuba que le sirve de envolvente; he suprimido también el empleo del mercurio, y queriendo evitar la disolución de una parte del ácido carbónico en el agua que contiene el grisúmetro, hago que se queme solamente el volumen del gas, siempre constante, que queda comprendido entre dos llaves en la cámara de combustión y fuera del contacto del agua, dejando además una columna de gas no quemado entre los productos de la combustión y aquel líquido, en el momento de hacer la lectura.

Consiste el instrumento (fig. 1) en un tubo-depósito, para toma de muestras de gases, con dos llaves bien esmeriladas, 1, 2, el cual se prolonga en cada extremo por un tubo graduado (en $^1/_{10}$ de cc. hasta 6 cc. para el modelo de 50 cc.). La graduación de los tubos debe ocupar la misma longitud en ambos; la del tubo inferior sirve para medir el volumen de la contracción y para fijar la altura de la carga de agua, combinando su graduación con la del tubo supe-

(*) Comunicación leída en la Sección de Metalurgia y Explosivos del Congreso Internacional de Química aplicada de Londres. — Mayo, 1909.

rior, que sólo sirve para este último fin; el tubo inferior lleva además una tercera llave, 3, cuyo uso se indicará más adelante. La llave 2 tiene su cabeza en forma de rueda dentada (de 4 ó 6 dientes) para poderla hacer girar bajo el agua por medio de una varilla ó un tubo. Una espiral de alambre delgado de platino (0,2 mm. diám.) soldada á alambres más gruesos del mismo metal (al menos 0,5 mm. diám.) atraviesa con cierta oblicuidad el tubo-depósito.

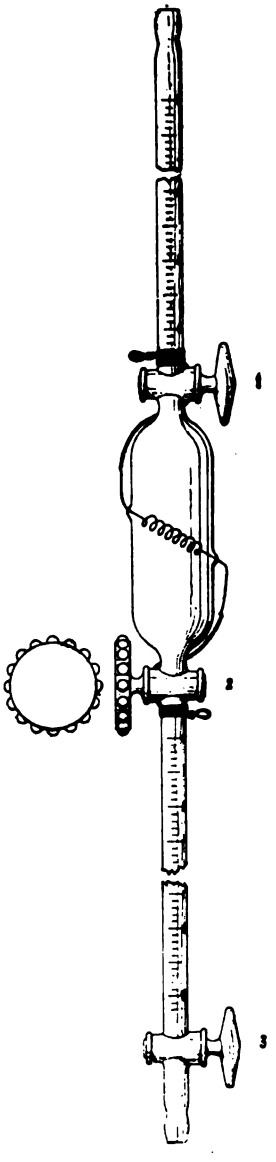


Figura 1.

Para operar con este aparato, se empieza por llenarlo de gas, tan completamente como sea posible, hasta el trazo más bajo del tubo inferior; cuya operación puede hacerse, bien sobre la cuba de agua (destilada) que le sirve de envolvente, cuando se hace un trasvase de gas, bien en el seno de la atmósfera que se quiere examinar: en el primer caso sólo habrá que cerrar la llave 1 después de llenar de gas el aparato, y habrá que cerrar también la llave 3 en el segundo caso, para abrirla en el momento de colocar el grisúmetro en la cuba envolvente. Una vez lleno el tubo de gas hasta próximamente el trazo 6, se continúa sumergiéndolo en la cuba hasta que el nivel de agua de la misma alcance en el tubo superior del grisúmetro un punto de la graduación igual al que

el gas marca en el tubo inferior; en tal momento se hace la lectura, después de haberse asegurado que no queda ninguna gota de agua suspendida en el orificio de la llave 2, lo que falsearía los resultados; hecho lo cual, y una vez anotada la temperatura del agua de la cuba en décimas de grado (ó medias décimas), se sujeta bien el tubo por medio de una pinza y se cierra la llave 2 empleando un tubo de cristal ó de celuloide.

En estas condiciones se hace la combustión del gas por medio de una corriente eléctrica á 12 ó 15 voltios. Para obtener buenos resultados se necesita, como es sabido, poner el platino al blanco por medio de contactos sucesivos; al efecto bastan unos 30 contactos de un segundo de duración, para conseguir la combustión de las mezclas grisuosas pobres (por bajo de 1 por 100) y un número de contactos de más del doble para mezclas de próximamente 4 por 100. Durante la combustión del gas debe observarse con atención si se producen fugas en el grisúmetro, lo cual es muy fácil de conocer con el que describo, primero porque las dos llaves están bajo el agua, y toda fuga por la llave 2 se traduce en un aumento de volumen del gas contenido en el tubo inferior, y además, porque una fuga por la llave 1 se observa fácilmente si se tiene la precaución de inyectar un poco de agua en el tubo superior antes de hacer la combustión de la mezcla gaseosa.

Ya enfriado el gas (bastan cinco minutos), se abre la llave 2 de igual manera que se cerró, y se sumerge gradualmente el grisúmetro en la cuba envolvente hasta que el gas marque la misma división en el tubo inferior que el nivel de agua en el tubo superior, lo cual permite leer el volumen del gas á la misma presión que antes de la combustión. Para tener en cuenta la variación de temperatura del agua, que hago uniforme por insuflación de aire, se calcula la variación de tensión correspondiente al gas y al vapor de agua (muy próximamente 5 mm. de agua por décima de grado á 20° C.),

y se sumerge otro tanto el grisúmetro en el agua, teniendo en cuenta, de igual modo, si hay lugar, la variación correspondiente de la presión barométrica. Estas correcciones de presión se miden sobre la escala del tubo superior, si la longitud de sus divisiones es conocida, ó bien sobre una segunda graduación en milímetros, grabada sobre el mismo

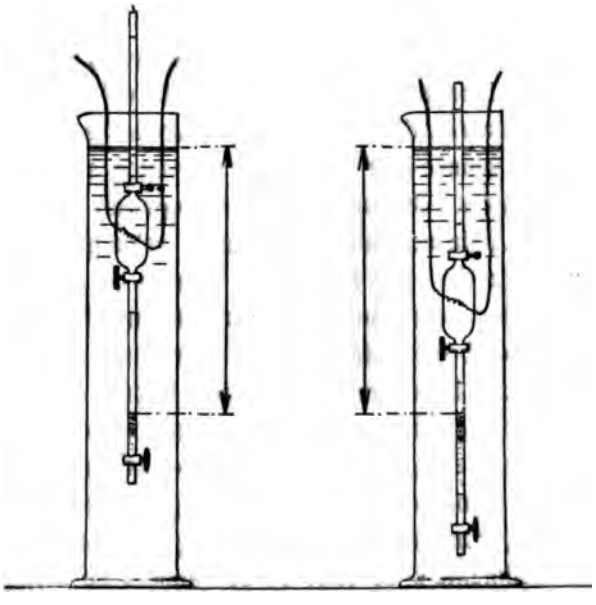


Figura 2.

tubo; pero podemos servirnos con ventaja de una pequeña escala móvil que resbala sobre el tubo superior, como la que empleo con éxito en mis buretas (*) para análisis de gases. La fig. 2 resume el conjunto de las manipulaciones (**).

Empleando este aparato se pueden hacer determinaciones

(*) El grisú en las minas de carbón. Segunda conferencia experimental. 1908 Fig. 7, pág. 55.

(**) Los primeros modelos de este grisúmetro han sido construídos por la casa Estévez & Jodra, Príncipe, 18, Madrid.

tan exactas como las obtenidas con los grisúmetros más complicados, y en menos tiempo que hace falta para describirlo; además, si los dos tubos que lo terminan son de diferente diámetro, se dispone entonces de un grisúmetro con dos sensibilidades.

Cabe juzgar de la exactitud que es posible alcanzar con el empleo de este aparato, comparando algunos de los resultados obtenidos, que expongo á continuación.

Hidrógeno en el oxígeno electrolítico.		2.09 %	—2.14 %	—2.14 %	
Metano.	Por la bureta Le Chatelier.	4 01	—3.96	—0.401	—0 396
	Por mi grisúmetro.....	3.94	—3.94	—0.395	—0.395

En la determinación del oxígeno en el hidrógeno electrolítico, los resultados obtenidos son enteramente comparables entre sí, 1.66 % — 1.68 %; 0.72 % — 0.74 %; mas para que tales resultados representen el contenido real en oxígeno, es menester eliminar primeramente el ácido carbónico que el hidrógeno pueda contener, porque, como es sabido, mediante la acción del platino incandescente se produce la reducción del ácido carbónico á óxido, con una contracción igual á su propio volumen, según la ecuación $CO_2 + H_2 = CO + H_2O$ y entonces el valor del oxígeno no será de $O = {}^1/_3$ Cont, sino $O = {}^1/_3$ (Cont — CO_2). En este caso particular el empleo del grisúmetro no tiene ventaja sobre los otros métodos.

(Laboratorio de Investigaciones Científicas de la Escuela de Minas de Madrid.)

PUBLICACIONES RECIBIDAS

(Continuación.)

Académie des Sciences. — Comptes rendus hebd. des Séances de l'...— Tome CXLV, numéro 25 (16 Déc. 1907), 27 (30 Déc. 1907). — Tome CXLVI, numéro 1 (6 Janvier 1908), 3 (20 Janvier 1908). — Tables des Comptes rendus, etc., Premier semestre, 1907, tome CXLIV.—Paris, 1907-1908.

Institut Egyptien.— Bulletin de l'... — Quatrième série, numéros 6 y 7.— Cinquième série, tome 1.er (Premier fascicule), année 1907. — Le Caire, 1906-1907.

Institut Océanographique. — Bulletin de l'... — Numéros 105-108 (Nov.-Déc. 1907).—Monaco.

Société Belge d'Astronomie.— Bulletin de la... — Deuxième année.—Numéro 11, Nov. 1907; numéro 12, Décembre 1907.—Bruxelles.

Société Belge de Géologie de Paléontologie et d'Hydrologie. — Bulletin de la... — Procès-Verbal de la séance du 15 Mai 1907, 18 Juin 1907, 16 Juillet 1907.— Mémoires, tome XXI, 1907, Fasc. II.— Tables générales des Matières des tomes I a XX.—Bruxelles, 1907.

La Feuille des Jeunes Naturalistes.—1er Janvier 1908, IV série, 38e année, numéro 447.—Rennes-Paris, 1908.

Bureau Français du Catalogue International de la Litérature Scientifique.— Bibliographie Scientifique française. — Tome V, année 1906-1907. — II Sect., Sc. nat. et biolog.es.—Paris, 1907.

Hale (George E.), Frost (Edwin B.). — The Astrophysical Journal, December, 1907.—The University of Chicago Press.

American Mathematical Society. — Transactions of the... — Volume, 8; Number, 4; October, 1907.—Lancaster and New-York, 1907.

Cosmos.— Revue des Sciences et de leur applications.— 56 année, nouvelle série, numéro 1195 (21 Déc. 1907), 1196 (28 Déc. 1907); 57 année, nouv. sér., numéro 1197 (4 janvier 1908), 1200 (25 janvier 1908).— Paris.

(Continuará.)

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE TOMO

Págs.

Composición de la Academia en 1.º de Julio de 1908.
Académicos de número..... 5
Académicos electos..... 6
Académicos Corresponsales nacionales..... 7
Académicos Corresponsales extranjeros..... 8
Elementos de la teoría de la Elasticadad, por *José Echegaray.* (Conferencias 10.ª á 14.ª segunda parte) 11, 46, 66, 165 y 194
Idem íd. (Conferencias 1.ª á 16 ª, tercera parte), 233, 252, 325, 353, 429, 447, 525, 553, 629, 651, 717, 742, 817, 844, 913 y 944
Nuevo método para determinar el diámetro del planeta Venus, por *Vicente Ventosa*..... 92
Investigación analítica de los cloratos. - Generalización á muchos oxidantes. - Colorimetría de los cloratos, por *Juan Fages Virgili*..... 100
Estudio comparativo de los instrumentos más usados en Sismología, por *Manuel María S. Navarro (S. J.)*..... 121
Informes de la Academia acerca de la obra del Sr. Alves Magalhaes, titulada *Nova lei do sistema do Mundo*..... 145
Aplicación cómoda y sencilla de la orina á la investigación general de oxidantes, por *Juan Fages Virgili*..... 209
Investigación y determinación cuantitativa del clorato potásico en la orina, por *Juan Fages Virgili*..... 214
Una reacción coloreada de las sales de Cinc, por *Angel del Campo Cerdán*..... 224
Contribución á la toxicología de los cloratos, por *Juan Fages Virgili*..... 273
El cometa Moreheuse, c. 1908, por *Miguel Aguilar*..... 280
Algunas observaciones á la teoría del carbono tetraédrico, por *José Giral Pereira*..... 291
Sobre los cambios de la conductancia de la manganina durante el recocido, por *B. Cabrera*..... 301 y 400

Págs.

Nuevo procedimiento de acidimetría empleando el agua de cal, por *Antonio de Gregorio Rocasolano*..... 375
Estudio general de las reacciones efectuadas con los compuestos órgano-magnésicos mixtos, por *José Giral Pereira* y *J. César Sánchez*..... 383
Los principios fundamentales de la Mecánica racional.—Un primer capítulo de dinámica, por *José Ruiz-Castizo*.. 469, 600 y 702
Sobre la síntesis de la forona y de la ionona, por *José Giral Pereira*..... 491
Los «Nysson» de España (Insectos Himenópteros), por *Ricardo García Mercet*... ..... 498 y 617
Nuevo método de destrucción de la materia orgánica en el análisis toxicológico, por *Juan Bautista Peset y Aleixandre*. 512
Programa de premios para el Concurso del año 1910..... 518
Observaciones acerca de algunos fenómenos de fototropía, por *José Rodríguez Mourelo*..... 575
Remarques sur diverses courbes planes (Lettre adressée à M. L. Torres y Quevedo), por *Maurice d'Ocagne*..... 587
Deducción elemental de una condición análoga á la de Arnold para la posibilidad de una buena conmutación en las máquinas eléctricas provistas de colector, por *Esteban Terradas*.. 592
D. Francisco de Paula Rojas, por *José Rodríguez Mourelo*.... 675
Metódo para determinar la dirección de los vientos superiores por las ondulaciones del borde de los astros, por *Vicente Ventosa*..... .... 689, 778, 870 y 1003
Experimentos para el estudio del rozamiento interior de los líquidos, por *Juan Florez Posada*..... 791
Pequeñas oscilaciones de sistemas no holónomos, por *José María Plans*..... 798
Análisis de nitos refinados, pólvoras y explosivos cloratados, por *Juan Fages Virgili*..... 884
Vatímetros integradores, por *José Ruiz Castizo*..... 895
Sobre los metales de las tierras raras (Europio, Gadolinio, Terbio, Disprosio, Neoiterbio, Lutecio), por *Georges Urbain*..... 974
Fosforescencia de dos colores observada en un sulfuro de estroncio, por *José Rodríguez Mourelo*..... 984
Nuevo modelo de grisúmetro, por *Enrique Hauser*..... 1013

5066
M2
A2 v
LIBRARY,
UNIV. OF MICH.
OCT 27 1909

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO VII.—NUM. 10.
(Junio de 1909)

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE FUENCARRAL, NÚM. 5.
1909

506.6
M2
A2 7

LIBRARY,
UNIV. OF MICH.
OCT 27 1909

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO VII.- NUM. 12.
(Junio de 1909)

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.
1909